

Solution

Soit A_1, A_2, \dots, A_n les n sommets du polygone convexe.

Pour construire une diagonale $[X, Y]$, il faut choisir les deux sommets X et Y qui sont ses extrémités.

Si par exemple $X = A_1$, il y a $n - 3$ possibilités pour choisir Y : tous les sommets du polygone sauf A_1 lui-même et les deux sommets voisins de A_1 .

Il y a donc $n - 3$ diagonales contenant A_1 en première position. De même il y a $n - 3$ diagonales contenant A_2 en première position, $n - 3$ diagonales contenant A_3 en première position, ...

Cela fait un total de $n(n - 3)$ diagonales. Mais de cette façon on a compté deux fois chaque diagonale, une fois en écrivant $[X, Y]$ et une deuxième fois en écrivant $[Y, X]$. Donc la formule correcte pour le nombre de diagonales est $\frac{n(n-3)}{2}$.

Un icosagone possède donc $\frac{20 \cdot 17}{2} = 170$ diagonales.