OMB-MAXI-Demi-finale-2010

1) *Sans réponse préformulée* – Un carré a un périmètre de 120 cm ; quelle est son aire en cm^2 ?

Réponse :
$p = 4c \Leftrightarrow 120 = 4c \Leftrightarrow c = 30\,cm$; $A = c^2 = 30^2 = \boxed{900}\,cm^2$

---

2) *Sans réponse préformulée* – Quand on ajoute 7 au naturel non nul n, on obtient un nombre multiple de 7 ; quand on ajoute 8 à n, on obtient un nombre multiple de 8 ; quand on ajoute 9 à n, on obtient un nombre multiple de 9. Quelle est la plus petite valeur possible de n ?

Réponse :
$n+7 = 7p \Leftrightarrow n = 7(p-1)$ (1)
$n+8 = 8q \Leftrightarrow n = 8(q-1)$ (2)
$n+9 = 9r \Leftrightarrow n = 9(r-1)$ (3)
D'après (1), (2) et (3), on déduit que n est divisible par $7\cdot 8\cdot 9 = 504$ car 7, 8 et 9 sont premiers entre eux. Comme n est un entier naturel non nul, la plus petite valeur possible pour n est $\boxed{504}$.

---

3) Sur la droite joignant les points de coordonnées $(6;12)$ et $(0;-6)$ se trouve aussi le point de coordonnées :

A : $(-3;-8)$ B : $(-1;-4)$ C : $(2;\frac{1}{2})$ D : $(3;3)$ E : $(7;14)$

Réponse :
Pente de la droite d passant par les points de coordonnées $(6;12)$ et $(0;-6)$:
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6-12}{0-6} = 3$, d'où $d: y = 3x + p$
Ordonnée à l'origine de d : $-6 = 3\cdot 0 + p \Leftrightarrow p = -6$ et $\boxed{d: y = 3x-6}$
Comme $3\cdot 3 - 6 = 9 - 6 = 3$ le point de coordonnées $(3;3)$ appartient à $d \rightarrow \boxed{D}$

---

4) Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle. Quel est le rapport de la longueur d'un de ses côtés à celle de l'arc qu'il sous-tend ?

A : $\frac{3}{\pi}$ B : $\frac{6}{\pi}$ C : $\frac{3}{2\pi}$ D : $\frac{2}{3\pi}$ E : $\frac{1}{6}$

Réponse :
Soit r le rayon du cercle, alors un côté de l'hexagone vaut r et l'arc mesure $\frac{2\pi r}{6} = \frac{\pi r}{3}$.

Le rapport cherché vaut donc : $\frac{r}{\frac{\pi r}{3}} = \frac{3}{\pi} \rightarrow \boxed{A}$

---

5) *Sans réponse préformulée* **–** Un nombre de 6 chiffres de la forme $\overline{133ab5}$ est divisible par 7 et par 9. Quelle est la plus grande valeur possible pour le nombre $\overline{ab}$?

Réponse :

$9/\overline{133ab5} \Leftrightarrow 9/\left(1+3+3+a+b+5\right) \Leftrightarrow 9/\left(12+a+b\right) \Leftrightarrow a+b=6 \vee a+b=15$

Comme $\overline{133ab5} = 133\cdot 1000 + \overline{ab5} = 19\cdot 7\cdot 1000 + \overline{ab5}$, on conclut que $7/\overline{ab5}$.

$$a+b=6 \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b)=(6,0) \vee (a,b)=(5,1) \vee (a,b)=(4,2) \vee (a,b)=(3,3) \vee \\ (a,b)=(2,4) \vee (a,b)=(1,5) \vee (a,b)=(0,6) \end{cases}$$

$a+b=15 \Leftrightarrow (a,b)=(9,6) \vee (a,b)=(8,7) \vee (a,b)=(7,8) \vee (a,b)=(6,9)$

$7 \nmid 965$; $7/875$, donc la plus grande valeur de $\overline{ab}$ est $\boxed{87}$

---

6) Que vaut $\dfrac{x+y}{x-y}$ si $0<y<x$ et $x^2+y^2=6xy$?

A : $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ B : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C : $\sqrt{2}$ D : $2\sqrt{2}$ E : Une autre valeur

Réponse :

$\left(\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ t.q. \ \ 0<y<x\right)$:

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2=6xy \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2-4xy+2y^2=8xy \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(x-y\right)^2=\underbrace{\boxed{x^2+y^2}}_{6xy}+2xy \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(x-y\right)^2=\left(x+y\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=2 \qquad \left(car\ :\ x-y\neq 0\ \ puisque\ \ 0<y<x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{x+y}{x-y}\right|=\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x+y}{x-y}=\sqrt{2}\ \left(car\ :\ 0<y<x\right) \rightarrow \boxed{C}
\end{aligned}$$

---

7) *Sans réponse préformulée* – Je roule à vélomoteur, à vitesse constante, sur une route bordée de bornes kilométriques. Je viens de passer devant une borne indiquant un nombre de kilomètres à deux chiffres. Une heure plus tard, je passe devant une autre borne qui porte le deux mêmes chiffres dans l'ordre inverse. Encore une heure plus tard, je lis sur une troisième borne le deux mêmes chiffres que sur la première, dans le même ordre, mais avec un zéro intercalé. Quelle est ma vitesse, en *km/h* ?

Réponse :

Soit $\overline{ab} = 10a + b$ le nombre sur la première borne kilométrique, alors :

$$v = \frac{\text{distance parcourue (km/h)}}{\text{temps (h)}} = \overline{ba} - \overline{ab} = \overline{a0b} - \overline{ab}$$

$$\overline{ba} - \overline{ab} = 10b + a - (10a + b) = 9b - 9a$$

$$\overline{a0b} - \overline{ba} = 100a + b - (10b + a) = 99a - 9b$$

$$9b - 9a = 99a - 9b \Leftrightarrow 108a = 18b \Leftrightarrow b = 6a \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 6$$

$$v = \overline{ba} - \overline{ab} = 61 - 16 = \boxed{45}\ km/h$$

---

8) Arthur, Bernard et Claude sont soupçonnés d'un vol. L'enquête a établi que :

- Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables ;
- Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable ;
- Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable.

Qui a commis le vol ?

N.B. : Le « ou » n'est pas exclusif !

A : Arthur et Bertrand B : Arthur et lui seul C : Bernard et Claude
D : Claude et lui seul E : Les informations ne suffisent pas pour le déterminer

Réponse :

Notons X l'événement : « X est coupable », alors :

Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables s'écrit :

$\neg A \Rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow A \vee (B \wedge C)$

Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable s'écrit : $\neg A \vee B$

Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable s'écrit : $\neg B \vee \neg C \Leftrightarrow \neg(B \wedge C)$

Les trois propositions logiques permettent d'établir le tableau de vérité suivant :

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee B$	$\neg(B \wedge C)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

On conclut donc qu'Arthur et Bertrand ont commis le vol $\rightarrow \boxed{A}$

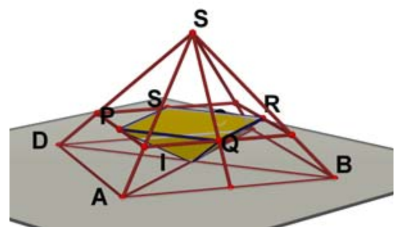
---

9) Les faces triangulaires d'une pyramide à base carrée sont équilatérales. Une seconde pyramide à base carrée a pour sommets les centres des faces de la première. Quel est le rapport du volume de la grande pyramide à celui de la petite ?

A : $\frac{27}{2}$ B : $\frac{27}{4}$ C : $\frac{9}{2}$ D : 27 E : 8

<u>Réponse :</u>

$$[PQRS]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot[ABCD]=\frac{2}{9}[ABCD]$$



La hauteur h de la petite pyramide (coloriée en jaune sur la figure ci-contre) de base le carré $PQRS$ et de sommet I vaut $\frac{1}{3}$ de la hauteur H de la grande pyramide de base le carré $ABCD$ et de sommet S .

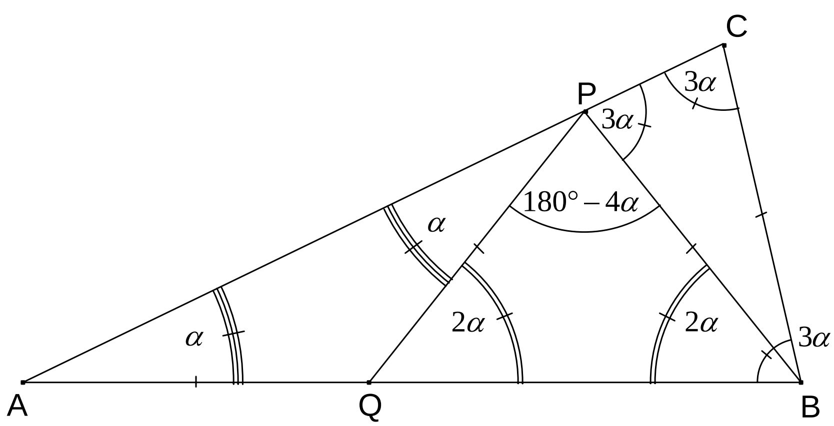
$$\frac{volume\ \ (grande\ \ pyramide)}{volume\ \ (petite\ \ pyramide)}=\frac{[ABCD]\cdot H}{[PQRS]\cdot h}=\frac{[ABCD]H}{\frac{2}{9}\cdot[ABCD]\cdot\frac{1}{3}\cdot H}=\frac{1}{\frac{2}{27}}=\frac{27}{2}\rightarrow\boxed{A}$$

---

10) Dans le triangle ABC, $AB=AC$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AC]$ et à $[AB]$ et sont tels que $BP=BC=PQ=QA$. Que vaut, en degrés, l'amplitude de $\widehat{BAC}$?

A : $\frac{360}{11}$ B : $\frac{180}{7}$ C : $\frac{51}{5}$ D : 36 E : 72

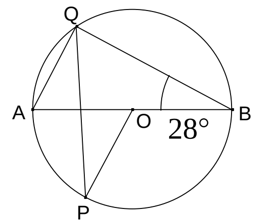
<u>Réponse :</u>



$$7\alpha=180°\Leftrightarrow\alpha=\frac{180}{7}°\rightarrow\boxed{B}$$

---

11) *Sans réponse préformulée* – Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{QPA}$, sachant que $\widehat{QBA} = 28°$ et que (QA) et (OP) sont parallèles ?



<u>Réponse</u> :

Le triangle ABQ est inscrit dans le demi-cercle de centre O, donc ABQ est rectangle en Q et $\widehat{BAQ} = 90° - 28° = 62°$.

$\widehat{BAQ} = \widehat{BPQ}$ (angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{BQ}$)

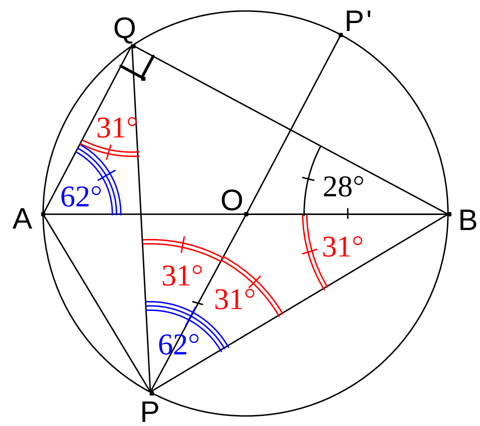
$\widehat{AQP} = \widehat{ABP}$ (angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AP}$)

$\widehat{AQP} = \widehat{OPQ}$ (angles alternes-internes)

$\widehat{ABP} = \widehat{BPO}$ (angles à la base du triangle OPB isocèle de sommet principal O)

Donc :

$\widehat{AQP} = \frac{1}{2}\left(\widehat{OPQ} + \widehat{BPO}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BPQ} = \frac{1}{2} \cdot 62° = \boxed{31°}$



---

12) Dans le triangle ABC, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Le cercle de diamètre $[AH]$ coupe (AB) en P et (AC) en Q. Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle APQ ?

A : $\dfrac{a^4}{b^2c^2}$ B : $\dfrac{a^2}{bc}$ C : $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}$ D : $\dfrac{1+bc}{1-bc}$ E : $\dfrac{1}{4}$

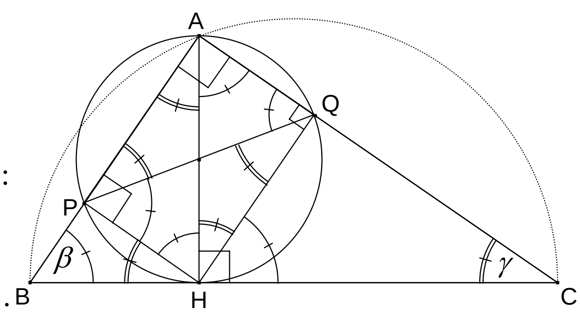
<u>Réponse :</u>

Posons $AH = h$, alors :

$$[ABC] = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2} \Leftrightarrow h = \frac{bc}{a}$$

Les triangles APQ et ACB sont semblables :

$$\frac{[ABC]}{[APQ]} = \left(\frac{AC}{AP}\right)^2 = \left(\frac{b}{AP}\right)^2 = \frac{b^2}{AP^2}$$



Les triangles APH et AHB sont semblables :

$$\frac{AP}{AH} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AP = \frac{AH^2}{AB} \Leftrightarrow AP = \frac{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}{c} \Leftrightarrow AP = \frac{b^2c}{a^2}$$

Donc : $\dfrac{[ABC]}{[APQ]} = \dfrac{b^2}{\left(\frac{b^2c}{a^2}\right)^2} = \dfrac{a^4}{b^2c^2} \to \boxed{A}$

---

13) Combien de couples (x,y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x}-\sqrt{17}=\sqrt{y}$?

A : 0 B : 1 C : 2 D : 17 E : Une infinité

Réponse :

$\sqrt{x}-\sqrt{17}=\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{17}$

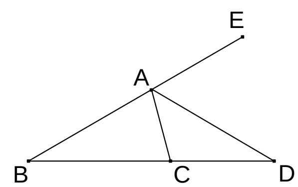
En posant $x=17(k+1)^2$ et $y=17k^2$ où $k\in\mathbb{N}$, on a :

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{17(k+1)^2}-\sqrt{17k^2}=(k+1)\sqrt{17}-k\sqrt{17}=\sqrt{17}$

Par conséquent il y a une infinité de couples (x,y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x}-\sqrt{17}=\sqrt{y} \rightarrow \boxed{E}$

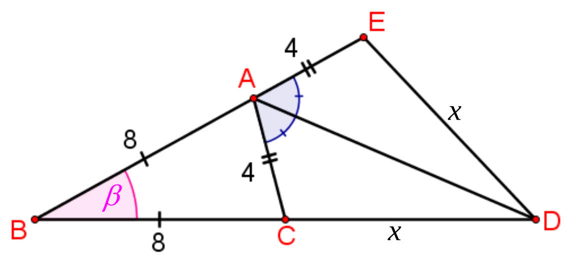
---

14) *Sans réponse préformulée* – Dans la figure (imprécise) ci-contre, $\widehat{EAD}=\widehat{CAD}$, $BA=BC=8$ et $AC=4$. Que vaut CD ?



Réponse :

Soit E le point de la demi-droite $[BA)$ n'appartenant pas $[AB]$ tel que $AE=4$, alors ACD et AED sont semblables.



Posons $CD=ED=x$

Théorème des cosinus dans le triangle BCA :

$4^2=8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\cos(\beta) \Leftrightarrow \cos(\beta)=\frac{7}{8}$

Théorème des cosinus dans le triangle BDE :

$x^2=(8+x)^2+12^2-2\cdot(8+x)\cdot 12\cos(\beta) \Leftrightarrow x^2=x^2-5x+40 \Leftrightarrow x=\boxed{8}$

---

15) Combien de réels existe-t-il dont les racines carrée et cubique sont égales ?

A : 0 B : 1 C : 2 D : 3 E : Une infinité

Réponse :

$(\forall x\in[0;+\infty[)\ :\ \sqrt{x}=\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^6=\left(\sqrt[3]{x}\right)^6 \Leftrightarrow x^3=x^2 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \rightarrow \boxed{C}$

---

16) Si a est un entier, $36^{\sqrt{9a^2}}=$

A : 6^{3a} B : $6^{3|a|}$ C : 36^{3a} D : $36^{|3a|}$ E : 6^{9a^2}

Réponse :

$(\forall a\in\mathbb{Z})\ :\ 36^{\sqrt{9a^2}}=36^{\sqrt{(3a)^2}}=36^{|3a|} \rightarrow \boxed{D}$

---

17) *Sans réponse préformulée* – Voici le début d'un tableau triangulaire de nombres, qui comporte 2010 lignes :

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ & \ldots & & \end{array}$$

Quelle est la somme des chiffres de la somme de tous les nombres de ce tableau ?

Réponse :

En numérotant les lignes de 1 à 2010, la somme des nombres des lignes portant un numéro pair est nulle et la somme des nombres des lignes portant un numéro impair est 1.

La somme des nombres de ce tableau vaut donc : $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{1005\ termes}=1005$

Et la somme des chiffres de 1005 vaut : $1+0+0+5=\boxed{6}$

---

18) $\left(\cos(15°)+\sin(15°)\right)^2-3\cos(15°)\sin(15°)=$

A : 0 B : $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ C : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D : $\dfrac{3}{4}$ E : 1

Réponse :

$$\begin{aligned} & \left(\cos(15°)+\sin(15°)\right)^2-3\cos(15°)\sin(15°) \\ = \ & \cos^2(15°)+2\cos(15°)\sin(15°)+\sin^2(15°)-3\cos(15°)\sin(15°) \\ = \ & 1-\cos(15°)\sin(15°) \\ = \ & 1-\tfrac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\cos(15°)\sin(15°)\right] \\ = \ & 1-\tfrac{1}{2}\cdot\left[\sin(2\cdot 15°)\right] \\ = \ & 1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} \\ = \ & \tfrac{3}{4}\to\boxed{D} \end{aligned}$$

---

19) *Sans réponse préformulée* – Quel est le coefficient de a^8b^2 dans le développement de $(a+b)^{10}$?

Réponse :

$$(a+b)^{10}=a^{10}+\binom{10}{1}a^9b+\binom{10}{2}a^8b^2+\ldots$$

$$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{10\cdot 9}{2}=\boxed{45}$$

---

20) *Sans réponse préformulée* – Que vaut x si $\sqrt[6]{8}+\sqrt[3]{x}=\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$?

Réponse :

$$\sqrt[6]{8}+\sqrt[3]{x}=\frac{7}{3-\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}+\sqrt[3]{x}=\frac{7\left(3+\sqrt{2}\right)}{7} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=3 \Leftrightarrow x=\boxed{27}$$

---

21) Les cinq expressions

$$2a+9,\ 3a+10,\ 4a+11,\ 5a+12 \text{ et } 6a+13$$

dépendent de la variable a. L'une des affirmations suivantes est vraie. Laquelle ?
A : Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont paires.
B : Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont impaires.
C : Quel que soit le naturel a , les cinq expressions sont paires
D : Quel que soit le naturel a , les cinq expressions sont impaires
E : Il existe un naturel a pour lequel les cinq expressions sont multiples de 5.

Réponse :

Si a est impair, alors $2a+9$, $3a+10$, $4a+11$, $5a+12$ et $6a+13$ sont impairs $\to \boxed{B}$

---

22) Pour combien de naturels n l'expression n^4+n^2+1 est-elle un nombre premier ?

A : 1 B : 2 C : 3 D : 5 E : Une infinité

Réponse :

Si $n=0$ alors $n^4+n^2+1=1$ et 1 n'est pas premier.
Si $n=1$ alors $n^4+n^2+1=3$ et 3 n'est pas premier.
$\left(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\right)$: $n^4+n^2+1=\left(n^2\right)^2+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=\underbrace{\boxed{\left(n^2+n+1\right)}}_{>1}\underbrace{\boxed{\left(n^2-n+1\right)}}_{>1}$

Le seul entier naturel pour lequel n^4+n^2+1 est donc $1\to\boxed{A}$

---

23) *Sans réponse préformulée* – Pour combien de valeurs entières de n, la fraction $\dfrac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}$ est-elle entière ?

Réponse :

$$\left(\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1\}\right) : \frac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}=\frac{\overset{1}{\cancel{(n+2)}}(n+3)}{(n+1)\underset{1}{\cancel{(n+2)}}}=\frac{n+3}{n+1}=\frac{n+1+2}{n+1}=1+\frac{2}{n+1}$$

$\left(\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1\}\right)$, $\dfrac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}$ est donc entier si et seulement si $\dfrac{2}{n+1}$ l'est.

$$n+1=-2\vee n+1=-1\vee n+1=1\vee n+1=2 \Leftrightarrow n=-3\vee \underbrace{\boxed{n=-2}}_{\text{à exclure}}\vee n=0\vee n=1\to\boxed{3}$$

---

24) Soit $k \neq 0$. La fonction $x \mapsto 5\sin(kx) - 3\cos(kx)$

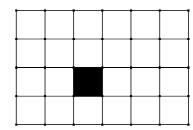
A : est périodique de période $\frac{k\pi}{2}$; B : est périodique de période $\frac{2\pi}{k}$;
C : est périodique de période $k\pi$; D : est périodique de période $\frac{2}{k\pi}$;
E : n'est pas périodique.

Réponse :

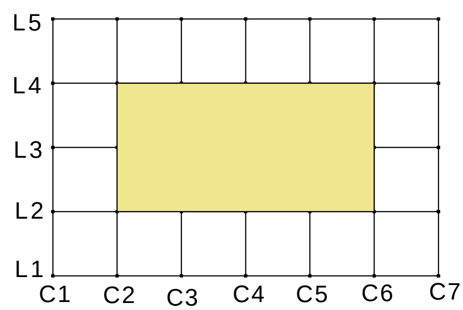
$$5\sin\left[k\left(x+\tfrac{2\pi}{k}\right)\right] - 3\cos\left[k\left(x+\tfrac{2\pi}{k}\right)\right]$$
$$= 5\sin(kx+2\pi) - 3\cos(kx+2\pi)$$
$$= 5\sin(kx) - 3\cos(kx) \to \boxed{B}$$

---

25) *Sans réponse préformulée* – Combien de rectangles contenant la case noire y a-t-il dans la figure ci-contre ?

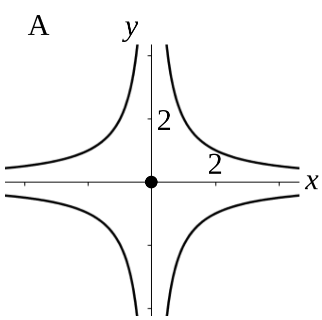


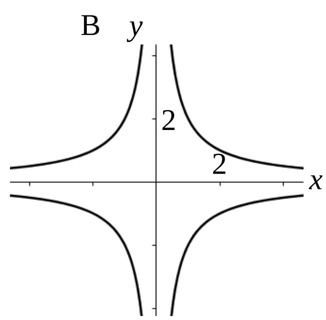
Réponse :
Choisir un rectangle contentant le petit carré noir revient à choisir 1 ligne parmi les lignes L1 et L2, une ligne parmi les lignes L3, L4 et L5, une colonne parmi les colonnes C1, C2 et C3 et une colonne parmi les colonnes C4, C5, C6 et C7. Il y a donc en tout :
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{72}$ rectangles contenant le petit carré noir.
Remarque :
Le rectangle colorié sur la figure correspond au choix L2L3C2C6.

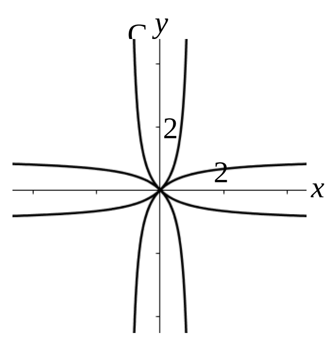


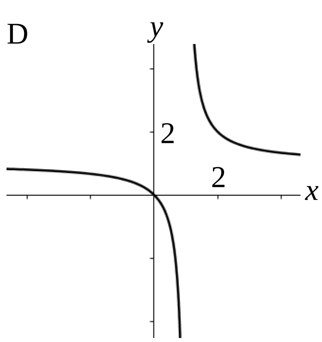
---

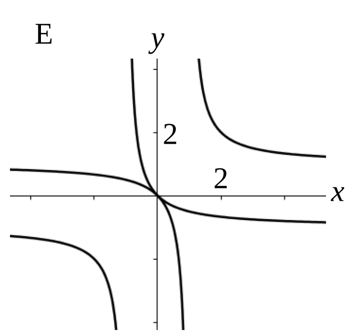
26) L'un des diagrammes suivants représente l'ensemble des solutions de l'équation $|x+y| = |xy|$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Lequel ?

A


B


C


D


E


Réponse :

$\left(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ :\ |x+y|=|xy| \Leftrightarrow x+y=xy \vee x+y=-xy \Leftrightarrow \left(y=\frac{x}{x-1}\wedge x\neq 1\right)\vee\left(y=\frac{-x}{x+1}\wedge x\neq -1\right)$

Posons $\left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\right)\ :\ f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1\ ;\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right)\ :\ g(x)=\frac{-x}{x+1}=\frac{1}{x-1}+1$

Si $x=1$, alors $|1+y|=|y| \Leftrightarrow 1+y=y \vee 1+y=-y \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{1=0}}_{impossible} \vee y=-\frac{1}{2}$ et $A\left(1;-\frac{1}{2}\right)\in C_g$

Si $x=-1$, alors $|-1+y|=|-y| \Leftrightarrow -1+y=-y \vee -1+y=y \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\vee \underbrace{\boxed{1=0}}_{impossible}$ et $B\left(-1;\frac{1}{2}\right)\in C_f$

On obtient les graphes des fonctions *f* et *g* en manipulant le graphe de $x\mapsto \tilde{f}(x)=\frac{1}{x}$

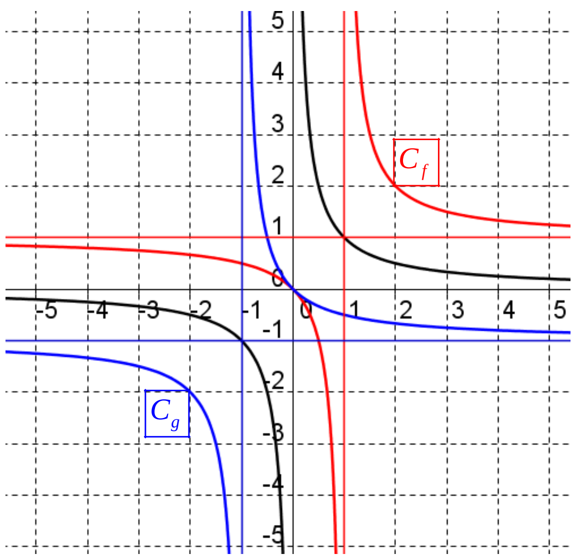
$$C_{\tilde{f}} \underset{t_{\vec{h}(1;0)}}{\longrightarrow} C_{\tilde{f}_1} \underset{t_{\vec{v}(0;1)}}{\longrightarrow} C_f$$

$$\frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{x-1} \mapsto \frac{1}{x-1}+1=f(x)$$

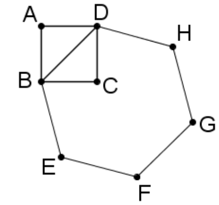
$$C_{\tilde{f}} \underset{t_{\vec{h}(-1;0)}}{\longrightarrow} C_{\tilde{g}_1} \underset{t_{\vec{v}(0;-1)}}{\longrightarrow} C_g$$

$$\frac{1}{x} \mapsto \frac{1}{x+1} \mapsto \frac{1}{x+1}-1=g(x)$$

La bonne réponse est donc la réponse $\boxed{E}$.



27) Dans la figure ci-contre, l'aire du carré $ABCD$ est d'un centimètre carré et l'hexagone $BEFGHD$ est régulier. Quelle est, en centimètres carrés, l'aire du quadrilatère $BCHD$?



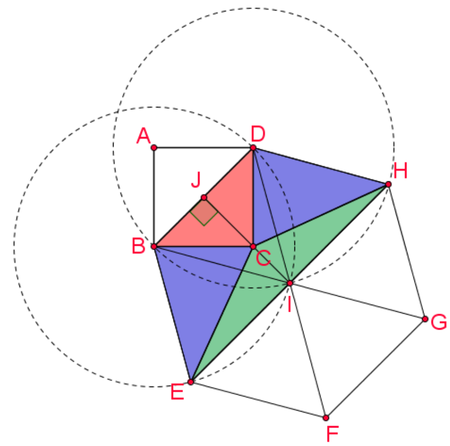
A : $\frac{5}{4}$ B : $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ C : $\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2}$ D : $\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{3}$ E : $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

Réponse :

$$[ABCD]=1 \Rightarrow AB=BC=CD=DA=1$$

$$[BCD]=\tfrac{1}{2}$$

$$EB=BD=DH=\sqrt{2}$$



$$[DCH]$$

$$=\frac{[EHDB]-[BCD]-[EHC]}{2}$$

$$=\frac{\frac{EH+BD}{2}JI-\frac{1}{2}-\frac{EH\cdot CI}{2}}{2} \qquad \left[EH=2BD=2\sqrt{2}\right]$$

$$=\frac{\frac{3BD}{2}JI-BD\cdot(JI-JC)-\frac{1}{2}}{2} \qquad \left[JI=\tfrac{\sqrt{3}}{2}BD=\tfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}}{2}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$[BCHD]=[BCD]+[DCH]=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1+\sqrt{3}}{4}=\tfrac{3+\sqrt{3}}{4}\rightarrow \boxed{E}$$

---

28) Soit a,b et c trois réels non nuls. Si p et q sont les racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$, d'inconnue réelle x, quelle est la valeur de $\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}$?

A : $\dfrac{1}{b^2-4ac}$ B : $\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ C : $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$ D : $\dfrac{b^2-4ac}{c^2}$ E : b^2-4ac

Réponse :

$$ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q) \Leftrightarrow ax^2+bx+c=ax^2-a(p+q)x+apq$$

$$b=-a(p+q)\wedge c=apq \Leftrightarrow p+q=\frac{-b}{a}\wedge pq=\frac{c}{a}$$

$$p=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\ q=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}=\frac{p^2+q^2}{p^2q^2}=\frac{(p+q)^2-2pq}{(pq)^2}=\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\cdot a^2}{\frac{c^2}{a^2}\cdot a^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}\rightarrow \boxed{C}$$

---

29) Quel est le nombre de solutions de l'équation $3\cdot 2^m+3=n^2$, d'inconnue $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$?

A : 0 B : 1 C : 2 D : Un nombre fini>2 E : Une infinité

Réponse :

$m<0\Rightarrow 3\cdot 2^m+1\notin\mathbb{Z}$

$3\cdot 2^0+3=6\neq n^2$

$3\cdot 2^1+3=9=3^2=(-3)^2$

$3\cdot 2^2+3=15\neq n^2$

$3\cdot 2^m+3=n^2\Leftrightarrow 3\left(2^m+1\right)=n^2\Rightarrow 3/n$

posons : $n=3p$

$3\left(2^m+1\right)=(3p)^2\Leftrightarrow 2^m+1=3p^2$

$m\geq 3\Rightarrow 2^m+1\equiv 1 \pmod 8$

$p^2\equiv 0,1,4 \pmod 8\Rightarrow 3p^2\equiv 0,3,4 \pmod 8$

Si $m\geq 3$, il n'y a pas de solutions car $2^m+1\not\equiv 3p^2 \pmod 8$ et les seuls couples solutions sont $(1,3)$; $(1,-3)\rightarrow \boxed{C}$

---

30) *Sans réponse préformulée* – Soit ABC un triangle non dégénéré. On choisit trois points distincts A_1,A_2,A_3 sur $]BC[$, 5 points distincts B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 sur $]AC[$, et 7 points distincts $C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7$ sur $]AB[$. Combien de triangles non dégénérés ont leurs trois sommets dans $\{A,A_1\ A_2\ A_3,B,B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,C,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7\}$?

Réponse :

Nombre total de triangles (triangles dégénérés compris) : $\binom{18}{3}=\frac{18\cdot 17\cdot 16}{32}=3\cdot 17\cdot 16=816$

Un triangle est dégénéré, si ses 3 sommets appartiennent à 1 côté du triangle.
Nombre de triangles dégénérés :

$$\binom{5}{3}+\binom{7}{3}+\binom{9}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}+\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=10+35+84=129$$

Nombre de triangles non dégénérés : $816-129=\boxed{687}$
