AIME 2010 1 Exercice 1

Maya écrit sur une liste tous les diviseurs positifs de 2010^2. Elle choisit ensuite aléatoirement de cette liste deux diviseurs distincts. Soit p la probabilité qu'exactement un des diviseurs choisis soit un carré parfait. La probabilité p peut s'exprimer sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers positifs relativement premiers. Trouvez $m+n$.

Réponse

$$2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$$
$$2010^2 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 67^2$$

2010 admet donc $(2+1)(2+1)(2+1)(2+1) = 3^4 = 81$ diviseurs positifs.

Un diviseur de 2010^2 est un carré parfait différent de 1 et de 2010^2, s'il peut s'écrire sous la forme $p_1^2\,;\,p_1^2p_2^2\,;\,p_1^2p_2^2p_3^2$ avec $p_1, p_2, p_3 \in \{2,3,5,67\}$.

Il y a donc en tout $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = \frac{4!}{0!4!}+\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{4!0!} = (1+1)^4 = 2^4 = 2^{16}$

diviseurs de 2010^2 qui sont des carrés parfaits.

D'où :

$$p = \frac{\binom{16}{1}\binom{81-16}{1}}{\binom{81}{2}} = \frac{16\cdot 65}{\frac{81\cdot 80}{2}} = \frac{\overset{1}{\cancel{16}}\cdot \overset{13}{\cancel{65}}\cdot 2}{81\cdot \underset{\underset{1}{\cancel{5}}}{\cancel{80}}} = \frac{26}{81} = \frac{m}{n}$$

$$m+n = 26+81 = \boxed{107}$$

AIME 2010 1 Exercice 2

Trouvez le reste de la division de $9\cdot 99\cdot 999\cdot\ldots\cdot \underbrace{\overline{99...9}}_{999\ chiffres\ 9}$ par 1000.

Réponse

$$\underbrace{\boxed{9\cdot 99}}_{891}\cdot 999\cdot\ldots\cdot \underbrace{\overline{99...9}}_{999\ chiffres\ 9}$$
$$= \underbrace{\boxed{891\cdot 999}}_{890109}\cdot(10^4-1)(10^5-1)\cdot\ldots\cdot(10^{98}-1)(10^{99}-1)$$
$$= 890109\cdot(10^4-1)(10^5-1)\cdot\ldots\cdot(10^{98}-1)(10^{99}-1)$$
$$= 890109\cdot\underbrace{\boxed{(10^9-10^4-10^5+1)}}_{\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 1000)}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\boxed{(10^{197}-10^{98}-10^{99}+1)}}_{\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 1000)}$$

Le reste de la division de $9\cdot 99\cdot 999\cdot\ldots\cdot \underbrace{\overline{99...9}}_{999\ chiffres\ 9}$ par 1000 vaut donc $\boxed{109}$

OU

$$\underbrace{\boxed{9\cdot 99}}_{891}\cdot 999\cdot\ldots\cdot\underbrace{99\ldots9}_{999\ chiffres\ 9}$$

$$= 891\cdot\left(10^3-1\right)\left(10^4-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(10^{98}-1\right)\left(10^{99}-1\right)$$

$$\equiv 891\cdot\underbrace{\boxed{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot(-1)}}_{97\ \text{facteurs}}\ \left(\text{mod}\,1000\right)$$

$$\equiv 891\cdot(-1)^{97}\ \left(\text{mod}\,1000\right)$$

$$\equiv -891\ \left(\text{mod}\,1000\right)$$

$$\equiv \boxed{109}\ \left(\text{mod}\,1000\right)$$

AIME 2010 1 Exercice 3

Supposons que $y=\frac{3}{4}x$ et $x^y=y^x$. La quantité $x+y$ peut s'exprimer comme un nombre rationnel $\frac{r}{s}$, où r et s sont des entiers positifs relativement premiers. Trouvez $r+s$.

Réponse

$$\left(\forall x,y\in\,]0;+\infty[\ \text{tel que } y=\tfrac{3}{4}x\right):$$

$$x^y=y^x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^y\right)=\ln\left(y^x\right)$$

$$\Leftrightarrow y\ln(x)=x\ln(y)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{3}{4}x\ln(x)=x\ln\left(\tfrac{3}{4}x\right)$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{3}{4}x\ln(x)=x\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)+x\ln(x)\qquad\Big|\div x$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{3}{4}\ln(x)=\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)+\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{4}\ln(x)=\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{256}{81}$$

$$y=\frac{3}{4}\cdot\frac{256}{81}=\frac{64}{27}$$

$$x+y=\frac{256}{81}+\frac{64}{27}=\frac{256+192}{81}=\frac{448}{81}=\frac{r}{s}$$

$$r+s=448+81=\boxed{529}$$

AIME 2010 1 Exercice 4

Jackie et Phil ont deux pièces de monnaie honnêtes et une troisième pièce de monnaie qui présente Face avec la probabilité $\frac{4}{7}$. Jackie lance les trois pièces de monnaie et ensuite Phil lance les trois pièces de monnaie. Soit $\frac{m}{n}$ la probabilité que Jackie obtienne le même nombre de Faces que Phil, où m et n sont des entiers positifs relativement premiers. Trouvez $m+n$.

Réponse

Supposons, sans restriction de la généralité, que la troisième pièce lancée est la pièce truquée, alors :

probabilité de ne pas obtenir de Face

$$= p(PPP) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{3}{7} = \tfrac{3}{28}$$

probabilité d'obtenir exactement une fois Face

$$= p(FPP) + p(PFP) + p(PPF) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{3}{7} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{3}{7} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{4}{7} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{7} + \tfrac{3}{7} + \tfrac{4}{7}\right) = \tfrac{5}{14}$$

probabilité d'obtenir exactement deux fois Face

$$= p(FFP) + p(FPF) + p(PFF) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{3}{7} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{4}{7} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{4}{7} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{7} + \tfrac{4}{7} + \tfrac{4}{7}\right) = \tfrac{11}{28}$$

probabilité d'obtenir trois fois de suite Face

$$= p(FFF) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{4}{7} = \tfrac{1}{7}$$

La probabilité cherchée vaut donc :

$$\begin{aligned}
& p \\
= \ & p\left[(0F \wedge 0F) \vee (1F \wedge 1F) \vee (2F \wedge 2F) \vee (3F \wedge 3F)\right] \\
= \ & \left(\tfrac{3}{28}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{14}\right)^2 + \left(\tfrac{11}{28}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{7}\right)^2 \\
= \ & \tfrac{3^2+10^2+11^2+4^2}{28^2} \\
= \ & \tfrac{246}{28^2} \\
= \ & \tfrac{2 \cdot 3 \cdot 41}{2^4 \cdot 7^2} \\
= \ & \tfrac{3 \cdot 41}{8 \cdot 49} \\
= \ & \tfrac{123}{392} = \tfrac{m}{n}
\end{aligned}$$

$$m + n = 123 + 392 = \boxed{515}$$

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 5}}$

Des entiers positifs *a*,*b*,*c* et *d* satisfont à :

$$a > b > c > d\,,\ \ a+b+c+d = 2010 \text{ et } a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2010.$$

Trouvez le nombre de valeurs possibles de *a*.

<u>Réponse</u>

$$\begin{aligned}
& a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - (a+b+c+d) = 2010 - 2010 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - a - b^2 - b + c^2 - c - d^2 - d = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a(a-1) - b(b+1) + c(c-1) - d(d+1) = 0
\end{aligned}$$

Comme *a*,*b*,*c* et *d* sont des entiers positifs vérifiant $a > b > c > d$, on a :

$a(a-1) \geq (b+1)b > 0$ et $c(c-1) \geq (d+1)d > 0$.

On en déduit que $a^2 - a - b^2 - b + c^2 - c - d^2 - d = 0 \Leftrightarrow a = b+1 \wedge c = d+1$.

D'où :

$$\begin{aligned}
& a+b+c+d = 2010 \\
\Leftrightarrow\ & a+a+1+c+c+1 = 2010 \\
\Leftrightarrow\ & 2a+2c+2 = 2010 \\
\Leftrightarrow\ & a+c = 1004
\end{aligned}$$

Comme $a > c+1$, la plus petite valeur possible pour a est 503 et la plus grande valeur possible est 1003. En tout, il y a donc : $1003 - 503 + 1 = \boxed{501}$ valeurs possibles pour a.

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 6}}$

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré à coefficients réels satisfaisant à

$$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$$

Pout tout nombre réel *x*, et soit $P(11) = 181$. Trouvez $P(16)$.

<u>Réponse</u>

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = 1\cdot(x-1)^2 + 1$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 2\left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = 2\cdot(x-1)^2 + 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ 1\cdot(x-1)^2 + 1 \leq P(x) \leq 2\cdot(x-1)^2 + 1 \Rightarrow P(x) = a(x-1)^2 + 1\ \ (1 \leq a \leq 2)$$

$$P(11) = 181 \Leftrightarrow a(11-1)^2 + 1 = 180 \Leftrightarrow 100a = 180 \Leftrightarrow a = \tfrac{180}{100} = \tfrac{9}{5}$$

$$P(16) = \tfrac{9}{5}(16-1)^2 + 1 = \tfrac{9}{5}\cdot 15^2 + 1 = \tfrac{9}{5}\cdot 225 + 1 = 9\cdot 45 + 1 = \boxed{406}$$

AIME 2010 1 Exercice 7

On définit qu'un triplet ordonné (A, B, C) d'ensembles est un triplet *à intersection minimale* si

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1 \text{ et } A \cap B \cap C = \varnothing .$$

Par exemple $(\{1,2\},\{2,3\},\{1,3,4\})$ est un triplet *à intersection minimale*. Soit N le nombre de triplets ordonnés d'ensembles *à intersection minimale* pour lesquels chaque ensemble est un sous-ensemble de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Trouvez le reste de la division de N par 1000.

Note : $|E|$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Réponse

Si le triplet ordonné (A, B, C) d'ensembles est un triplet *à intersection minimale*, alors :

$2 \le |A| \le 7 \wedge 2 \le |B| \le 7 \wedge 2 \le |C| \le 7 \wedge 3 \le |A \cup B \cup C| \le 7$.

Notons $n_i \ (i = 3,4,5,6,7)$ le nombre de triplets ordonnés (A, B, C) d'ensembles *à intersection minimale*, tel que $|A \cup B \cup C| = i$, alors :

$$n_i = \underbrace{\binom{7}{3}}_{\substack{\text{choix pour les}\\ \text{3 éléments deux}\\ \text{à deux communs aux}\\ \text{ensembles A, B et C}}} \cdot \underbrace{3!}_{\substack{\text{choix pour}\\ \text{ordonner ces}\\ \text{3 éléments}}} \cdot \underbrace{\binom{4}{i-3}}_{\substack{\text{choix pour le(s)}\\ \text{élément(s) restant(s)}\\ \text{à répartir parmi}\\ \text{A, B et C}}} \cdot \underbrace{3^{i-3}}_{\substack{\text{choix pour répartir}\\ \text{le(s) élément(s)}\\ \text{restant(s) parmi}\\ \text{A, B et C}}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& N \\
&= n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 \\
&= \binom{7}{3} \cdot 3! \cdot \left[\binom{4}{0} \cdot 3^0 + \binom{4}{1} \cdot 3^1 + \binom{4}{2} \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot 3^3 + \binom{4}{4} \cdot 3^4 \right] \\
&= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot [4 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 27 + 1 \cdot 81] \\
&= 210 \cdot 256 \\
&= 53760
\end{aligned}$$

Le reste de la division de N par 1000 vaut $\boxed{760}$.

Exemples d'illustration

a) avec 3 éléments : $(A, B, C) = (\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\})$; $(A, B, C) = (\{2,3\},\{1,2\},\{3,1\})$

b) avec 4 éléments : $(A, B, C) = (\{1,2,4\},\{2,3\},\{3,1\})$; $(A, B, C) = (\{3,1\},\{1,2\},\{2,3,6\})$

c) avec 5 éléments : $(A, B, C) = (\{1,2,4,5\},\{2,3\},\{3,1\})$; $(A, B, C) = (\{2,3,4\},\{1,2,5\},\{3,1\})$

d) avec 6 éléments : $(A, B, C) = (\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{3,1,6\})$; $(A, B, C) = (\{2,3,4,5,6\},\{1,2\},\{3,1\})$

e) avec 7 éléments : $(A, B, C) = (\{1,2,4,5\},\{2,3,6\},\{3,1,7\})$; $(A, B, C) = (\{2,3\},\{1,2,4,5,6\},\{3,1,7\})$

AIME 2010 1 Exercice 8

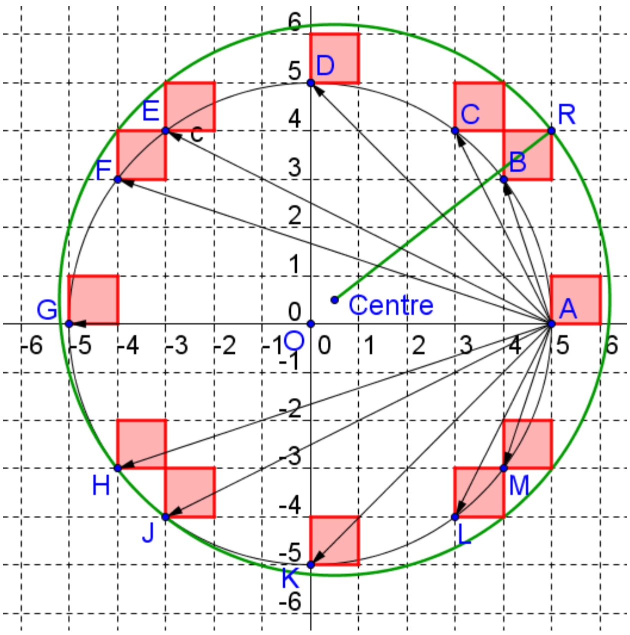
Pour un nombre réel a, notons $\lfloor a \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à a. Soit $\Re$ la région du plan de coordonnées qui est composée des points $M(x;y)$ tels que $\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 25$. La région $\Re$ est complètement contenue dans un disque de rayon r (un disque est l'union d'un cercle et de son intérieur). La valeur minimale de r peut s'écrire sous la forme $\frac{\sqrt{m}}{n}$, où m et n sont des entiers et m n'est divisible par le carré d'aucun entier. Trouvez $m+n$.

Réponse

Les seuls couples d'entiers (p,q) tels que $p^2+q^2=25$ sont :

$(5,0),(4,3),(3,4),(0,5),(-3,4),(-4,3),(-5,0),$
$(-4,-3),(-3,-4),(0,-5),(3,-4),(4,-3)$

On en déduit que $\Re$ est la région du plan formé par les 12 carrés rouges de la figure ci-dessous, chacun étant privé de son bord droit et de son bord supérieur. Le centre du cercle qui contient tous les points de $\Re$ a les coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et son **rayon** vaut :



$$\sqrt{\left(5-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{\sqrt{130}}{2}=\frac{\sqrt{m}}{n}$$

$m+n=130+2=\boxed{132}$

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 9}}$

Soit (a,b,c) une solution réelle du système d'équations

$$x^3 - xyz = 2$$
$$y^3 - xyz = 6$$
$$z^3 - xyz = 20$$

La plus grande valeur possible de $a^3 + b^3 + c^3$ peut s'écrire sous la forme $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers positifs relativement premiers. Trouvez $m + n$.

Réponse

$$x^3 - xyz = 2 \Leftrightarrow xyz = x^3 - 2 \quad (1)$$
$$y^3 - xyz = 6 \Leftrightarrow xyz = y^3 - 6 \quad (2)$$
$$z^3 - xyz = 20 \Leftrightarrow xyz = z^3 - 20 \; (3)$$
$$(1) \wedge (2) \; : \; x^3 - 2 = y^3 - 6 \Leftrightarrow y^3 = x^3 + 4$$
$$(1) \wedge (3) \; : \; x^3 - 2 = z^3 - 20 \Leftrightarrow z^3 = x^3 + 18$$
$$x^3 y^3 z^3 = (xyz)^3$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3 (x^3 + 4)(x^3 + 18) = (x^3 - 2)^3$$
$$\Leftrightarrow \quad (x^6 + 4x^3)(x^3 + 18) = x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8$$
$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x^9} + 18x^6 + 4x^6 + 72x^3 = \cancel{x^9} - 6x^6 + 12x^3 - 8$$
$$\Leftrightarrow \quad 28x^6 + 60x^3 + 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 7x^6 + 15x^3 + 2 = 0$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{x^3 = t} \quad 7t^2 + 15t + 2 = 0$$
$$\Delta = 15^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 225 - 56 = 169 = 13^2$$
$$t = x^3 = \frac{-15 - 13}{14} = -2 \vee t = x^3 = \frac{-15 + 13}{14} = \frac{-1}{7}$$

On obtient la plus grande valeur de $a^3 + b^3 + c^3$ si $a^3 = x^3 = -\frac{1}{7}$. Dans ce cas :

$$a^3 + b^3 + c^3 = -\tfrac{1}{7} + \left(-\tfrac{1}{7} + 4\right) + \left(-\tfrac{1}{7} + 18\right) = \tfrac{151}{7} = \tfrac{m}{n}$$
$$m + n = 151 + 7 = \boxed{158}$$

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 10}}$

Soit N le nombre de façons d'écrire 2010 sous la forme

$$2010 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

où les a_i sont des entiers et $0 \le a_i \le 99$. Un exemple d'une telle représentation est

$1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 67 \cdot 10 + 40 \cdot 10^0$. Trouvez N.

<u>Réponse</u>

Remarquons que $a_0 \in \{0,10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$.

$$\begin{aligned}
& 2010 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\
\Leftrightarrow\ & a_0 = 2010 - 1000a_3 - 100a_2 - 10a_1 && \big| \div 10 \\
\Leftrightarrow\ & r_0 = 201 - 100a_3 - 10a_2 - a_1 && \textit{où } r_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
\Leftrightarrow\ & 201 - r_0 = 100a_3 + 10a_2 + a_1 \quad (1)
\end{aligned}$$

D'après (1), $1 - r_0 \equiv a_1 \pmod{10} \Leftrightarrow r_0 + a_1 \equiv 1 \pmod{10}$ et on obtient pour $(r_0 ; a_1)$ les couples 100 couples suivants :

$$\underbrace{(0,1),(0,11),\ldots,(0,91)}_{10},\underbrace{(1,0),(1,10),\ldots,(1,90)}_{10},\underbrace{(2,9),(2,19),\ldots,(2,99)}_{10},\ldots,\underbrace{(9,2),(9,12),\ldots,(9,92)}_{10}$$

Si $(r_0 ; a_1) = (0,1)$ ou si $(r_0 ; a_1) = (1,0)$, on obtient les trois couples $(2,0),(1,10),(0,20)$ pour $(a_3 ; a_2)$.

Dans les autres cas, on obtient toujours deux couples pour le couple $(r_0 ; a_1)$ à savoir

$\left(1; \left\lfloor \dfrac{100 - a_1}{10} \right\rfloor\right)$ et $\left(0; \left\lfloor \dfrac{200 - a_1}{10} \right\rfloor\right)$.

<u>Exemples (à titre d'illustration) :</u>

a) $(r_0 ; a_1) = (2,39)$

$$199 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot \left\lfloor \frac{100 - 39}{10} \right\rfloor + 39 = 100 + 10 \cdot \lfloor 6{,}1 \rfloor + 39 = 100 + 10 \cdot 6 + 39$$

$$199 = 100 \cdot 0 + 10 \cdot \left\lfloor \frac{200 - 39}{10} \right\rfloor + 39 = 0 + 10 \cdot \lfloor 16{,}1 \rfloor + 39 = 10 \cdot 16 + 39$$

b) $(r_0 ; a_1) = (9,82)$

$$192 = 100 \cdot 1 + 10 \cdot \left\lfloor \frac{100 - 82}{10} \right\rfloor + 82 = 100 + 10 \cdot \lfloor 1{,}8 \rfloor + 82 = 100 + 10 \cdot 1 + 82$$

$$192 = 100 \cdot 0 + 10 \cdot \left\lfloor \frac{200 - 82}{10} \right\rfloor + 82 = 0 + 10 \cdot \lfloor 11{,}8 \rfloor + 82 = 10 \cdot 11 + 82$$

Finalement : $N = 2 \cdot 3 + 98 \cdot 2 = \boxed{202}$.

AIME 2010 1 Exercice 11

Soit $\Re$ la région comprenant l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormé, de coordonnées qui satisfont à la fois

$$|8-x|+y\le 10 \text{ et } 3y-x\ge 15.$$

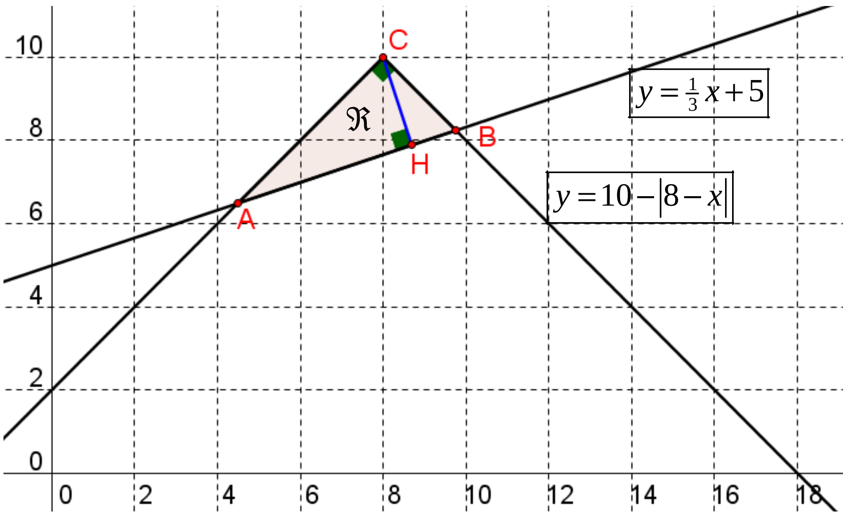
Le volume du solide résultant est $\frac{m\pi}{n\sqrt{p}}$, où m, n et p sont des entiers positifs, m et n sont relativement premiers et p n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier. Trouvez $m+n+p$.

Réponse

$$|8-x|+y\le 10 \Leftrightarrow y\le 10-|8-x| \Leftrightarrow y\le\begin{cases}10-(8-x) & si\ \ 8-x\ge 0\\ 10-(x-8) & si\ \ 8-x\le 0\end{cases} \Leftrightarrow y\le\begin{cases}x+2 & si\ \ x\le 8\\ -x+18 & si\ \ x\ge 8\end{cases}$$

$$3y-x\ge 15 \Leftrightarrow y\ge \tfrac{1}{3}x+5$$

Comme $|8-0|+0=8\le 10$ et $3\cdot 0-0=3\le 15$, $\Re$ est le triangle ABC délimité par les droites d'équations $y=x+2$, $y=-x+18$ et $y=\frac{1}{3}x+5$.



Coordonnées des points A, B et C :

$$x_A+2=\tfrac{1}{3}x_A+5 \Leftrightarrow x_A=\tfrac{9}{2} \text{ et } y_A=\tfrac{9}{2}+2=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{9}{2}+5=\tfrac{13}{2}$$
$$-x_B+18=\tfrac{1}{3}x_B+5 \Leftrightarrow x_B=\tfrac{39}{4} \text{ et } y_B=-\tfrac{39}{4}+18=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{39}{4}+5=\tfrac{33}{4}$$
$$x_C=8 \text{ et } y_C=10-|8-8|=10$$

Distance du point A au point B : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\left(\frac{39}{4}-\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{33}{4}-\frac{13}{2}\right)^2}=\frac{7\sqrt{10}}{4}$

Distance du point C à la droite (AB) : $CH=\dfrac{|-x_C+3y_C-15|}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\dfrac{|-8+3\cdot 10-15|}{\sqrt{10}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$

Le volume du solide engendré par la rotation du triangle ABC autour de la droite (AB) est la somme des volumes du cône de rayon CH et de hauteur AH et du cône de rayon CH et de hauteur BH,

d'où : $V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot CH^2\cdot(AH+BH)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)^2\cdot\frac{7\sqrt{10}}{4}=\frac{343\pi\sqrt{10}}{120}=\frac{343\pi}{12\sqrt{10}}=\frac{m\pi}{n\sqrt{p}}$

$$m+n+p=343+12+10=\boxed{365}$$

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 12}}$

Soit $m \geq 3$ un entier et soit $S = \{3, 4, 5, ..., m\}$. Trouvez la plus petite valeur de m telle que, pour chaque partition de S en deux sous-ensembles, au moins un des sous-ensembles contient des entiers *a*, *b* et *c* (non nécessairement distincts) tels que $ab = c$.

Note : une partition de *S* est une paire d'ensembles *A*, *B* tels que $A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$. (243)

Réponse : Notons $S = \{3, 4, 5, ..., m\}$ et $\mathcal{P}$ la propriété : « Pour chaque partition de *S* en deux sous-ensembles, au moins un des sous-ensembles contient des entiers *a*, *b* et *c* (non nécessairement distincts) tels que $ab = c$.

1) On remarque que $m \geq 9$, sinon on choisit par exemple la partition $A = \{3, 4, 5, ..., m-1\}$ et $B = \{m\}$ de *S*, qui ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$ puisque le plus petit produit dans le 1er sous-ensemble est 9 et $9 > m - 1$. On peut donc supposer $m \geq 9$ dans la suite.

2) On remarque alors que $m \geq 81$, sinon on choisit par exemple la partition $A = \{3, 4, 5, ..., 8\}$, $B = \{9, ..., m\}$, qui ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$ puisque le plus petit produit dans le 1er sous-ensemble est 9 et dans le 2e sous-ensemble 81. On peut donc supposer $m \geq 81$ dans la suite.

3) On remarque alors que $m \geq 243$, sinon on choisit par exemple la partition :
$$A = \left\{\begin{matrix} 3,4,5,6,7,8,10,11,13,14,17,19, \\ 81,108,135,144,162,180,189,192,198,207,216,225,234,240 \end{matrix}\right\} \cap S \text{ et}$$
$$B = \left(\{9,12,15,16,18,20,21,22,...,242\} \cap S\right)$$
$$\backslash\{81,108,135,144,162,180,189,192,198,207,216,225,234,240\}$$

4) $m = \boxed{243}$ est solution du problème. En effet, soit $T = \{3, 9, 27, 81, 243\}$ l'ensemble des puissances de 3 inférieures ou égales à 243. Il n'est pas possible de répartir les éléments de *T* dans deux sous-ensembles *A* et *B* formant une partition de *S* sans avoir la propriété $\mathcal{P}$ comme le montre le schéma ci-dessous.

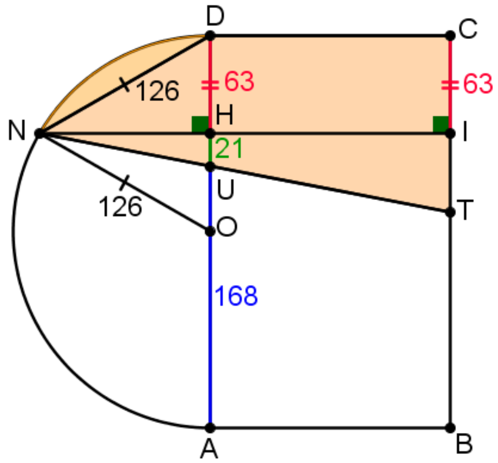
$\{3,9,27,81,243\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in B$	$\{3\} \subset A \wedge \{9,27,81,243\} \subset B$	$\underbrace{9 \cdot 9}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in B$
$\{9\} \subset A \wedge \{3,27,81,243\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 27}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in B$	$\{27\} \subset A \wedge \{9,27,81,243\} \subset B$	$\underbrace{9 \cdot 9}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in B$
$\{81\} \subset A \wedge \{3,9,27,243\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in B$	$\{243\} \subset A \wedge \{3,9,27,81\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in B$
$\{3,9\} \subset A \wedge \{27,81,243\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in A$	$\{3,27\} \subset A \wedge \{9,81,243\} \subset B$	$\underbrace{9 \cdot 9}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in B$
$\{3,81\} \subset A \wedge \{9,27,243\} \subset B$	$\underbrace{9 \cdot 27}_{a \cdot b} = \underbrace{243}_{c} \in B$	$\{3,243\} \subset A \wedge \{9,27,81\} \subset B$	$\underbrace{9 \cdot 9}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in B$
$\{9,27\} \subset A \wedge \{3,81,243\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 81}_{a \cdot b} = \underbrace{243}_{c} \in B$	$\{9,81\} \subset A \wedge \{3,27,243\} \subset B$	$\underbrace{9 \cdot 9}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in A$
$\{9,243\} \subset A \wedge \{3,27,81\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 27}_{a \cdot b} = \underbrace{81}_{c} \in B$	$\{27,81\} \subset A \wedge \{3,9,243\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in B$
$\{27,243\} \subset A \wedge \{3,9,81\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in B$	$\{81,243\} \subset A \wedge \{3,9,81\} \subset B$	$\underbrace{3 \cdot 3}_{a \cdot b} = \underbrace{9}_{c} \in B$

<u>Remarque</u> : il y a $2^5 = 32$ sous-ensembles distincts de l'ensemble $\{3, 9, 27, 81, 243\}$

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 13}}$

Le rectangle $ABCD$ et un demi-cercle de diamètre $[AD]$ sont coplanaires et leurs intersections ne se chevauchent pas. Soit $\Re$ la région enfermée par le demi-cercle et le rectangle. La droite d rencontre le demi-cercle, le segment $[AD]$ et le segment $[BC]$ aux points distincts N, U et T, respectivement. La droite d divise la région $\Re$ en deux régions dont les aires sont dans la proportion 1 : 2. Supposons que $DN = 126$, $DU = 84$ et $UA = 168$. Alors DC peut être représenté sous la forme $m\sqrt{n}$, où m et n sont des entiers positifs et n n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier. Trouvez $m+n$.

Réponse



$DA = DU + UA = 84 + 126 = 252$

Le rayon du demi-cercle vaut donc : $\frac{252}{2} = 126$

Soit O le milieu de $[AD]$, alors O est le centre du demi-cercle et le triangle DNO car il a trois côtés de même longueur. Posons $DC = x$.

Les triangles NUH et NTI sont semblables, donc :

$$\frac{NH}{NI} = \frac{HU}{IT} \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}126}{\frac{\sqrt{3}}{2}126 + x} = \frac{21}{IT} \Leftrightarrow \frac{63\sqrt{3}}{x + 63\sqrt{3}} = \frac{21}{IT} \Leftrightarrow IT = \frac{\sqrt{3}}{9}x + 21$$

$$aire(surface \;\; coloriée) = \tfrac{1}{3}\left(aire \;\; du \;\; demi-disque + [ABCD]\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi \cdot CB^2}{6} - \frac{OU \cdot NH}{2} + \frac{DU + CT}{2} DC = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi \cdot CB^2}{2} + AB \cdot DC\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi \cdot 126^2}{6} - \frac{42 \cdot 63\sqrt{3}}{2} + \frac{84 + \left(63 + \frac{\sqrt{3}}{9}x + 21\right)}{2} x = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 126^2}{2} + 252x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{\pi \cdot 126^2}{6}} - 3^3 \cdot 7^2 \sqrt{3} + \frac{168 + \frac{\sqrt{3}}{9}x}{2} x = \cancel{\frac{\pi \cdot 126^2}{2}} + 84x \qquad |\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \sqrt{3} + \cancel{168x} + \tfrac{\sqrt{3}}{9} x^2 = \cancel{168x}$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{\sqrt{3}}{9} x^2 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot 3^5 \cdot 7^2$$

$$\Leftrightarrow x = 3^2 \cdot 7 \cdot \sqrt{6} \qquad [car \;\; x > 0]$$

$$\Leftrightarrow x = 63\sqrt{6} = m\sqrt{n}$$

$$m + n = 63 + 6 = \boxed{069}$$

AIME 2010 1 Exercice 14

Pour tout entier positif *n*, soit $f(n) = \sum_{k=1}^{100} \lfloor \log_{10}(kn) \rfloor$.

Trouvez la plus grande valeur de *n* pour laquelle $f(n) \le 300$. (109)

Note : $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à *x*.

Réponse

$$1 \le x < 10 \iff 0 \le \log_{10}(x) < 1 \iff \lfloor \log_{10}(x) \rfloor = 0$$
$$10 \le x < 100 \iff 1 \le \log_{10}(x) < 2 \iff \lfloor \log_{10}(x) \rfloor = 1$$
$$100 \le x < 1000 \iff 2 \le \log_{10}(x) < 3 \iff \lfloor \log_{10}(x) \rfloor = 2$$
$$1000 \le x < 10000 \iff 3 \le \log_{10}(x) < 4 \iff \lfloor \log_{10}(x) \rfloor = 3$$

...

Par tâtonnement :

$$f(100) = \sum_{k=1}^{100} \lfloor \log_{10}(100k) \rfloor = 9 \cdot 2 + 90 \cdot 3 + 4 = 292$$

$9 \cdot 110 = 990 < 1000$ $\quad 10 \cdot 110 = 1100 > 1000$

$90 \cdot 110 = 9900 < 10000$ $\quad 91 \cdot 110 = 10010 > 10000$

$$f(110) = \sum_{k=1}^{100} \lfloor \log_{10}(110k) \rfloor = 9 \cdot 2 + 81 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 301$$

$9 \cdot 109 = 981 < 1000$ $\quad 10 \cdot 109 = 1090 > 1000$

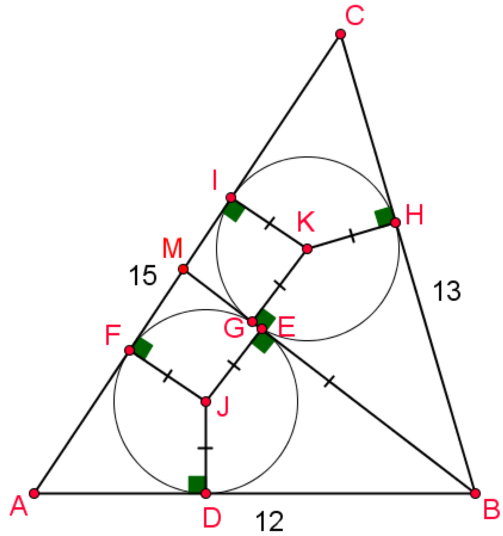
$91 \cdot 109 = 9919 < 10000$ $\quad 92 \cdot 110 = 10028 > 10000$

$$f(109) = \sum_{k=1}^{100} \lfloor \log_{10}(109k) \rfloor = 9 \cdot 2 + 82 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 300$$

$n = \boxed{109}$

$\boxed{\text{AIME 2010 1 Exercice 15}}$

Dans le triangle ABC où $AB=12$, $BC=13$ et $AC=15$, soit M un point sur le segment $[AC]$ tels que les cercles inscrits aux triangles ABM et BCM ont des rayons égaux. Soit p et q des entiers positifs relativement premiers tels que $\dfrac{AM}{CM}=\dfrac{p}{q}$. Trouvez $p+q$.



Réponse

Posons : $r = JD = JE = JF = KG = KH = KI$

$x = AM$; $CM = 15-x$; $BM = y$

Demi-périmètre du triangle ABC : $s = \frac{12+13+15}{2} = 20$

Demi-périmètre du triangle ABM : $s_1 = \frac{12+x+y}{2}$

Demi-périmètre du triangle BCM : $s_2 = \frac{13+(15-x)+y}{2} = \frac{28-x+y}{2}$

$[ABC] = \sqrt{20\cdot(20-12)\cdot(20-13)\cdot(20-15)} = 20\sqrt{14}$

$$\frac{[ABM]}{[BCM]} = \frac{AM}{CM} \Leftrightarrow \frac{s_1 \cancel{r}}{s_2 \cancel{r}} = \frac{x}{15-x} \Leftrightarrow \frac{12+x+y}{28-x+y} = \frac{x}{15-x} \Leftrightarrow y = \frac{180-25x}{2x-15} \quad (1)$$

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{12^2+15^2-13^2}{2\cdot 12\cdot 15} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{5}{9}$$

Théorème des cosinus dans le triangle ABM :

$$y^2 = x^2+12^2-2\cdot x\cdot 12\cos\left(\widehat{BAC}\right) \Leftrightarrow y^2 = x^2-\frac{40}{3}x+144 \quad (2)$$

D'après (1) et (2) :

$$\left(\frac{180-25x}{2x-15}\right)^2 = x^2-\frac{40}{3}x+144$$
$$\Leftrightarrow -4x^4+\tfrac{340}{3}x^3-976x^2+2640x=0$$
$$\Leftrightarrow -\tfrac{4}{3}x(x-15)(x-6)(3x-22)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=15 \vee x=6 \vee x=\tfrac{22}{3}$$

$x\neq 0$ et $x\neq 15$. Si $x=6$, alors $y=\frac{180-25\cdot 6}{2\cdot 6-15}=-10$, donc $x=\frac{22}{3}$ et $\dfrac{AM}{CM}=\dfrac{\frac{22}{3}}{15-\frac{22}{3}}=\dfrac{22}{23}=\dfrac{m}{n}$

$m+n=22+23=\boxed{045}$