OMB-MIDI-Eliminatoire-2010

1) $\dfrac{3^{2010}}{3^{200}\cdot 3^{10}} =$

A : 3 B : 3^2 C : 3^{30} D : 3^{210} E : 3^{1800}

Réponse :

$$\frac{3^{2010}}{3^{200}\cdot 3^{10}} = \frac{3^{2010}}{3^{200+10}} = \frac{3^{2010}}{3^{210}} = 3^{2010-210} = 3^{1800} \to \boxed{E}$$

---

2) La moyenne de $\frac{1}{4}$ et d'un autre nombre est $\frac{1}{6}$. Quel est ce nombre ?

A : $\frac{1}{6}$ B : $\frac{1}{5}$ C : $\frac{1}{12}$ D : $\frac{3}{32}$ E : $\frac{5}{24}$

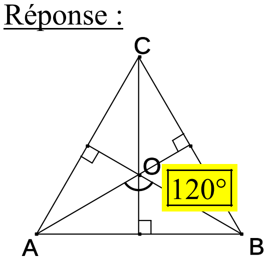
Réponse :

$$\frac{\frac{1}{4}+x}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{4}+x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4}{12}-\frac{3}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{12} \to \boxed{C}$$

---

3) *Sans réponse préformulée* – Si O est l'orthocentre d'un triangle équilatéral ABC, quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BOA}$?

Réponse :



---

4) Si $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}$, alors $a =$

A : $x+2$ B : $\frac{1}{x+2}$ C : $\frac{x+2}{2x}$ D : $\frac{2x}{x-2}$ E : $\frac{2x}{x+2}$

Réponse :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{2+x}{x\cdot 2} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{x+2}{2x} \Leftrightarrow a = \frac{2x}{x+2} \to \boxed{E}$$

---

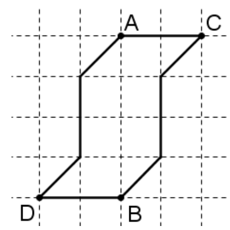
5) La phrase « Tous les chats sont des animaux mignons. » a pour négation logique
A : « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal mignon. » ;
B : « Tous les animaux mignons sont des chats. » ;
C : « Aucun chat n'est un animal mignon. » ;
D : « Il existe un animal mignon qui n'est pas un chat. » ;
E : « Tous les chiens sont des animaux terrifiants. ».

Réponse :
Soient P la proposition : « Tous les chats sont des animaux mignons. », alors P est une proposition universelle, donc de la forme : Pour tout élément x de l'ensemble E, on a la propriété $p(x)$ ou de façon formelle $\left(\underbrace{\boxed{\forall}}_{\text{pour tout}}\ x\in E\right): p(x)$.

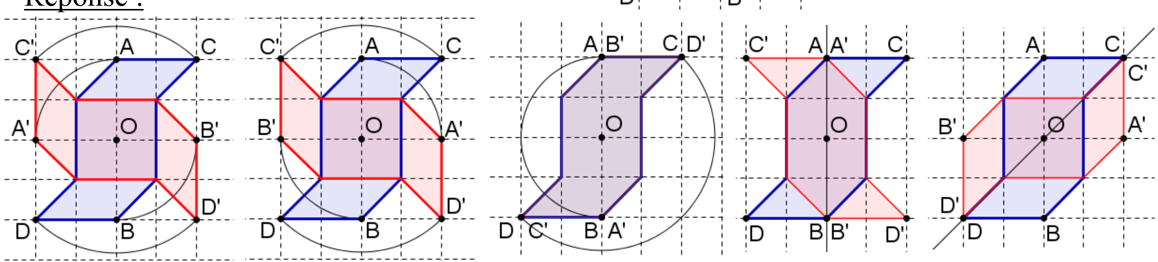
Dans cet exemple, E est l'ensemble des chats, x est un chat et $p(x)$ est la propriété : x est mignon. La négation logique en langage formelle est donc la proposition existentielle :
$\left(\underbrace{\boxed{\exists}}_{\text{il existe}}\ x\in E\right):\underbrace{\boxed{\neg p(x)}}_{\text{non p(x)}}$ ou encore :
$\boxed{\text{A}}$: « Il existe au moins un chat qui n'est pas un animal mignon. »

---

6) Ci-contre, le quadrillage gris est régulier. L'octogone noir est conservé par (outre l'identité)
A : Une seule rotation, de 90° ;
B : Une seule rotation, de 180° ;
C : Deux rotations, de 90° et de 180° ;
D : Une seule symétrie axiale, d'axe (AB) ;
E : Une seule symétrie axiale, d'axe (CD).



Réponse :



L'octogone noir est conservé par (outre l'identité) une rotation de 180° $\rightarrow \boxed{B}$

---

7) Trois nombres distincts sont choisis parmi $-9,-8,-7,-6,2,3,4,5$. Les deux premiers sont multipliés entre eux, puis le troisième est soustrait du produit. Quel est le plus petit résultat possible ?
A : -49 B : -48 C : -45 D : -19 E : 1

Réponse :
$(-9)\cdot 5-4=-45-4=-49\rightarrow \boxed{A}$

---

8) Dans un groupe de 150 adolescents, 98 pratiquent le tennis, 53 font du ski et 39 s'adonnent au ski et au tennis. Combien de ces adolescents ne pratiquent aucun des deux sports ?

A : 112 B : 58 C : 52 D : 38 E : 13

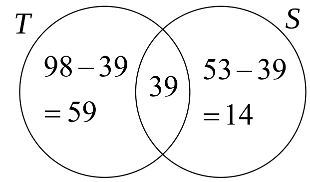
Réponse :

T : ensemble des élèves qui pratiquent le tennis

S : ensemble des élèves qui pratiquent le ski

Nombre d'adolescents qui ne pratiquent aucun sport :

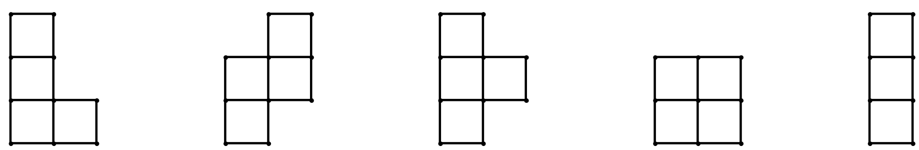
$150-(59+39+14)=38 \rightarrow \boxed{D}$



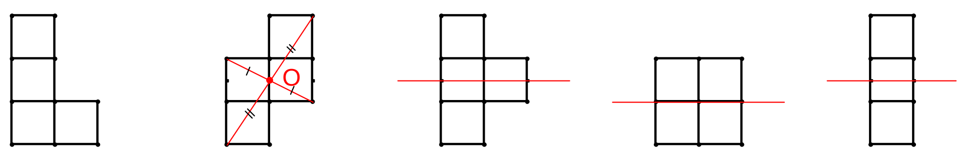
---

9) Les cinq figures ci-dessous sont formées de carrés juxtaposés. Laquelle d'entre elles n'admet ni axe de symétrie, ni centre de rotation ?

A : B : C : D : E :



Réponse :



Le « L » (figure $\boxed{A}$) n'admet ni axe de symétrie ni centre de rotation.

---

10) Dans un jeu de 52 cartes, de combien de manières peut-on former une « main » de 3 cartes qui soient toutes des valets ?

A : 1 B : 3 C : 4 D : 13 E : 156

Réponse :

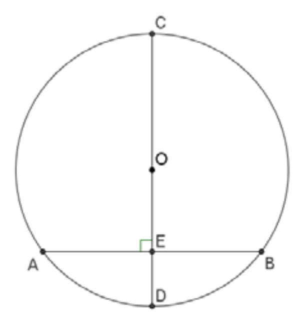
| ♠V♥V♦V | ♠V♥V ♣V | ♠V ♦V♣V | ♥V♦V♣V |

4 mains de 3 cartes contiennent 3 valets $\rightarrow \boxed{C}$

---

11) Ci-contre, le cercle a un rayon de 5 *cm* et $ED = 2$ *cm*.

Que vaut AB ?



A : 3 *cm* B : 4 *cm* C : 6 *cm* D : 8 *cm* E : 8,5 *cm*

Réponse :

Pythagore : $OA^2 = OE^2 + AE^2 \Leftrightarrow AE^2 = 5^2 - (5-2)^2 \Leftrightarrow AE^2 = 25 - 9 \Leftrightarrow AE^2 = 16$

Donc $AE = 4$ *cm* et $AB = 2 \cdot AE = 8$ *cm* $\rightarrow \boxed{D}$

---

12) Un seul des cinq nombres que voici n'est *pas* le produit de deux naturels consécutifs. Lequel ?
A : 238 B : 650 C : 702 D : 930 E : 1806

Réponse :

$14 \cdot 15 = 210 < 238$ et $15 \cdot 16 = 240 > 238 \rightarrow \boxed{A}$

---

13) Un enfant a observé dans son jardin des araignées (à 8 pattes) et des hannetons (à 6 pattes), et aucun autre animal. Il a vu 8 bestioles, qui avaient en tout 54 pattes. Quel est le nombre d'hannetons observés ?
A : 2 B : 3 C : 4 D : 5 E : 6

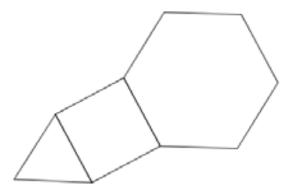
Réponse :

Soit h le nombre d'hannetons et a le nombre d'araignées observés.

$$\begin{cases} h+a=8 \\ 6h+8a=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-h \\ 6h+8(8-h)=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-h \\ 6h+64-8h=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-h \\ 2h=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ h=5 \end{cases} \rightarrow \boxed{D}$$

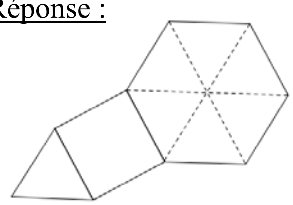
---

14) La figure ci-contre est formée d'un triangle équilatéral dont l'aire est de 3 cm^2, d'un carré et d'un hexagone régulier.



Quelle est, en centimètres carrés, l'aire de l'hexagone ?
A : $3\sqrt{3}$ B : 6 C : $6\sqrt{3}$ D : 12 E : 18

Réponse :



L'aire de l'hexagone est égale à 6 fois l'aire du triangle équilatéral. $\rightarrow \boxed{E}$

---

15) Dans une entreprise, le rapport du nombre d'hommes au nombre de femmes est de 0,76. Quelques années plus tard, alors que le nombre total d'employés n'a pas changé, le nombre de femmes a augmenté de 10%. Que vaut alors le rapport du nombre d'hommes au nombre de femmes.
A : 0,58 B : 0,6 C : 0,66 D : 0,684 E : 0,86

Réponse :

Soient h le nombre initial d'hommes et f le nombre initial de femmes ; alors $\dfrac{h}{f} = 0{,}76$

Quelques années plus tard : le nombre de femmes est : $f + 0{,}1f = 1{,}1\,f$
le nombre d'hommes est : $h - 0{,}1f$

Alors $\dfrac{h-0{,}1\,f}{1{,}1\,f} = \dfrac{h}{1{,}1\,f} - \dfrac{0{,}1\,f}{1{,}1\,f} = \dfrac{0{,}76}{1{,}1} - \dfrac{0{,}1}{1{,}1} = \dfrac{0{,}66}{1{,}1} = \dfrac{6{,}6}{11} = 0{,}6 \rightarrow \boxed{B}$

---

16) Les aires de trois faces d'un parallélépipède rectangle valent 24, 32 et 48 centimètres carrés. Quel est le volume de ce parallélépipède ?

A : 128 *cm³* B : 192 *cm³* C : 384 *cm³* D : 1024 *cm³* E : 36864 *cm³*

Réponse :

Soient a, b et c les trois dimensions du parallélépipède.

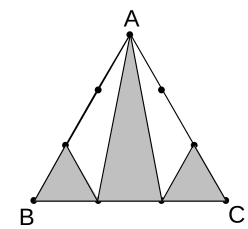
Alors on a par exemple : $ab = 24 = 2^3 \cdot 3$, $bc = 32 = 2^5$ et $ac = 2^4 \cdot 3$

Volume du parallélépipède :

$$abc = \sqrt{(abc)^2} = \sqrt{(ab)(bc)(ac)} = \sqrt{(2^3 \cdot 3)\cdot 2^5 \cdot (2^4 \cdot 3)} = \sqrt{2^{12} \cdot 3^2} = 2^6 \cdot 3 = 192 \ cm^3 \rightarrow \boxed{B}$$

---

17) Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral et les points marqués sur les côtés partagent ceux-ci en tiers. Que vaut le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de ABC ?

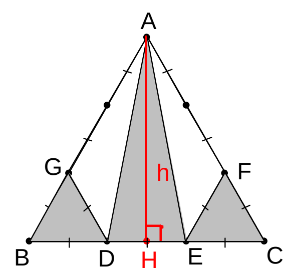


A : $\frac{1}{2}$ B : $\frac{2}{3}$ C : $\frac{4}{9}$ D : $\frac{5}{9}$ E : $\frac{9}{12}$

Réponse :

Notons $[XYZ]$ l'aire du triangle XYZ.

Les triangles BDG et ECF sont isométriques et semblables au triangle BCA, donc :



$$[BDG] = [ECF] = \left(\tfrac{BG}{BA}\right)^2 [ABC] = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 [ABC] = \tfrac{1}{9}[ABC]$$

$$[DEA] = \frac{DE \cdot h}{2} = \frac{\frac{1}{3}BC \cdot h}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{1}{3}[ABC]$$

$$\frac{[BDG]+[DEA]+[ECF]}{[ABC]} = \frac{\frac{1}{9}[ABC]+\frac{1}{3}[ABC]+\frac{1}{9}[ABC]}{[ABC]} = \frac{5}{9} \rightarrow \boxed{D}$$

---

18) En vendant un disque compact 18€, un commerçant réalise un bénéfice de 44% (sur son prix d'achat). A quel prix le vendra-t-il s'il se contente d'un bénéfice de 40% ?

A : 16,20€ B : 16,36€ C : 17€ D : 17,30€ E : 17,50€

Réponse :

Soit a le prix d'achat du disque compact, alors :

$$(100\% + 44\%)a = 18 \Leftrightarrow (1+0,44)a = 18 \Leftrightarrow 1,44a = 18 \Leftrightarrow a = \frac{18}{1,44}\text{€}$$

Prix de vente si le vendeur se contente d'un bénéfice de 40% :

$$(100\% + 40\%)a = (1+0,4)a = 1,4a = 1,4 \cdot \frac{18}{1,44} = \frac{140}{144} \cdot 18 = \frac{35}{36} \cdot 18 = \frac{35}{2} = 17,50\text{€} \rightarrow \boxed{E}$$

---

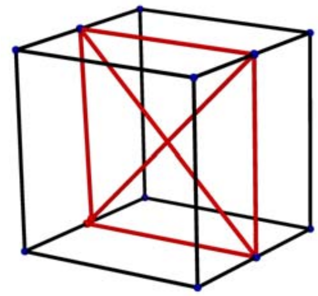
19) Un enfant dispose d'un « squelette » de cube en fil de fer. Il décide de tendre une ficelle entre les milieux de chaque paire d'arêtes parallèles. Combien de morceaux de ficelle placera-t-il ?

A : 6 B : 9 C : 12 D : 18 E : 21

<u>Réponse :</u>

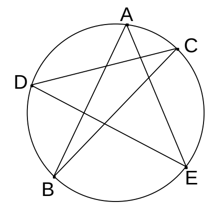
Il y a 3 quadruplets d'arêtes parallèles.
Pour chacun des ces quadruplets, on peut tendre 6 ficelles.

En tout, l'enfant peut donc placer $3 \cdot 6 = 18$ ficelles. $\rightarrow \boxed{D}$



---

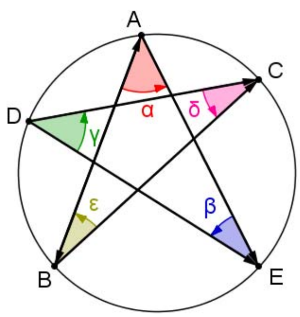
20) *Sans réponse préformulée* – Quelle est la mesure en degrés de la somme des angles du pentagone étoilé *ABCDE* ci-contre ?

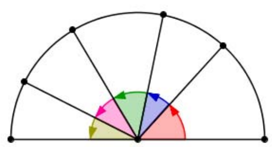


<u>Réponse :</u>

De façon schématique :

$$\overrightarrow{AB} \xrightarrow[rot(A,\alpha)]{} \overrightarrow{AE} \xrightarrow[rot(E,\beta)]{} \overrightarrow{DE} \xrightarrow[rot(D,\gamma)]{} \overrightarrow{DC} \xrightarrow[rot(C,\delta)]{} \overrightarrow{BC} \xrightarrow[rot(E,\varepsilon)]{} \overrightarrow{BA}$$





Après les cinq rotations, la « flèche » $\overrightarrow{AB}$ a été transformée en la « flèche » $\overrightarrow{BA}$, donc :
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180°$

<u>OU</u>

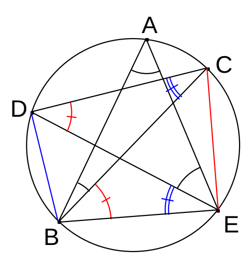
Les angles inscrits $\widehat{EBC}$ et $\widehat{EDC}$ interceptent la même corde $[CE]$ et leurs sommets sont situés du même côté de la corde,

donc : $\widehat{EBC} = \widehat{EDC}$.

De même : $\widehat{DCB} = \widehat{DEB}$

D'où :

$$\begin{aligned} & \widehat{BAE} + \widehat{EDC} + \widehat{CBA} + \widehat{AED} + \widehat{DCB} \\ = & \widehat{BAE} + \widehat{EBC} + \widehat{CBA} + \widehat{AED} + \widehat{DEB} \\ = & \widehat{BAE} + \widehat{EBA} + \widehat{AEB} \\ = & 180° \end{aligned}$$



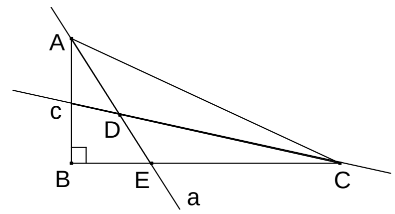
---

21) De quel pourcentage augmente le volume d'un cube si chaque arête augmente de 50 % ?
A : 50 % B : 150 % C : 225 % D : 237,5 % E : 1250 %

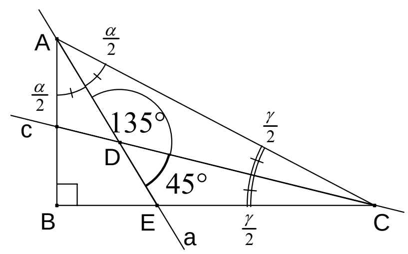
Réponse :
Soit a l'arête du cube.
L'arête augmenté de 50 % mesure alors $a + 0,5a = 1,5a$
Nouveau volume : $(1,5a)^3 = 1,5^3 a^3 = 3,375a^3 = a^3 + 2,375a^3 = a^3 + 237,5\% a^3$
Le volume du cube augmente donc de 237,5 % $\rightarrow \boxed{D}$

---

22) *Sans réponse préformulée* – Le triangle ABC est rectangle en B. Soit a la bissectrice comprenant A et c la bissectrice comprenant C ; a coupe c en D et (BC) en E. Quelle est la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{CDE}$?



Réponse :



$\widehat{CDE}$
$= 180° - \widehat{CDA}$
$= 180° - \left(180° - \widehat{DAC} - \widehat{ACD}\right)$
$= \widehat{DAC} + \widehat{ACD}$
$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$
$= \boxed{45°}$

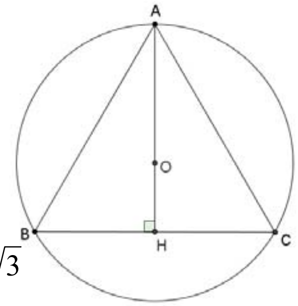
---

23) *Sans réponse préformulée* – Pour mon voyage en Italie, l'agence propose une formule *Combiné trois villes*, ce qui signifie que je peux choisir trois villes parmi les cinq suivantes : Florence, Milan, Naples, Rome, Venise, et choisir l'ordre dans lequel je visites ces villes. Combien de circuits sont possibles ?

Réponse :
J'ai 5 possibilités pour choisir la première ville.
Pour chacun de ces choix, j'ai encore 4 possibilités pour choisir la deuxième ville.
Pour chacun de ces choix, j'ai encore 3 possibilités pour choisir la troisième ville.
J'ai donc en tout $5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{60}$ choix possibles.

---

24) Un triangle équilatéral est inscrit à un cercle dont l'aire est de 12π *cm²*.
Quel est le périmètre du triangle ?
A : $36/\pi$ *cm* B : 6 *cm* C : 18 *cm* D : 36 *cm* E : Une autre valeur



Réponse :

Soit *ABC* le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre *O*.
Soit *H* le pied de la hauteur issue de *A* du triangle *ABC*.
Posons : $r = OA$ (rayon), $h = AH$ (hauteur) , $x = AB = BC = AC$

$$\pi r^2 = 12\pi \Leftrightarrow r^2 = 12 \Leftrightarrow r = \sqrt{12} \Leftrightarrow r = \sqrt{4\cdot 3} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3}$$

O est le centre de gravité de *ABC* ; donc : $r = \frac{2}{3}h \Leftrightarrow h = \frac{3}{2}r \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$

Pythagore :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 27 + \tfrac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow \tfrac{3}{4}x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$$

D'où le périmètre du triangle : $3x = 18$ *cm* $\rightarrow \boxed{C}$

---

25) Le jardin de Barbara est rectangulaire. Son aire est de 70 *m²* et son périmètre de 38 *m*.
Quelle est, en mètres, la plus grande de ses dimensions ?
A : 28 B : 14 C : 10 D : 7 E : 5

Réponse :

Soient *x* et *y* les dimensions du rectangle.

Alors $\begin{cases} x\cdot y = 70 = 2\cdot 5\cdot 7 \\ x + y = 38 : 2 = 19 \end{cases}$

Or: $14 \cdot 5 = 70$ et $14 + 5 = 19$

La plus grande des dimensions est donc 14 *m* $\rightarrow \boxed{B}$

OU (3ème)

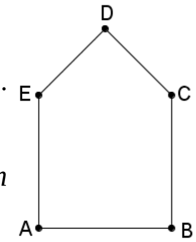
$$\begin{cases} x\cdot y = 70 \\ x + y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{70}{x} \\ x + \frac{70}{x} = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{70}{x} \\ x^2 + 70 = 19x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{70}{x} & (1) \\ x^2 - 19x + 70 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Delta = (-19)^2 - 4\cdot 1\cdot 70 = 361 - 280 = 81 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-(-19)-9}{2} = 5 \text{ et } y = \frac{70}{5} = 14 \;\; ; \;\; x_2 = \frac{-(-19)+9}{2} = 14 \text{ et } y = \frac{70}{14} = 5$$

---

26) Albert et Bernard doivent partager en deux parties de même aire le terrain *ABCDE* formé d'un carré de 80 mètres de côté prolongé par un triangle rectangle isocèle. Ils décident d'utiliser pour la division une parallèle à (AB).

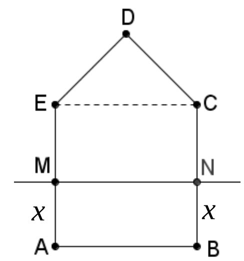


À quelle distance de (AB) cette parallèle doit-elle se trouver?

A : 40 *m* B : 50 *m* C : 52,5 *m* D : 55 *m* E : 60 *m*

Réponse :

Il est clair que la droite parallèle à (AB) qui partage le terrain coupe le segment [*AE*] en un point *M* et [*BC*] en un point *N*. Posons $x = AM = BN$.



Aire du rectangle *ABNM* : $80x$ (m^2)

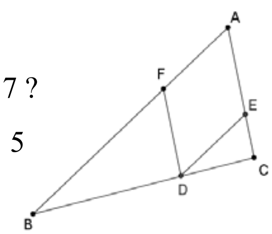
Aire du pentagone *CDEMN* : $\underbrace{80\cdot(80-x)}_{\text{Aire de } CEMN} + \underbrace{\tfrac{1}{4}\cdot 80^2}_{\text{Aire de } CDE} = 8000-80x$

(*L'aire du triangle CDE est le quart de l'aire du carré ABCE*)

Ainsi : $80x = 8000-80x \Leftrightarrow 160x = 8000 \Leftrightarrow x = 50 \rightarrow \boxed{B}$

---

27) Le losange *AFDE* est inscrit dans le triangle *ABC*.
(Voir la figure imprécise ci-contre.)
Quelle est la longueur de son côté sachant que $AB = 15$, $BC = 12$, $AC = 7$?



A : $\dfrac{105}{22}$ B : $\dfrac{54}{11}$ C : $\dfrac{24}{5}$ D : $\dfrac{19}{4}$ E : 5

Réponse :
Soit *x* la longueur d'un côté du losange, alors :
$FA = AE = ED = DF = x$ car un losange a quatre côtés de même mesure.

Thalès: $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{DF}{CA} \Leftrightarrow \dfrac{15-x}{15} \boxtimes \dfrac{x}{7} \Leftrightarrow 7\cdot 15 - 7x = 15x \Leftrightarrow 22x = 105 \Leftrightarrow x = \dfrac{105}{22} \rightarrow \boxed{A}$

---

28) Le produit des âges de mes enfants, exprimés en années, vaut 1664. L'âge du plus jeune est moitié de l'âge de l'aîné. Combien ai-je d'enfants ?

A : 2 B : 3 C : 4 D : 5 E : 6

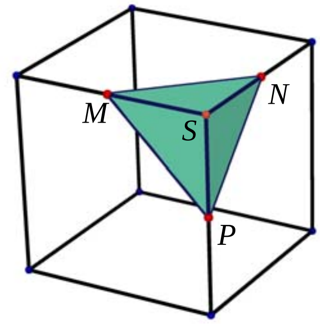
Réponse :
$1664 = 2^7\cdot 13 = 2^3\cdot 13\cdot 2^4 = 8\cdot 13\cdot 16$
J'ai donc trois enfants $\rightarrow \boxed{B}$

---

29) Soit S un sommet d'un cube et M, N, P les milieux des trois arêtes issues de ce sommet. La pyramide $SMNP$ est ôtée du cube, puis cette opération est répétée en chaque sommet du cube. Quel est le rapport du volume du solide initial à celui du cube initial ?

A : $\frac{7}{8}$ B : $\frac{5}{6}$ C : $\frac{3}{4}$ D : $\frac{2}{3}$ E : $\frac{1}{2}$

Réponse :
Soit c la longueur d'une arête du cube, alors le volume de la pyramide $SMNP$ vaut :



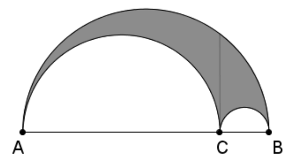
$$\frac{A_b h}{3} = \frac{\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} \cdot \frac{c}{2}}{3} = \frac{\frac{c^3}{16}}{3} = \frac{c^3}{48}$$

Le rapport du volume du solide initial à celui du cube initial vaut :

$$\frac{c^3 - 8 \cdot \frac{c^3}{48}}{c^3} = \frac{1 - \frac{1}{6}}{1} = \frac{5}{6} \rightarrow \boxed{B}$$

---

30) La figure ci-contre est réalisée à l'aide de trois demi-cercles de diamètres [AB], [AC] et [CB] ; en outre, $AC = 3\ BC$.
Sachant que l'aire de la zone grise vaut 12, quelle est l'aire du demi-disque de diamètre [AB] ?



A : 16 B : 18 C : 24 D : 32 E : 36

Réponse :
Soit r le rayon du demi-disque de diamètre [BC].
Alors le rayon du demi-disque de diamètre [AC] vaut $3r$
et celui du demi-disque de diamètre [AB] vaut $4r$.

Aire de la partie grise : $\frac{\pi \cdot (4r)^2}{2} - \frac{\pi \cdot (3r)^2}{2} - \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{16\pi r^2}{2} - \frac{9\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = 3\pi r^2$

Ainsi: $3\pi r^2 = 12 \Leftrightarrow \pi r^2 = 4$

Aire du demi-disque de diamètre [AB] : $\frac{\pi \cdot (4r)^2}{2} = \frac{16\pi r^2}{2} = 8\pi r^2 = 8 \cdot 4 = 32 \rightarrow \boxed{D}$
