OMB-MIDI-Demi-finale-2010

1) La courbe d'équation $y = x^2$

A : N'admet que *Ox* comme axe de symétrie ;

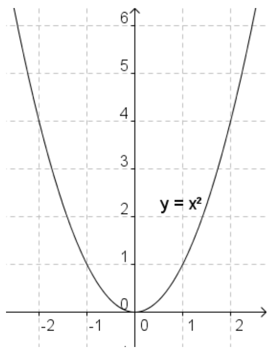
B : N'admet que *Oy* comme axe de symétrie ;

C : Admet les deux axes de coordonnées comme axe de symétrie ;

D : N'admet aucun axe de symétrie ;

E :Admet l'origine *O* comme centre de symétrie.

Réponse :



$\rightarrow \boxed{B}$

---

2) *Sans réponse préformulée* – Quand on ajoute 7 au naturel non nul *n*, on obtient un nombre multiple de 7 ; quand on ajoute 8 à *n*, on obtient un nombre multiple de 8 ; quand on ajoute 9 à *n*, on obtient un nombre multiple de 9. Quelle est la plus petite valeur possible de *n* ?

Réponse :

$n+7=7p \Leftrightarrow n=7(p-1) \quad (1)$

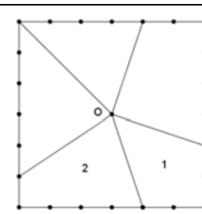
$n+8=8q \Leftrightarrow n=8(q-1) \quad (2)$

$n+9=9r \Leftrightarrow n=9(r-1) \quad (3)$

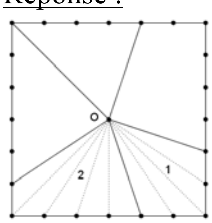
D'après (1), (2) et (3), on déduit que n est divisible par $7\cdot 8\cdot 9=504$ car 7, 8 et 9 sont premiers entre eux. Comme *n* est un entier naturel non nul, la plus petite valeur possible pour *n* est $\boxed{504}$.

---

3) *Sans réponse préformulée* – Dans la figure ci-contre, les côtés du carré sont subdivisés en 6 parties égales et *O* est le centre du carré. Si l'aire de la zone 1 est de 600 cm^2, quelle est, en centimètres carrés, celle de la zone 2 ?



Réponse :



Chacune des deux zones est formée de triangles (zone 1 : 4 triangles, zone 2 : 5 triangles) ayant la même aire (même base, même hauteur)

D'où l'aire de la zone 2 : $\frac{600}{4}\cdot 5 = \boxed{750}$ cm^2.

---

4) Sur la droite joignant les points de coordonnées $(6;12)$ et $(0;-6)$ se trouve aussi le point de coordonnées :

A : $(-3;-8)$ B : $(-1;-4)$ C : $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ D : $(3;3)$ E : $(7;14)$

Réponse :

Pente de la droite *d* passant par les points de coordonnées $(6;12)$ et $(0;-6)$:

$m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-6-12}{0-6}=3$, d'où $d: y=3x+p$

Ordonnée à l'origine de *d* : $-6=3\cdot 0+p \Leftrightarrow p=-6$ et $\boxed{d: y=3x-6}$

Comme $3\cdot 3-6=9-6=3$ le point de coordonnées $(3;3)$ appartient à $d \rightarrow \boxed{D}$

---

5) Parmi les cinq équations suivantes, d'inconnue entière *x*, combien admettent exactement une solution : $x = 1$; $x^2 =1$; $x^3 = 1$; $x^3 = x$; $x^3 = x^2$?

A : 1 B : 2 C : 3 D : 4 E : 5

Réponse :

$x = 1$ admet **une** solution entière : $x = 1$

$x^2 = 1$ admet deux solutions entière : $x = -1$ ou $x = 1$

$x^3 = 1$ admet **une** solution entière : $x = 1$

$x^3 = x$ admet trois solutions entières : $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$

$x^3 = x^2$ admet deux solutions entières : $x = 0$ ou $x = 1$ $\rightarrow \boxed{B}$

---

6) La négation logique de la proposition ***« Si j'améliore mes points de maths, alors mes parents me féliciteront »*** est :

A : « *Si j'améliore mes points de maths, alors mes parents ne me féliciteront pas.* »

B : « *Si ne n'améliore pas mes points de maths, alors mes parents ne me féliciteront pas.* »

C : « *Si ne n'améliore pas mes points de maths, alors mes parents me féliciteront.* »

D : « *J'améliore mes points de maths et mes parents ne me féliciteront pas.* »

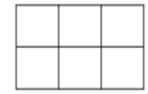
E : « *Je n'améliore pas mes points de maths et mes parents ne me féliciteront pas.* »

Réponse

La proposition ***« Si j'améliore mes points de maths, alors mes parents me féliciteront »*** est une implication de la forme $P \Rightarrow Q$ où *P* est la proposition « *J'améliore mes points de maths.* » et *Q* la proposition « *Mes parents me féliciteront.* ». Comme $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ la négation est $\neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ c'est-à-dire : « *J'améliore mes points de maths et mes parents ne me féliciteront pas.* » $\rightarrow \boxed{D}$

---

7) La grille 3 x 2 ci-contre compte 12 sommets. Notons $n(x, y)$ le nombre de sommets d'une grille x x y. L'une des affirmations suivantes est correcte quels que soient les naturels x et y. Laquelle ?



A : $n(x, 3y) = 3n(x, y)$
B : $n(3x, 3y) = 3n(x, y)$
C : $n(3x, 3y) = 6n(x, y)$
D : $n(3x, 3y) = 9n(x, y)$
E : $n(3x, 3y) < 9n(x, y)$

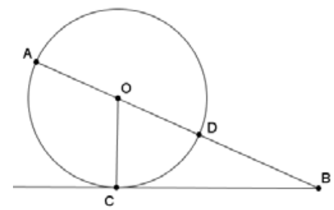
Réponse :

$$n(x,y)=(x+1)(y+1)$$

$$n(3x,3y)=(3x+1)(3y+1)<(3x+3)(3y+3)=3(x+1)\cdot 3(y+1)=9(x+1)(y+1)=9n(x,y)\rightarrow \boxed{E}$$

---

8) *Sans réponse préformulée* – Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle, la droite (BC) est tangente à ce dernier et $\widehat{CBD}=36°$? Quelle est la mesure (principale) de l'angle $\widehat{DOC}$?



Réponse :

$\widehat{DOC}=90°-36°=\boxed{54}°$, car la tangente (BC) est perpendiculaire au rayon $[OC]$ du cercle.

---

9) *Sans réponse préformulée* – Pour mesurer la hauteur d'un arbre vertical, Mathieu plante verticalement un bâton qui dépasse du sol de 75 *cm*. L'ombre du bâton mesure 1 *m* et celle de l'arbre 6,6 *m*. Quelle est, en centimètres, la hauteur de l'arbre ?

Réponse :

La hauteur des objets et la longueur de leurs ombres sont proportionnelles (Théorème de Thalès). Soit h la hauteur de l'arbre.

$$\frac{h}{75}=\frac{6{,}6}{1}\Leftrightarrow h=6{,}6\cdot 75\Leftrightarrow h=\boxed{495}\ (cm)$$

---

10) *Sans réponse préformulée* – Un test de 30 questions est coté de la manière suivante : une bonne réponse rapporte 7 points, une abstention vaut 0 et une mauvaise réponse coûte 3 points. Un élève qui a répondu à toutes les questions, obtient un total de 0. Quel est le nombre de ses bonnes réponses ?

Réponse :

Soit b le nombre de bonnes réponses.

$$7b-3\cdot(30-b)=0\Leftrightarrow 7b-90+3b=0\Leftrightarrow 10b=90\Leftrightarrow b=\boxed{9}$$

---

11) Un hexagone régulier est inscrit dans un cercle. Quel est le rapport de la longueur d'un de ses côtés à celle de l'arc qu'il sous-tend ?

A : $\frac{3}{\pi}$ B : $\frac{6}{\pi}$ C : $\frac{3}{2\pi}$ D : $\frac{2}{3\pi}$ E : $\frac{1}{6}$

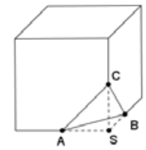
Réponse :

Soit r le rayon du cercle, alors un côté de l'hexagone vaut r et l'arc mesure $\frac{2\pi r}{6}=\frac{\pi r}{3}$.

Le rapport cherché vaut donc : $\frac{r}{\frac{\pi r}{3}}=\frac{3}{\pi}\rightarrow \boxed{A}$

---

12) Le cube ci-contre a été « amputée » de la pyramide *SABC*.
L'arête du cube mesure 6 *cm* et les points *A*, *B* et *C* sont les milieux d'arêtes.
Quel est le volume du solide restant ?



A : 31,5 cm^3 B : 202,5 cm^3 C : 211,5 cm^3 D : 216 cm^3 E : 220,5 cm^3

Réponse :

Volume de la pyramide *SABC* : $\frac{1}{3}\cdot Base \cdot hauteur = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2}\cdot 3 = 4,5\,(cm^3)$

Volume du solide restant : $6^3 - 4,5 = 216 - 4,5 = 211,5\,(cm^3) \rightarrow \boxed{C}$

---

13) *Sans réponse préformulée* – Pour combien d'entiers *n* la fraction $\frac{n+3}{n-1}$ est-elle un entier ?

Réponse :

$\frac{n+3}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1}$; donc: $\frac{n+3}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \{-3;-1;0;2;3;5\}$

Pour $\boxed{6}$ entiers *n*, la fraction $\frac{n+3}{n-1}$ est un entier.

---

14) Que vaut $\frac{x+y}{x-y}$ si $0 < y < x$ et $x^2 + y^2 = 6xy$?

A : $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ B : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C : $\sqrt{2}$ D : $2\sqrt{2}$ E : Une autre valeur

Réponse :

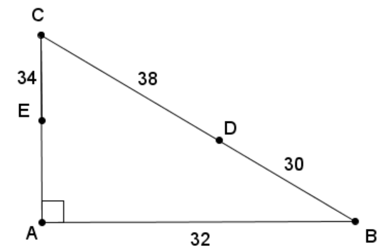
$(\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ t.q.\ \ 0 < y < x)$:

$$x^2 + y^2 = 6xy$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 8xy$$
$$\Leftrightarrow 2(x-y)^2 = \underbrace{\boxed{x^2 + y^2}}_{6xy} + 2xy$$
$$\Leftrightarrow 2(x-y)^2 = (x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 2 \qquad (car\ :\ x - y \neq 0\ \ puisque\ \ 0 < y < x)$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{x+y}{x-y}\right| = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{2}\ (car\ :\ 0 < y < x) \rightarrow \boxed{C}$$

---

15) Le triangle ABC est rectangle en A. Le point D se trouve sur l'hypoténuse, $DB = 30$ et $DC = 38$. Le point E se trouve sur $[AC]$ et $CE = 34$. Sachant que $AB = 32$, calculer AE.

A : 24 B : 25 C : 26 D : 27 E : 28



Réponse :

Théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (30+38)^2 = 32^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 3600$$

Donc : $AC = 60$ et $AE = AC - CE = 60 - 34 = 26 \rightarrow \boxed{C}$

---

16) *Sans réponse préformulée* – Je roule à vélomoteur, à vitesse constante, sur une route bordée de bornes kilométriques. Je viens de passer devant une borne indiquant un nombre de kilomètres à deux chiffres. Une heure plus tard, je passe devant une autre borne qui porte le deux mêmes chiffres dans l'ordre inverse. Encore une heure plus tard, je lis sur une troisième borne le deux mêmes chiffres que sur la première, dans le même ordre, mais avec un zéro intercalé. Quelle est ma vitesse, en *km/h* ?

Réponse :

Soit $\overline{ab} = 10a + b$ le nombre sur la première borne kilométrique, alors :

$$v = \frac{\text{distance parcourue (km/h)}}{\text{temps (h)}} = \overline{ba} - \overline{ab} = \overline{a0b} - \overline{ab}$$

$$\overline{ba} - \overline{ab} = 10b + a - (10a + b) = 9b - 9a$$

$$\overline{a0b} - \overline{ba} = 100a + b - (10b + a) = 99a - 9b$$

$$9b - 9a = 99a - 9b \Leftrightarrow 108a = 18b \Leftrightarrow b = 6a \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 6$$

$$v = \overline{ba} - \overline{ab} = 61 - 16 = \boxed{45}\ km/h$$

---

17) Le nombre $\underbrace{121212...12}_{2010\ chiffres}$ *n*'est *pas* divisible par

A : 2 B : 12 C : 18 D : 24 E : 36

Réponse :

Le nombre de centaines vaut 212 qui n'est pas divisible par 8.

$\underbrace{121212...12}_{2010\ chiffres}$ n'est pas divisible par 8 et ainsi $\underbrace{121212...12}_{2010\ chiffres}$ n'est pas divisible par 24. $\rightarrow \boxed{D}$

---

18) Arthur, Bernard et Claude sont soupçonnés d'un vol. L'enquête a établi que :

- Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables ;
- Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable ;
- Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable.

Qui a commis le vol ?

N.B. : Le « ou » n'est pas exclusif !

A : Arthur et Bertrand B : Arthur et lui seul C : Bernard et Claude
D : Claude et lui seul E : Les informations ne suffisent pas pour le déterminer

Réponse :

Notons X l'événement : « X est coupable », alors :

Si Arthur n'est pas coupable, alors Bernard et Claude sont tous deux coupables s'écrit :

$\neg A \Rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow A \vee (B \wedge C)$

Arthur n'est pas coupable ou Bernard est coupable s'écrit : $\neg A \vee B$

Bernard n'est pas coupable ou Claude n'est pas coupable s'écrit : $\neg B \vee \neg C \Leftrightarrow \neg(B \wedge C)$

Les trois propositions logiques permettent d'établir le tableau de vérité suivant :

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$\neg A \vee B$	$\neg(B \wedge C)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

On conclut donc qu'Arthur et Bertrand ont commis le vol $\rightarrow \boxed{A}$

---

19) Des collègues dînent ensemble pour fêter le départ à la retraite de deux d'entre eux. Le prix total du repas est de 400 €. Les deux retraités étant invités, chacun des autres paye 10 € de plus que si tous avaient payé. Quel est le nombre total de convives ?

A : 140 B : 40 C : 12 D : 10 E : 8

Réponse :

Soit n le nombre total de convives.

$\frac{400}{n-2} = \frac{400}{n} + 10 \Leftrightarrow 400n = 400(n-2) + 10n(n-2) \Leftrightarrow n^2 - 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow n = 10 \vee \underbrace{n = -8}_{\grave{a}\ rejeter} \rightarrow \boxed{D}$

---

21) $2015^2 - 2 \cdot 2010^2 + 2005^2 =$

A : 0 B : 10 C : 50 D : 250 E : 350

Réponse :

$$
\begin{aligned}
& 2015^2 - 2 \cdot 2010^2 + 2005^2 \\
= {} & (2005+10)^2 - 2 \cdot (2005+5)^2 + 2005^2 \\
= {} & 2005^2 + 20 \cdot 2005 + 10^2 - 2 \cdot \left(2005^2 + 10 \cdot 2005 + 5^2\right) + 2005^2 \\
= {} & 2005^2 + 20 \cdot 2005 + 10^2 - 2 \cdot 2005^2 - 20 \cdot 2005 - 50 + 2005^2 \\
= {} & 100 - 50 \\
= {} & 50 \rightarrow \boxed{C}
\end{aligned}
$$

---

22) Lequel des polynômes suivants *ne* divise *pas* $x^7 - x$?

A : $x^4 + x$ B : $x^3 - 1$ C : $x^2 - 1$ D : $x^2 + x + 1$ E : $x^4 + 1$

Réponse :

$x^7 - x = x\left(x^6 - 1\right) = x\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x\left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$

Donc:

$x^7 - x$ est divisible par $x\left(x^3 + 1\right) = x^4 + 1$

$x^7 - x$ est divisible par $x^3 - 1$

$x^7 - x$ est divisible par $\left(x - 1\right)\left(x + 1\right) = x^2 - 1$

$x^7 - x$ est divisible par $x^2 + x + 1$

$x^7 - x$ n'est divisible pas par $x^4 + 1 \rightarrow \boxed{E}$

---

23) *Sans réponse préformulée* – Quelle est la somme des diviseurs premiers de 2010^{2010} ?

Réponse :

Les diviseurs premiers de 2010^{2010} sont les diviseurs premiers de 2010.

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

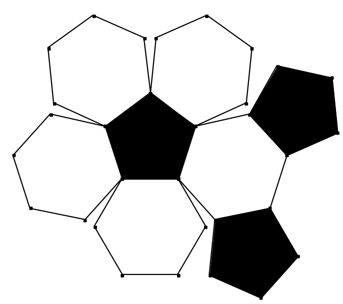
Diviseurs premiers de 2010 : 2, 3, 5 et 67

$2 + 3 + 5 + 67 = \boxed{77}$

---

24) *Sans réponse préformulée* – La surface d'un ballon de football est composée de pentagones réguliers noirs et d'hexagones réguliers blancs. Chaque pentagone est entouré de 5 hexagones ; chaque hexagone est entouré d'autant de pentagones que d'hexagones. Le ballon compte en tout 12 polygones noirs. Combien compte-t-il de polygones blancs ?

Réponse :



Les 12 pentagones noirs ont $12 \cdot 5 = 60$ côtés noirs.
Chaque hexagone a 3 côtés communs avec 3 pentagones différents. Il y a donc en tout $60 \div 3 = \boxed{20}$ hexagones.

---

25) *Sans réponse préformulée* – Une opération * est définie sur les entiers par $a * b = a^b + b^a + a \cdot b$

Réponse :

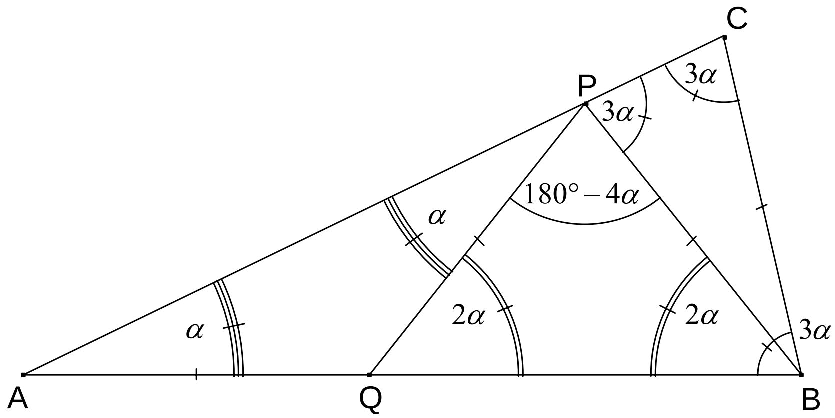
$3*\left(1*2\right) = 3*\left(1^2 + 2^1 + 1 \cdot 2\right) = 3*5 = 3^5 + 5^3 + 3 \cdot 5 = 243 + 125 + 15 = \boxed{383}$

---

26) Dans le triangle ABC, $AB = AC$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AC]$ et à $[AB]$ et sont tels que $BP = BC = PQ = QA$. Que vaut, en degrés, l'amplitude de $\widehat{BAC}$?

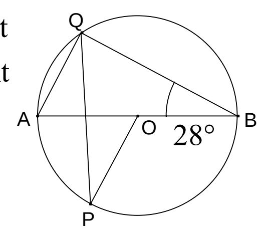
A : $\frac{360}{11}$ B : $\frac{180}{7}$ C : $\frac{51}{5}$ D : 36 E : 72

Réponse :



$$7\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = \frac{180}{7}° \rightarrow \boxed{B}$$

27) *Sans réponse préformulée* – Dans la figure (imprécise) ci-contre, O est le centre du cercle. Quelle est, en degrés, l'amplitude de $\widehat{QPA}$, sachant que $\widehat{QBA} = 28°$ et que (QA) et (OP) sont parallèles ?



Réponse :

Le triangle ABQ est inscrit dans le demi-cercle de centre O, donc ABQ est rectangle en Q et $\widehat{BAQ} = 90° - 28° = 62°$.

$\widehat{BAQ} = \widehat{BPQ}$ (angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{BQ}$)

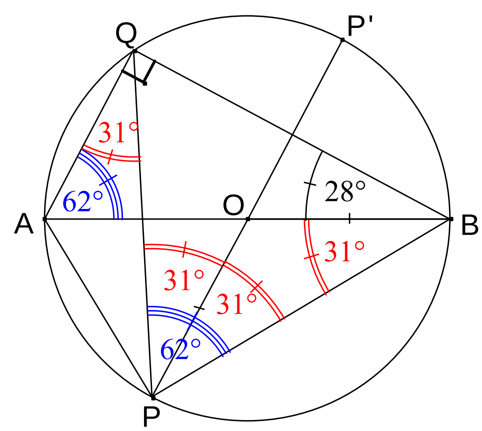
$\widehat{AQP} = \widehat{ABP}$ (angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AP}$)

$\widehat{AQP} = \widehat{OPQ}$ (angles alternes-internes)

$\widehat{ABP} = \widehat{BPO}$ (angles à la base du triangle OPB isocèle de sommet principal O)

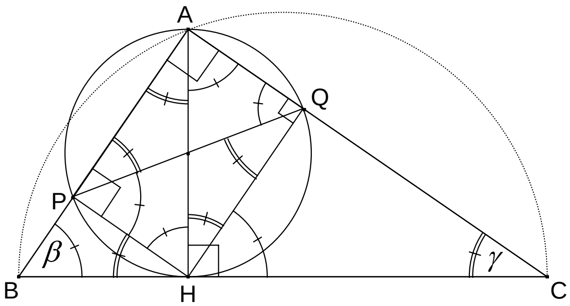
Donc :

$$\widehat{AQP} = \tfrac{1}{2}\left(\widehat{OPQ} + \widehat{BPO}\right) = \tfrac{1}{2}\widehat{BPQ} = \tfrac{1}{2} \cdot 62° = \boxed{31°}$$



28) Dans le triangle ABC, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Le cercle de diamètre $[AH]$ coupe (AB) en P et (AC) en Q. Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC à celle du triangle APQ ?

A : $\frac{a^4}{b^2c^2}$ B : $\frac{a^2}{bc}$ C : $\frac{a^2}{b^2+c^2}$ D : $\frac{1+bc}{1-bc}$ E : $\frac{1}{4}$



<u>Réponse :</u>

Posons $AH = h$, alors :

$[ABC] = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2} \Leftrightarrow h = \frac{bc}{a}$

Les triangles APQ et ACB sont semblables :

$\frac{[ABC]}{[APQ]} = \left(\frac{AC}{AP}\right)^2 = \left(\frac{b}{AP}\right)^2 = \frac{b^2}{AP^2}$

Les triangles APH et AHB sont semblables :

$\frac{AP}{AH} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AP = \frac{AH^2}{AB} \Leftrightarrow AP = \frac{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}{c} \Leftrightarrow AP = \frac{b^2c}{a^2}$

Donc : $\frac{[ABC]}{[APQ]} = \frac{b^2}{\left(\frac{b^2c}{a^2}\right)^2} = \frac{a^4}{b^2c^2} \to \boxed{A}$

---

29) Combien de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{17} = \sqrt{y}$?

A : 0 B : 1 C : 2 D : 17 E : Une infinité

<u>Réponse :</u>

$\sqrt{x} - \sqrt{17} = \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{17}$

En posant $x = 17(k+1)^2$ et $y = 17k^2$ où $k \in \mathbb{N}$, on a :

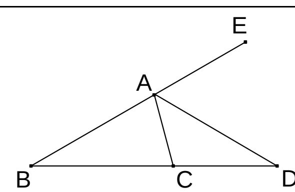
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{17(k+1)^2} - \sqrt{17k^2} = (k+1)\sqrt{17} - k\sqrt{17} = \sqrt{17}$

Par conséquent il y a une infinité de couples (x, y) d'entiers vérifient l'équation

$\sqrt{x} - \sqrt{17} = \sqrt{y} \to \boxed{E}$

---

30) *Sans réponse préformulée* – Dans la figure (imprécise) ci-contre, $\widehat{EAD} = \widehat{CAD}$, $BA = BC = 8$ et $AC = 4$. Que vaut CD ?



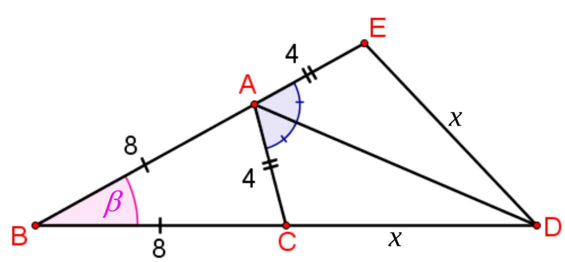
<u>Réponse</u> :

Soit E le point de la demi-droite $[BA)$ n'appartenant pas $[AB]$ tel que $AE = 4$, alors ACD et AED sont isométriques (CAC).

Posons $CD = ED = x$

Théorème des cosinus dans le triangle BCA :

$4^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8\cos(\beta) \Leftrightarrow \cos(\beta) = \frac{7}{8}$



Théorème des cosinus dans le triangle BDE :

$x^2 = (8+x)^2 + 12^2 - 2 \cdot (8+x) \cdot 12\cos(\beta) \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 5x + 40 \Leftrightarrow x = \boxed{8}$
