CHAPITRE II

LES CONIQUES

Table des matières

COURS

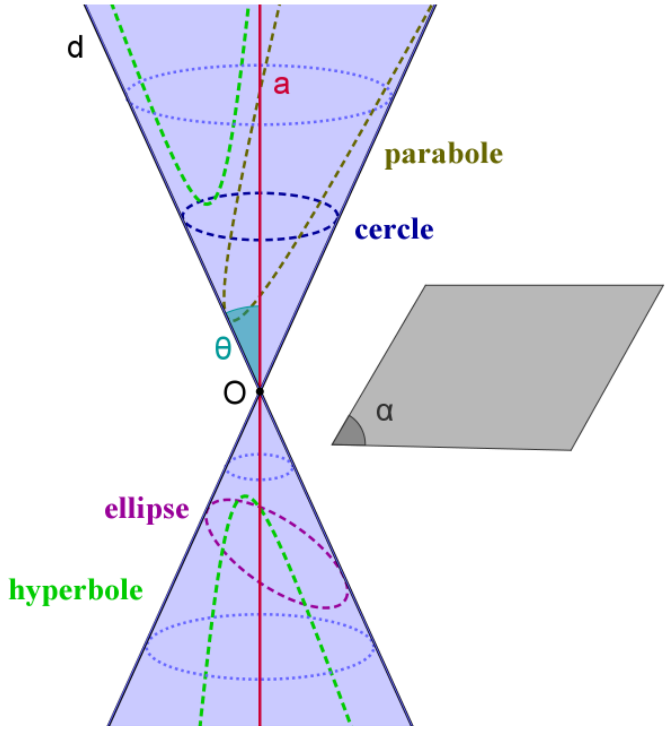
COURS

1) Différentes approches des « coniques »

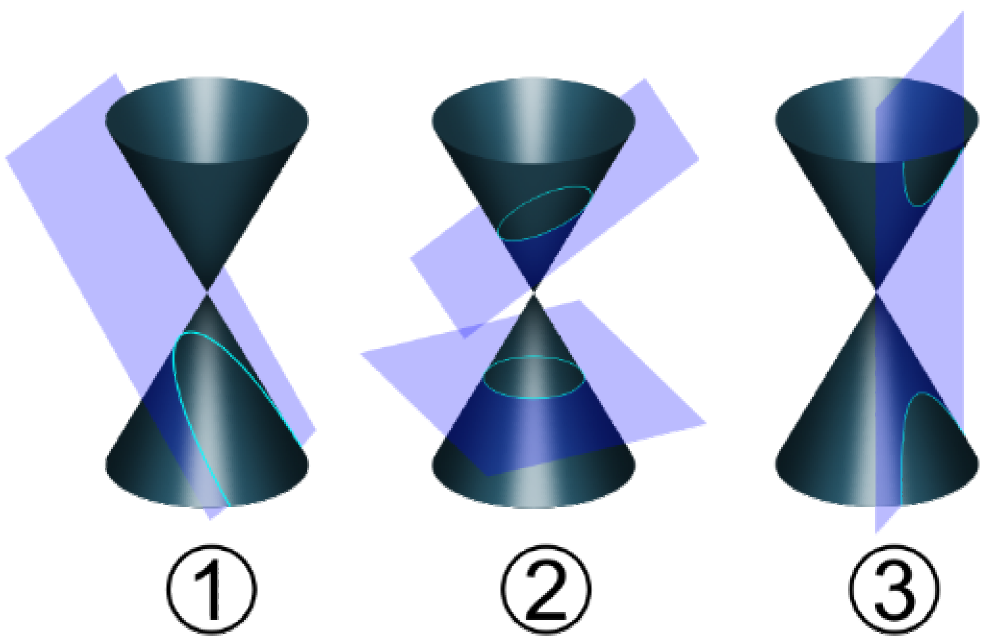
Au cours d'analyse vous avez vu que les courbes représentatives des fonctions du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ sont appelées « paraboles » et que celles de certaines fonctions homographiques $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ sont appelées « hyperboles ». Vous savez également que le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r est le lieu géométrique des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient l'équation du second degré $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Par ailleurs tout le monde a entendu parler de ces « cercles aplatis » qu'on appelle « ellipses »….

Toutes ces courbes, qui sont connues et ont été étudiées depuis l'Antiquité pour le rôle important qu'elles jouent en physique (en particulier en astronomie), peuvent être définies comme l'intersection d'un double cône infini et d'un plan :

- Soient a et d deux droites dans l'espace sécantes en O et formant un angle aigu θ. En faisant tourner d autour de a (en gardant toujours le même angle θ) on obtient une ***surface dans l'espace*** appelée **double cône infini d'axe a et de génératrice d** (voir figure page suivante).
- En coupant ce double cône avec un plan α on obtient (suivant la position du plan par rapport à la droite a), soit un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole, appelés **coniques,** soit le point O, une droite ou deux droites sécantes, appelés **coniques dégénérées.** Essayez de « voir » comment obtenir chacune de ces figures !



Sur la figure suivante, ① représente une parabole, ② un cercle et une ellipse et ③ une hyperbole :



Cette approche, qui a donné leur nom aux « coniques », en allemand « Kegel**schnitt** », en anglais « conic **section** », est cependant un peu difficile à mettre en œuvre quand on veut obtenir des propriétés plus précises de ces figures puisqu'il faut travailler dans l'espace !. Dans ce chapitre nous verrons trois autres approches des coniques :

- Nous définirons tout d'abord (*paragraphes 2 à 6*) les coniques comme lieu géométrique des points *dans le plan* vérifiant une certaine équation appelée **équation focale** : cette approche, moins générale que la première, donne uniquement les ellipses (mais pas le cercle !), les paraboles et les hyperboles, c'est-à-dire des coniques non dégénérées.
- Nous aborderons ensuite (*paragraphe 7*), uniquement par des exemples (sans présenter la théorie complète), les coniques comme **courbes algébriques du second degré**. Cette approche algébrique des coniques est aussi générale que la première : elle couvre toutes les coniques, dégénérées ou non.
- Pour finir (*paragraphe 8*) nous verrons une autre approche géométrique, la définition **« bifocale »**, qui n'est cependant valable que pour les ellipses et les hyperboles.

2) Equation focale d'une conique

a) Définitions

Soient un point F et une droite d dans le plan et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Le lieu géométrique Γ des points P du plan qui vérifient l'équation $PF = \varepsilon \cdot Pd$ est appelé **conique** de **foyer** F, de **directrice** d et d'**excentricité** ε. Cette équation est appelée **équation focale** de Γ.

$$\boxed{\Gamma = \left\{ P \,/\, PF = \varepsilon \cdot Pd \right\}}$$

De plus :

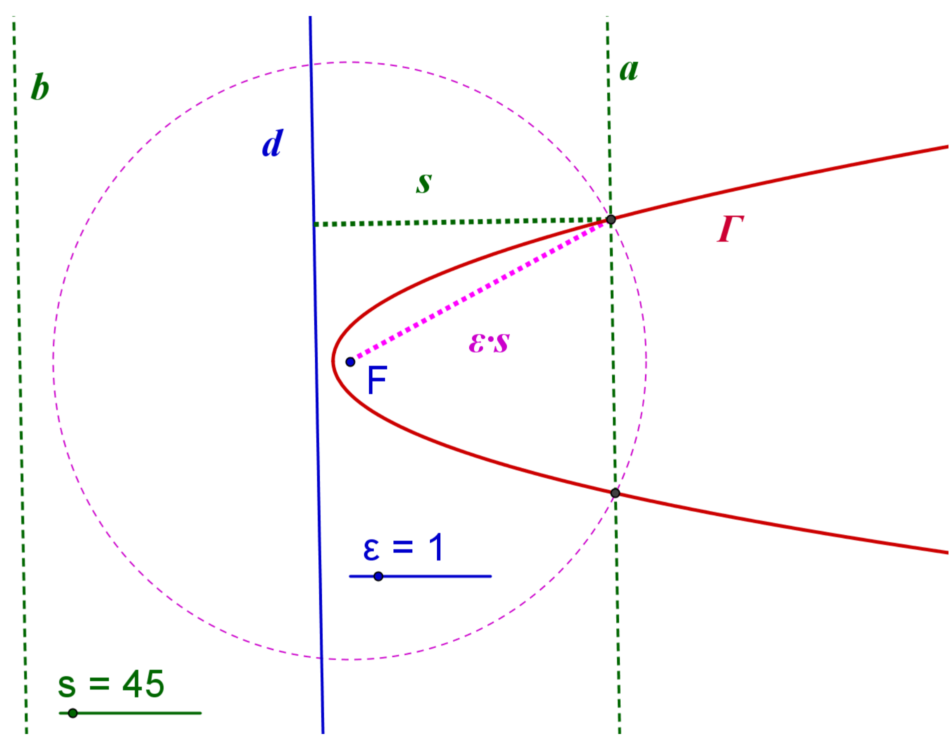
- si $0 < \varepsilon < 1$, alors Γ est appelée **ellipse**
- si $\varepsilon = 1$, alors Γ est appelée **parabole**
- si $\varepsilon > 1$, alors Γ est appelée **hyperbole**

b) Exploration à l'aide de GEOGEBRA

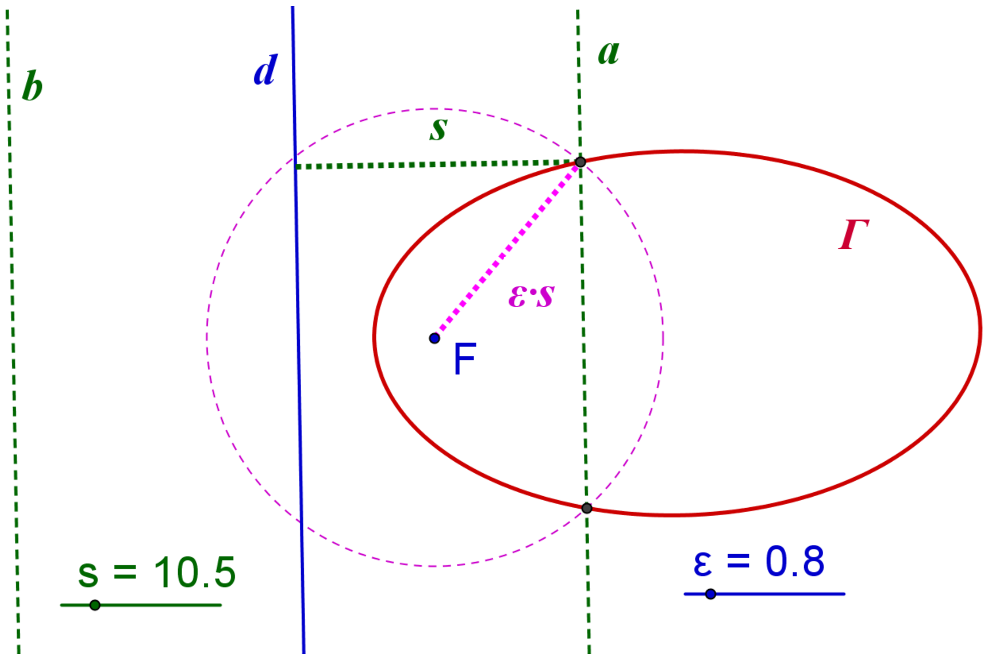
- Construisez d, F et deux curseurs ε et s
- L'ensemble des points P tels que $Pd = s$ est constitué de deux droites a et b parallèles à d. Pour construire celles-ci on peut construire successivement :
  - un point $Q \in d$
  - le cercle $\mathcal{C}$ de centre Q et de rayon s

- la droite m passant par Q et perpendiculaire à d
- les deux points d'intersection I et J de m et du cercle $\mathcal{C}$
- les droites a et b passant par I et J respectivement et parallèles à d
- afin de rendre la figure plus lisible on « cache » les objets Q, I, J, $\mathcal{C}$ et m

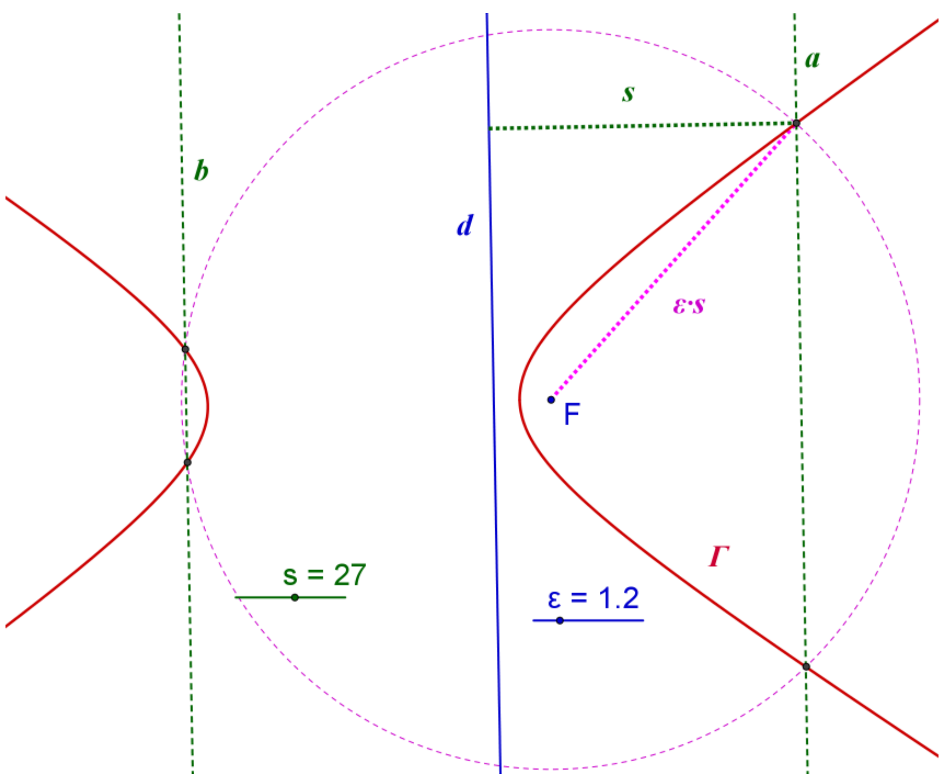
- L'ensemble des points P tels que $PF = \varepsilon \cdot s$ est le cercle de centre $\mathcal{C}$' de centre F et de rayon $\varepsilon \cdot s$.
- L'ensemble des points P tels que $PF = \varepsilon \cdot Pd$ sont les points d'intersection de $\mathcal{C}$' et des droites a et b (il y en a 0, 1, 2 ou 4 suivant les valeurs de s et de ε)
- Pour obtenir le lieu cherché Γ on fait varier le nombre s en laissant le nombre ε fixe.
- En utilisant la commande « lieu » on peut obtenir tout de suite Γ pour un ε donné de la manière suivante :
  - on commence par choisir ε et s de telle manière à avoir 4 points d'intersection
  - pour chacun de ces 4 points on utilise la commande « lieu » en cliquant d'abord sur le point puis sur le curseur s : on obtient 4 lieux dont la réunion est la courbe Γ
- <u>Exemple 1</u> : $\varepsilon = 1$ (Γ est une parabole)



- Exemple 2 : $\varepsilon = 0{,}8$ (Γ est une ellipse)



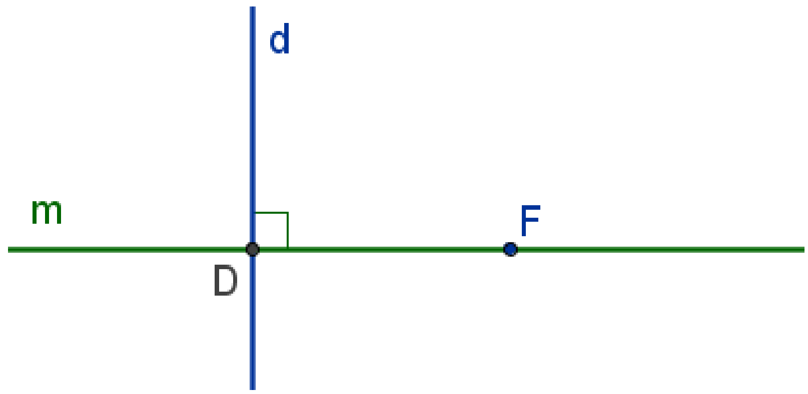
- Exemple 3 : $\varepsilon = 1{,}2$ (Γ est une hyperbole)



3) Axe focal de Γ

a) Définition

On appelle **axe focal** de Γ la droite **m** passant par le foyer F et orthogonale à la directrice d.



Remarque : $\mathrm{Fd} =$ distance de F à d $= \mathrm{FD}$ où $\mathrm{D} \in \mathrm{m} \cap \mathrm{d}$

b) Propriété

L'axe focal m de Γ est un **axe de symétrie** de Γ

démonstration :

Soit s_m la symétrie d'axe m, P un point du plan, on notera $P' = s_m(P)$ le symétrique de P par rapport à m. Alors $s_m(F) = F$ car $F \in m$ et $s_m(d) = d$ car $d \perp m$, et comme s_m conserve les distances, $PF = P'F$ et $Pd = P'd$. D'où : $PF = \varepsilon \cdot Pd \Leftrightarrow P'F = \varepsilon \cdot P'd$, c'est-à-dire : $P \in \Gamma \Leftrightarrow P' \in \Gamma$. Par conséquent $s_m(\Gamma) = \Gamma$ et m est bien un axe de symétrie de Γ.

4) Sommets de Γ

a) Définition

Les points d'intersection de l'axe focal m et de la conique Γ sont appelés **sommets** de Γ.

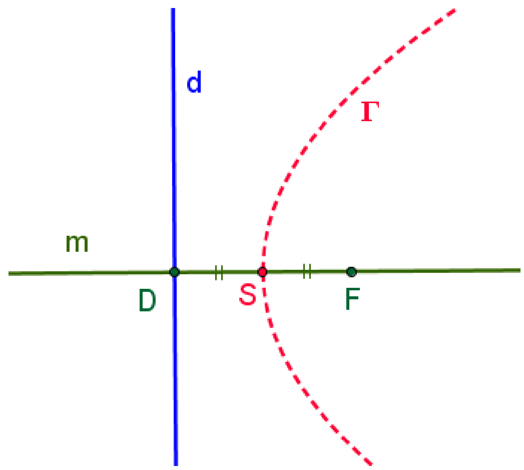
Remarques :

- Nous verrons plus loin que pour les ellipses il existe d'autres points qu'on appelle également « sommets ».
- $P \in m \cap \Gamma \Leftrightarrow P \in m$ et $PF = \varepsilon \cdot PD$ car pour tout $P \in m$ $\quad Pd = PD$.

Notation : dans la suite nous noterons **S le milieu de** $[FD]$**.**

b) Sommet d'une parabole

Soit Γ une parabole, alors : $P \in m \cap \Gamma \Leftrightarrow P \in m \text{ et } PF = PD \Leftrightarrow P = S$, et par conséquent $\Gamma \cap m = \{S\}$. Ainsi <u>une parabole n'a qu'un seul sommet</u> et ce sommet est le milieu S de $[FD]$.



c) Sommets d'une ellipse et d'une hyperbole

i) Préliminaires

Soit Γ une conique d'excentricité $\varepsilon \neq 1$, alors :

$$P \in m \cap \Gamma \quad \Leftrightarrow P \in m \text{ et } PF = \varepsilon \cdot PD$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PF} = -\varepsilon\overrightarrow{PD} \quad (1) \quad \text{si } \overrightarrow{PF} \text{ et } \overrightarrow{PD} \text{ sont de sens opposés, càd si } P \in [DF] \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{PF} = \varepsilon\overrightarrow{PD} \quad (2) \quad \text{si } \overrightarrow{PF} \text{ et } \overrightarrow{PD} \text{ ont le même sens, càd si } P \notin [DF] \end{cases}$$

De plus : $(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} = -\varepsilon\overrightarrow{PD} \Leftrightarrow (1+\varepsilon)\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{FD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF}$, or D, F et ε étant fixes, <u>il existe un seul</u> point $S_1 \in m$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF}} \quad (3)$$

De même $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} = \varepsilon\overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\neq 0 \text{ car } \varepsilon \neq 1}\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{FD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}$, donc <u>il existe</u> également <u>un seul</u> point $S_2 \in m$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}} \quad (4)$$

Ainsi pour les ellipses et les hyperboles (c'est-à-dire les coniques d'excentricité $\varepsilon \neq 1$) on a : $\Gamma \cap m = \{S_1, S_2\}$ où les sommets S_1 et S_2 sont définis par (3) et (4).

Désignons par **O le milieu de $[S_1,S_2]$,** alors O est appelé **centre de la conique** (ce terme sera justifié page 17) et il vient :

$\overrightarrow{DS_1}=\frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF}\Leftrightarrow\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OS_1}=\frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF}\quad(5)$, et comme $\overrightarrow{OS_2}=-\overrightarrow{OS_1}$ on a aussi :

$\overrightarrow{DS_2}=\frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}\Leftrightarrow\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OS_2}=\frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}\Leftrightarrow\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OS_1}=\frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}\quad(6)$, d'où :

$(5)+(6):\quad 2\cdot\overrightarrow{DO}=\left(\frac{1}{1+\varepsilon}+\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\overrightarrow{DF}\ \Leftrightarrow 2\cdot\overrightarrow{DO}=\frac{1-\varepsilon+1+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}\overrightarrow{DF}$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{DO}=\frac{1}{1-\varepsilon^2}\overrightarrow{DF}}\ (7)$$

ii) Positions relatives de D, F, S_1, S_2 et O :

D'après les égalités (3), (4), et (7) ces positions dépendent des coefficients $\frac{1}{1+\varepsilon}$, $\frac{1}{1-\varepsilon}$ et $\frac{1}{1-\varepsilon^2}$ qui dépendent eux-mêmes de ε. Il faut donc distinguer deux cas :

1^er cas : $\boxed{0<\varepsilon<1}$ (Γ est une **ellipse**)

- $0<\varepsilon<1\Leftrightarrow 1<1+\varepsilon<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{1+\varepsilon}<1$,

  et comme $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{DS_1}=\frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DF}=1\cdot\overrightarrow{DF}$, on a :

  $$S_1\in\left]S,F\right[$$

- $0<\varepsilon<1\Leftrightarrow -1<-\varepsilon<0\Leftrightarrow 0<1-\varepsilon<1\Leftrightarrow\frac{1}{1-\varepsilon}>1$

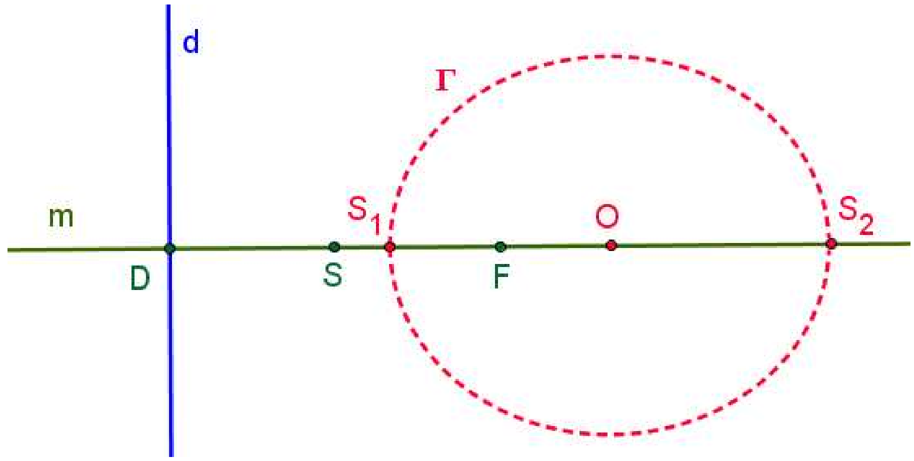
  et comme $\overrightarrow{DS_2}=\frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DF}=1\cdot\overrightarrow{DF}$, on voit que S_2 est « à droite » de F sur la figure page 7 donc $F\in\left]D,S_2\right[$

- $0<\varepsilon<1\Leftrightarrow 0<\varepsilon^2<1\Leftrightarrow -1<-\varepsilon^2<0\Leftrightarrow 0<1-\varepsilon^2<1\Leftrightarrow\frac{1}{1-\varepsilon^2}>1$

  et comme $\overrightarrow{DO}=\frac{1}{1-\varepsilon^2}\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DF}=1\cdot\overrightarrow{DF}$, on voit que O est « à droite » de F sur la figure page 7 donc $F\in\left]D,O\right[$

Conclusion :

Pour une **ellipse** les points D, F, S_1, S_2 et O se présentent dans l'ordre suivant :



2^e cas : $\boxed{\varepsilon > 1}$ (Γ est une **hyperbole**)

- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow 1+\varepsilon > 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{1}{2}$,

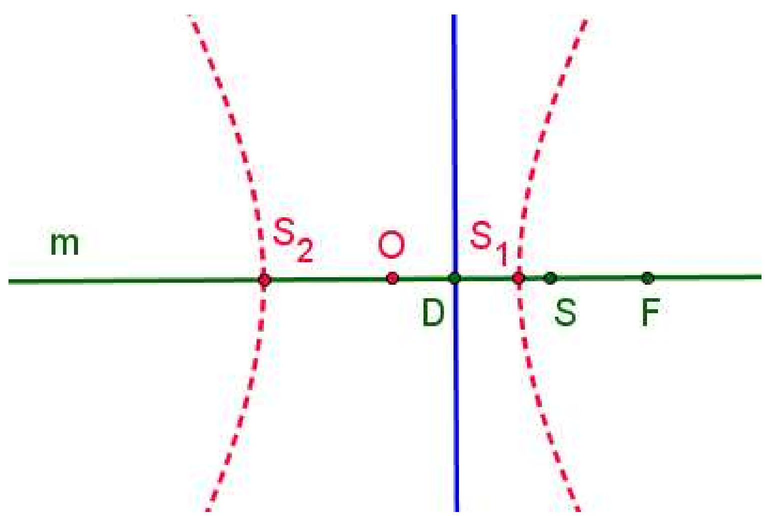
  et comme $\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$, on a $S_1 \in \left]D, S\right[$.

- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow -\varepsilon < -1 \Leftrightarrow 1-\varepsilon < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\varepsilon} < 0$ et comme $\overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF}$, on voit que S_2 est « à gauche » de D sur la figure page 7 donc $D \in \left]S_2, F\right[$.

- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 > 1 \Leftrightarrow -\varepsilon^2 < -1 \Leftrightarrow 1-\varepsilon^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\varepsilon^2} < 0$

  et comme $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\overrightarrow{DF}$, on voit que O est « à gauche » de D sur la figure page 7 donc $D \in \left]O, F\right[$

Conclusion : Pour une **hyperbole** les points D, F, S_1, S_2 et O se présentent dans l'ordre suivant :



Notations

Pour **les ellipses et les hyperboles** nous noterons **a** la distance du centre à l'un des deux sommets et **c** la distance du centre au foyer :

$$\mathbf{a} = OS_1 = OS_2 = \frac{1}{2}S_1S_2 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{c} = OF$$

iii) Propriétés de a et de c

- Pour une **ellipse** $c < a$ et pour une hyperbole $c > a$

  Démonstration : évident d'après ce qui précède

- Pour les **ellipses** et pour les **hyperboles** : $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad Od = OD = \frac{a^2}{c}}$

  Démonstration :

$$\overrightarrow{DS_1} = \frac{1}{1+\varepsilon}\overrightarrow{DF} \Leftrightarrow (1+\varepsilon)\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DF}$$
$$\Leftrightarrow (1+\varepsilon)\left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_1}\right) = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_1} + \varepsilon\cdot\overrightarrow{DO} + \varepsilon\cdot\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OS_1} + \varepsilon\cdot\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} + \varepsilon\cdot\overrightarrow{OD} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{1-\varepsilon}\overrightarrow{DF} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\overrightarrow{DS_2} = \overrightarrow{DF}$$
$$\Leftrightarrow (1-\varepsilon)\left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_2}\right) = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OS_2} - \varepsilon\cdot\overrightarrow{DO} - \varepsilon\cdot\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF}$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{OS_1} + \varepsilon\cdot\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF} - \varepsilon\cdot\overrightarrow{OD} \quad (9) \quad \left(\text{car } \overrightarrow{OS_2} = -\overrightarrow{OS_1}\right)$$

$$(8)+(9): \quad 2\varepsilon\cdot\overrightarrow{OS_1} = 2\cdot\overrightarrow{OF} \Leftrightarrow \varepsilon\cdot\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OF},$$

$$\text{donc } \varepsilon\cdot OS_1 = OF \Leftrightarrow \varepsilon\cdot a = c \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{c}{a}$$

$$(8)-(9): \quad 2\cdot\overrightarrow{OS_1} = 2\varepsilon\cdot\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS_1} = \varepsilon\cdot\overrightarrow{OD},$$

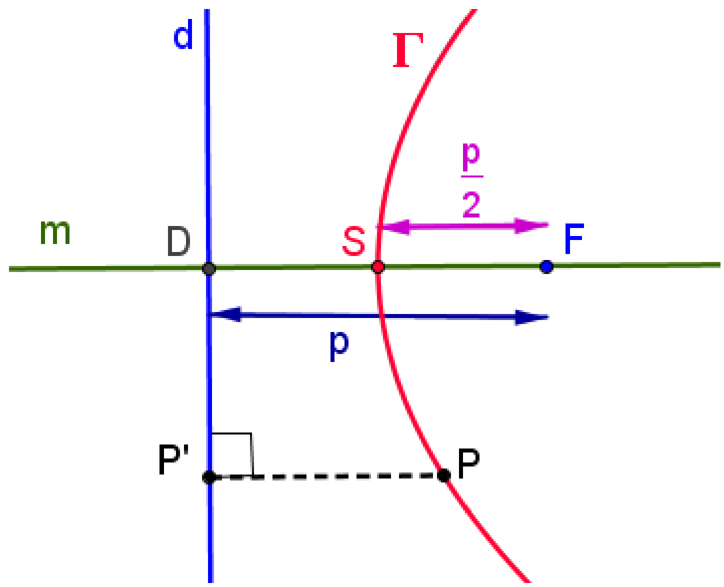
$$\text{donc } OS_1 = \varepsilon\cdot OD \Leftrightarrow a = \frac{c}{a}\cdot OD \Leftrightarrow OD = \frac{a^2}{c}$$

5) Equations cartésiennes réduites d'une parabole

b) Paramètre d'une parabole

Soit Γ une parabole $(\varepsilon = 1)$ de foyer F, de directrice d, d'axe focal m $(m \cap d = \{D\})$ et de sommet S.

Posons $\boxed{p = Fd = FD}$, alors comme S est le milieu de $[DF]$ on a $SD = SF = \frac{p}{2}$:



p est appelé **paramètre** de la parabole Γ

c) Equations cartésiennes d'une parabole

Pour tout point P du plan désignons par P' sa projection orthogonale sur d, alors :

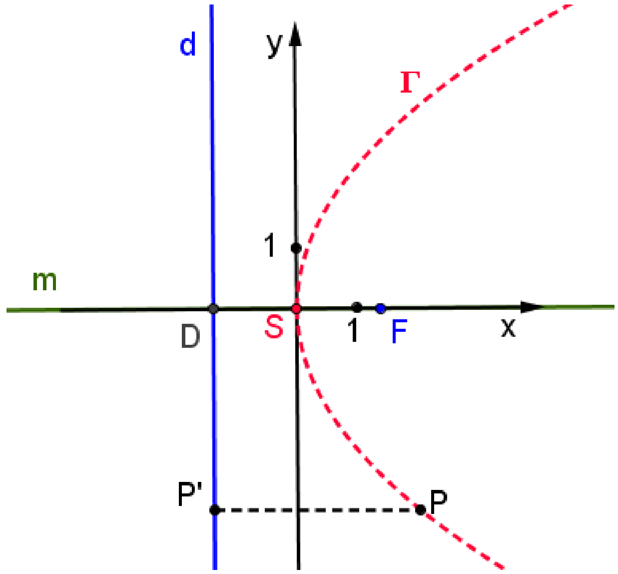
$$P \in \Gamma \Leftrightarrow PF = PP'$$

Afin d'obtenir *une équation aussi simple que possible de cette parabole* nous choisirons un **R.O.N.** (afin de pouvoir utiliser la formule sur la distance de deux points) **d'origine S** (pour avoir $S(0,0)$) et **d'axes parallèles à m et à d** (pour que soit l'abscisse, soit l'ordonnée de F soit nulle, pour que P et P' aient soit la même abscisse, soit la même ordonnée et enfin pour des raisons de symétrie).

Ceci peut se faire de 4 manières différentes :

1re manière : **m** est l'**axe des abscisses** orienté de S vers F et l'axe des ordonnées est la droite passant par S qui est parallèle à d

Alors $S(0,0)$; $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$; $P(x,y)$; $P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$:



$P(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow PF^2 = PP'^2$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2$$

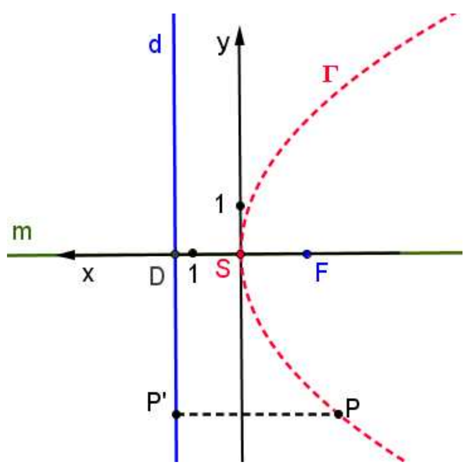
$$\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)$$

Remarque : en changeant l'orientation de l'axe des y on ne change absolument rien à ce calcul, donc cette orientation ne joue aucun rôle ici !

2^e^ manière : **m** est l'**axe des abscisses** orienté de S vers D et l'axe des ordonnées est la droite passant par S qui est parallèle à d

Alors : $S(0,0)$; $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$; $P(x,y)$; $P'\left(\frac{p}{2},y\right)$

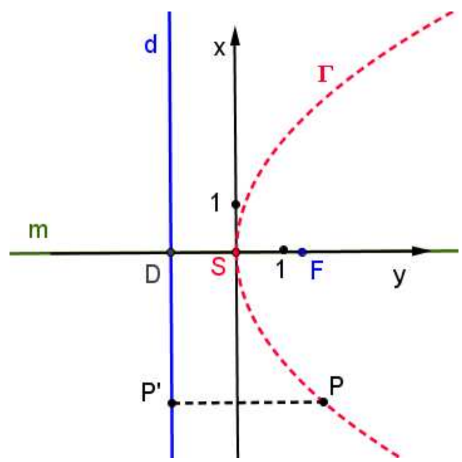


$$\begin{aligned}
P(x,y)\in\Gamma \quad &\Leftrightarrow PF^2 = PP'^2\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2\\
&\Leftrightarrow x^2+px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}\\
&\Leftrightarrow \boxed{y^2=-2px} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)
\end{aligned}$$

Remarque : ici encore l'orientation de l'axe des y ne joue aucun rôle !

3^e manière : **m** est l'**axe des ordonnées** orienté de S vers F et l'axe des abscisses est la droite passant par S qui est parallèle à d

Alors : $S(0,0);\ F\left(0,\frac{p}{2}\right);\ P(x,y);\ P'\left(x,-\frac{p}{2}\right)$

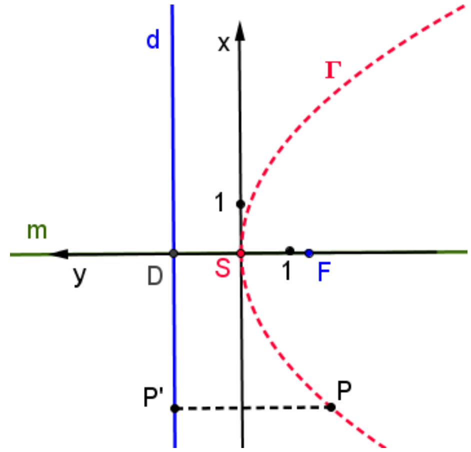


$$\begin{aligned}
P(x,y)\in\Gamma \quad &\Leftrightarrow PF^2 = PP'^2\\
&\Leftrightarrow (x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4}\\
&\Leftrightarrow \boxed{x^2=2py} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)
\end{aligned}$$

Remarque : en changeant l'orientation de l'axe des x on ne change absolument rien à ce calcul, donc cette orientation ne joue aucun rôle ici !

4^e manière : **m** est l'**axe des ordonnées** orienté de S vers D et l'axe des abscisses est la droite passant par S qui est parallèle à d

Alors : $S(0,0);\ F\left(0,-\frac{p}{2}\right);\ P(x,y);\ P'\left(x,\frac{p}{2}\right)$



$$P(x,y)\in\Gamma \iff PF^2 = PP'^2$$

$$\iff (x-0)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2=(x-x)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\iff x^2+y^2+py+\frac{p^2}{4}=y^2-py+\frac{p^2}{4}$$

$$\iff \boxed{x^2=-2py} \quad (\text{équation cartésienne réduite de } \Gamma)$$

Remarque : ici encore l'orientation de l'axe des x ne joue aucun rôle !

<u>**Conclusion**</u>

Dans un R.O.N. d'origine S et d'axes parallèles à m et à d **l'équation cartésienne de la parabole** Γ est de l'une des quatre formes suivantes :

- $y^2 = 2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers F
- $y^2 = -2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers D
- $x^2 = 2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers F
- $x^2 = -2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers D

c) Construction d'une parabole

- Si $x^2 = 2py \iff y = \frac{1}{2p}x^2$ alors $\Gamma = G_f$ avec $f(x) = \frac{1}{2p}x^2$
- Si $x^2 = -2py \iff y = -\frac{1}{2p}x^2$ alors $\Gamma = G_f$ avec $f(x) = -\frac{1}{2p}x^2$
- Si $y^2 = 2px \iff y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$ alors $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ avec $f(x) = \sqrt{2px}$
- Si $y^2 = -2px \iff y = \sqrt{-2px}$ ou $y = -\sqrt{-2px}$ alors $\Gamma = G_f \cup G_{-f}$ avec $f(x) = \sqrt{2px}$

L'étude et la construction des courbes de ces fonctions très simples a été vue au cours d'analyse et ne présente aucune difficulté.

Exercices 1, 2, 3

6) Equations cartésiennes réduites d'une ellipse et d'une hyperbole

a) Equations communes aux ellipses et aux hyperboles

Soit Γ une conique avec $\varepsilon \neq 1$ de foyer F, de directrice d, d'axe focal m $(m \cap d = \{D\})$ et de sommets S_1 et S_2. En posant $O =$ milieu de $[S_1, S_2]$, $a = OS_1 = OS_2$ et $c = OF$ on sait que $\varepsilon = \frac{c}{a}$ et $OD = \frac{a^2}{c}$ (voir p 10). Nous noterons **m'** la droite passant par O et perpendiculaire à m ($O \in m'$ et $m' \perp m$).

Pour tout point P du plan désignons par P' sa projection orthogonale sur d, alors :

$$P \in \Gamma \Leftrightarrow PF = \varepsilon \cdot PP' \Leftrightarrow PF^2 = \varepsilon^2 \cdot PP'^2 \Leftrightarrow PF^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot PP'^2$$

Afin d'obtenir *une équation aussi simple que possible de cette conique* nous choisirons un **R.O.N.** (afin de pouvoir utiliser la formule sur la distance de deux points) **d'origine O** (O occupe en effet une position centrale dans les formules que nous venons de rappeler) et **d'axes m et m'** (pour que soit l'abscisse, soit l'ordonnée de F, D, S_1 et S_2 soit nulle et pour que P et P' aient soit la même abscisse, soit la même ordonnée).

Ceci peut se faire de 2 manières différentes :

1^{re} manière : $\boxed{(Ox) = m \text{ et } (Oy) = m'}$

Comme S_1, D et F se trouvent toujours du même côté de O et S_2 de l'autre côté (voir figures pages 8 et 9) on peut orienter (Ox) de manière à avoir soit

$$S_1(a,0),\ S_2(-a,0),\ D\left(\frac{a^2}{c},0\right),\ F(c,0),\ P(x,y) \text{ et } P'\left(\frac{a^2}{c},y\right) \qquad (1),$$

$$\text{soit } S_1(-a,0),\ S_2(a,0),\ D\left(-\frac{a^2}{c},0\right),\ F(-c,0),\ P(x,y) \text{ et } P'\left(-\frac{a^2}{c},y\right) \qquad (2)$$

L'orientation de (Oy) ne joue aucun rôle ici parce que les *ordonnées* de S_1, S_2, D et F valent toutes 0 et que P et P' ont les *mêmes ordonnées* !

Comme les deux manières aboutissent exactement au même résultat (à vérifier en exercice !) nous nous contenterons de faire les calculs dans le cas (1) :

$$
\begin{aligned}
P(x,y)\in\Gamma &\Leftrightarrow PF^2=\frac{c^2}{a^2}\cdot PP'^2\\
&\Leftrightarrow (x-c)^2+(y-0)^2=\frac{c^2}{a^2}\left[\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2+(y-y)^2\right]\\
&\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x^2-2\frac{a^2}{c}x+\frac{a^4}{c^2}\right)\\
&\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2 \quad |\cdot a^2\\
&\Leftrightarrow a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2+a^4\\
&\Leftrightarrow \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \quad |\div a^2\left(a^2-c^2\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1
\end{aligned}
$$

<u>2^e manière</u> : $\boxed{(Oy)=m \text{ et } (Ox)=m'}$

Pour les mêmes raisons que plus haut on peut orienter (Oy) de manière à avoir soit

$$S_1(0,a),\ S_2(0,-a),\ D\left(0,\frac{a^2}{c}\right),\ F(0,c),\ P(x,y) \text{ et } P'\left(x,\frac{a^2}{c}\right) \qquad (1),$$

$$\text{soit } S_1(0,-a),\ S_2(0,a),\ D\left(0,-\frac{a^2}{c}\right),\ F(0,-c),\ P(x,y) \text{ et } P'\left(x,-\frac{a^2}{c}\right) (2)$$

Cette fois c'est l'orientation de (Ox) ne joue aucun rôle parce que les *abscisses* de S_1, S_2, D et F valent toutes 0 et que P et P' ont les mêmes *abscisses* !

Comme les deux manières aboutissent exactement au même résultat (à vérifier en exercice !) nous nous contenterons de faire les calculs dans le cas (1) :

$$
\begin{aligned}
P(x,y)\in\Gamma &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-c)^2=\frac{c^2}{a^2}\left[(x-x)^2+\left(y-\frac{a^2}{c}\right)^2\right]\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-2cy+c^2=\frac{c^2}{a^2}\left(y^2-2\frac{a^2}{c}y+\frac{a^4}{c^2}\right)\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-2cy+c^2=\frac{c^2}{a^2}y^2-2cy+a^2 \quad |\cdot a^2\\
&\Leftrightarrow a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=c^2y^2+a^4\\
&\Leftrightarrow a^2x^2+\left(a^2-c^2\right)y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \quad |\div a^2\left(a^2-c^2\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2}=1
\end{aligned}
$$

<u>Conclusion (provisoire)</u>

Dans un R.O.N. d'origine O et d'axes m et m', l'équation d'une conique d'excentricité différente de 1 est de l'une des deux formes suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (\text{si } m=(Ox))$$

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (\text{si } m=(Oy))$$

b) Symétries d'une ellipse et d'une hyperbole

- **O est centre de symétrie de Γ**

  Prenons $m=(Ox)$, notons s_O la symétrie de centre O et $s_O(P)=P'$, alors $P(x,y)\Leftrightarrow P'(-x,-y)$ et par conséquent :

  $$P(x,y)\in\Gamma\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\Leftrightarrow\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{a^2-c^2}=1\Leftrightarrow P'(-x,-y)\in\Gamma,$$

  donc $s_O(\Gamma)=\Gamma$.

  Raisonnement analogue pour $m=(Oy)$.

  Définition

  O est appelé **centre** de Γ et les coniques d'excentricité différentes de 1 (c-à-d les ellipses et les hyperboles) sont appelées **coniques centrées** (par opposition les paraboles sont appelées *coniques non centrées*)

- **La droite m' est aussi un axe de symétrie de Γ**

  Prenons $m=(Ox)$, notons $s_{m'}$ la symétrie d'axe m', $s_{m'}(P)=P'$, alors $P(x,y)\Leftrightarrow P'(-x,y)$ et

  $$P(x,y)\in\Gamma\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\Leftrightarrow\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1\Leftrightarrow P'(-x,y)\in\Gamma$$

  donc $s_{m'}(\Gamma)=\Gamma$.

  Raisonnement analogue pour $m=(Oy)$.

  Définition et notations

  m' est appelé **axe non focal** de Γ et on notera $\mathbf{F'}=s_{m'}(F)$ et $\mathbf{d'}=s_{m'}(d)$.

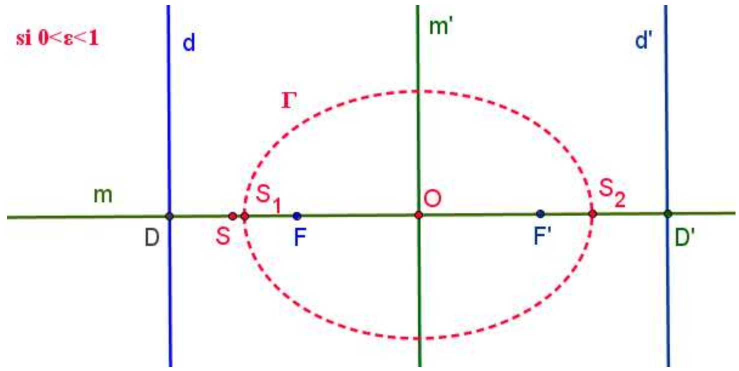
- **F' et d' sont également un foyer et une directrice de Γ. Une conique centrée admet donc deux foyers F et F' et deux directrices d et d' symétriques par rapport à m'.**

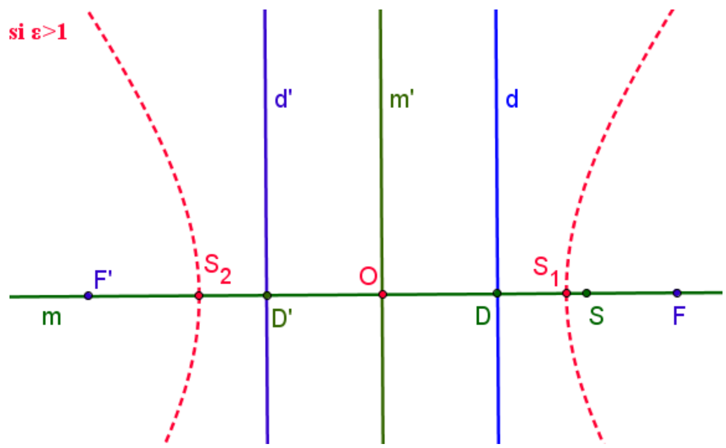
En effet $P \in \Gamma \Leftrightarrow s_{m'}(P) = P' \in \Gamma$ (car m' est axe de symétrie de Γ)

$\Leftrightarrow P'F = \varepsilon \cdot P'd$ (par définition de Γ)

$\Leftrightarrow PF' = \varepsilon \cdot Pd'$ (car $s_{m'}$ conserve les distances)

donc Γ est la conique de foyer F' et de directrice d'.





La distance $\mathbf{FF' = 2c}$ est appelée **distance focale** de Γ

d (resp. d')est la **directrice associée** à F (resp. F')

c) Equation cartésienne réduite d'une ELLIPSE

Soit Γ une ellipse, alors $0 < \varepsilon < 1$ et $\varepsilon = \frac{c}{a}$ donc on a :

$$0 < \frac{c}{a} < 1 \Leftrightarrow 0 < c < a \Leftrightarrow 0 < c^2 < a^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 > 0$$

Ainsi il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a^2 - c^2 = b^2$ et comme $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, on a $b < a$.

Par conséquent l'équation de l'ellipse Γ peut s'écrire sous la forme suivante appelée **équation cartésienne réduite de l'ellipse** :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si $m = (Ox)$ et $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ si $m = (Oy)$

où $b^2 = a^2 - c^2$ et $0 < b < a$.

A retenir : comment reconnaître l'axe focal ?

Si le *grand carré* (toujours noté a^2) se trouve en dessous de x^2 alors $m=(Ox)$ et s'il se trouve en dessous de y^2 alors $m=(Oy)$.

Construction d'une ellipse :

1^er cas : $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

Alors $m=(Ox)$, $S_1(a,0)$, $S_2(-a,0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ car $b^2=a^2-c^2 \Leftrightarrow c^2=a^2-b^2$,

$F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $D\left(\frac{a^2}{c},0\right)$, $D'\left(-\frac{a^2}{c},0\right)$, $d\equiv x=\frac{a^2}{c}$ et $d'\equiv x=-\frac{a^2}{c}$. De plus

$x=0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y^2=b^2 \Leftrightarrow y=b$ ou $y=-b$, donc Γ coupe (Oy) aux deux points : $S_3(0,b)$ et $S_4(0,-b)$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 &\Leftrightarrow y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\\ &\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\end{aligned}$$

En posant $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ on a $\Gamma=G_f\cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f :

C.E. $a^2-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$, donc $D_f=[-a,a]$

$\forall x\in\,]-a,a[\quad f'(x)=\frac{b}{a}\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-bx}{a\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$, et comme a et b sont positifs, $f'(x)$ a le même signe que $-x$.

dérivabilité en a : $\lim\limits_{a^-} f'(x)=\left(\frac{-b}{0^+}\right)=-\infty$

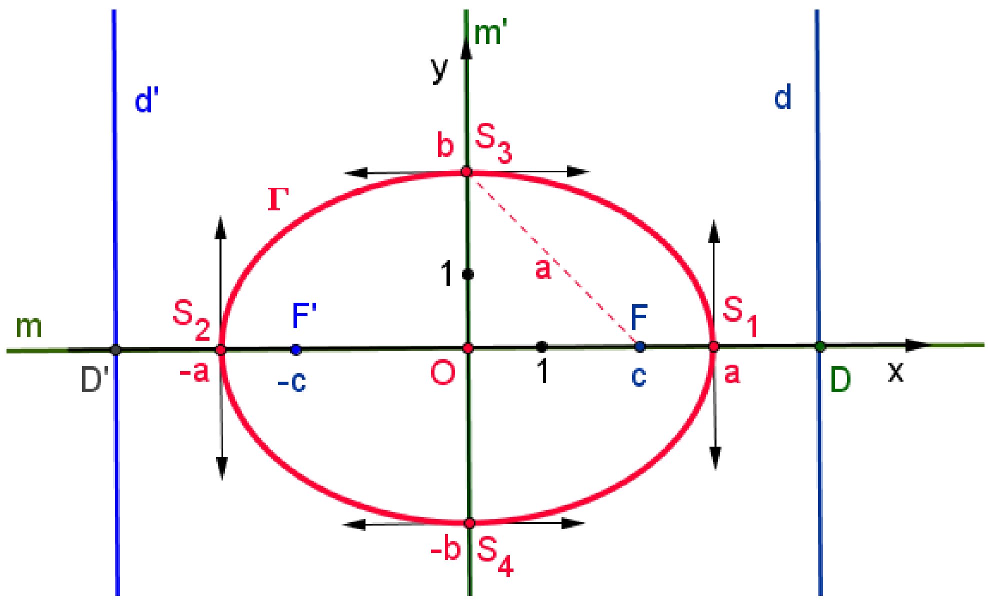
dérivabilité en $-a$: $\lim\limits_{-a^+} f'(x)=\left(\frac{b}{0^+}\right)=+\infty$

donc f n'est dérivable ni en a ni en $-a$ ($D_{f'}=\,]-a,a[$), mais la courbe de f admet des tangentes parallèles à (Oy) aux points $S_1(a,0)$ et $S_2(-a,0)$

$\forall x \in \left]-a, a\right[\quad f''(x) = \cdots = \dfrac{-ab}{\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$, donc la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion et est toujours concave

tableau de variation :

x	$-a$		0		a
f'(x)	$+\infty$	+	0	–	$-\infty$
f	0	↗	b	↘	0



Remarque :

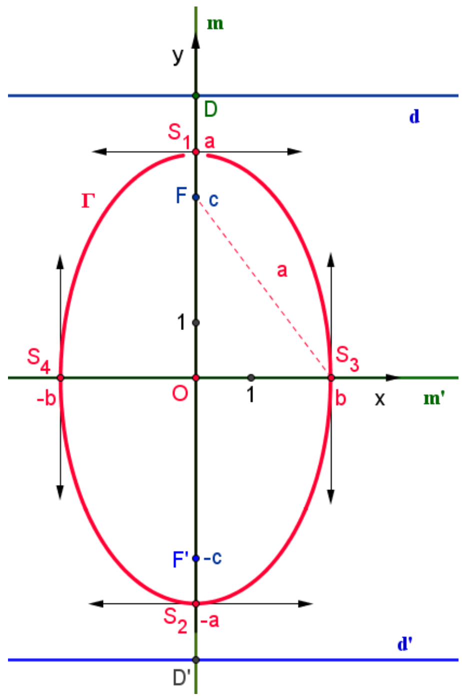
Le triangle OFS_3 étant rectangle en O on a $FS_3{}^2 = FO^2 + OS_3{}^2 = c^2 + b^2 = a^2$, donc $FS_3 = a$

2^e cas : $\boxed{\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1}$

Alors $m = Oy$, $S_1(0, a)$, $S_2(0, -a)$, $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, $D\left(0, \dfrac{a^2}{c}\right)$, $D'\left(0, -\dfrac{a^2}{c}\right)$, $d \equiv y = \dfrac{a^2}{c}$ et $d' \equiv y = -\dfrac{a^2}{c}$. De plus $y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = b^2 \Leftrightarrow x = b$ ou $x = -b$, donc Γ coupe (Ox) aux deux points : $S_3(b, 0)$ et $S_4(-b, 0)$. Par ailleurs :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow y^2=a^2-\frac{a^2x^2}{b^2}$$
$$\Leftrightarrow y^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2} \text{ ou } y=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$$

En posant $f(x)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$ on a $\Gamma=G_f \cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f qui est analogue à la précédente (exercice !). On obtient alors la courbe suivante :



Définitions

Les points : S_3 et S_4 sont également appelés **sommets** de l'ellipse qui est ainsi la seule conique à avoir quatre sommets !

Le segment $[S_1,S_2]$ de longueur 2a est appelé **grand axe**, et le segment $[S_3,S_4]$ de longueur 2b est appelé **petit axe** de l'ellipse.

d) Equation cartésienne réduite d'une HYPERBOLE

Soit Γ une hyperbole : $\varepsilon>1$, et comme $\varepsilon=\frac{c}{a}$ on a :

$$\frac{c}{a}>1 \Leftrightarrow c>a>0 \Leftrightarrow c^2>a^2 \Leftrightarrow a^2-c^2<0 \Leftrightarrow c^2-a^2>0$$

Ainsi il existe $b\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $b^2=c^2-a^2$.

Par conséquent l'équation de l'hyperbole Γ peut s'écrire sous la forme suivante appelée **équation cartésienne réduite de l'hyperbole** :

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ si $m=(Ox)$ et $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ si $m=(Oy)$

où $b^2=c^2-a^2$.

Remarques

- C'est le terme précédé d'un « + » qui indique quel est l'axe focal m
- Pour les hyperboles on peut avoir $a<b$ ou $a>b$:

  a^2 se trouve dans le terme précédé d'un « + »

  b^2 se trouve dans le terme précédé d'un « − »
- Comme $b^2=c^2-a^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$, a et b sont les deux côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut c.

Construction d'une hyperbole :

1^er cas : $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

Alors $m=Ox$, $S_1(a,0)$, $S_2(-a,0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ car $c^2=a^2+b^2$, $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $D\left(\frac{a^2}{c},0\right)$, $D'\left(-\frac{a^2}{c},0\right)$, $d\equiv x=\frac{a^2}{c}$ et $d'\equiv x=-\frac{a^2}{c}$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2\\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)\\ &\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \text{ ou } y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\end{aligned}$$

En posant $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ on a $\Gamma=G_f\cup G_{-f}$ et il suffit de faire <u>l'étude de f</u> :

C.E. : $x^2-a^2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -a$ ou $x\geq a$ donc $D_f=(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)=\mathbb{R}\setminus]-a,a[$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{+\infty} f=\lim_{+\infty}\frac{b}{a}\sqrt{x^2}=+\infty\\ &\lim_{-\infty} f=+\infty\end{aligned}\right\}\text{pas d'A.H.}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{+\infty}\frac{b}{a}\frac{x}{x}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{+\infty}\left(f(x)-\frac{b}{a}x\right)=\lim_{+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)=\lim_{+\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$
$$=\lim_{+\infty}\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=\lim_{+\infty}\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=\left(\frac{-ab}{+\infty}\right)=0$$

donc on a une A.O.D. d'équation $y=\frac{b}{a}x$ et par un calcul analogue on trouve également une A.O.G d'équation $y=-\frac{b}{a}x$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus[-a,a]$ $f'(x)=\frac{b}{a}\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{bx}{a\cdot\sqrt{x^2-a^2}}$, et comme a et b sont positifs, $f'(x)$ a le même signe que x.

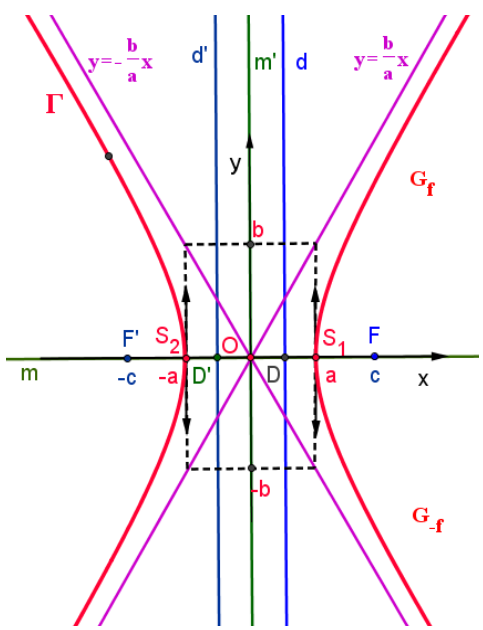
dérivabilité en a : $\lim_{a^-}f'(x)=\left(\frac{b}{0^+}\right)=+\infty$ et en $-a$: $\lim_{-a^+}f'(x)=\left(\frac{-b}{0^+}\right)=-\infty$

donc f n'est dérivable ni en a ni en $-a$ ($D_{f'}=\mathbb{R}\setminus[-a,a]$), mais la courbe de f admet des tangentes parallèles à Oy aux points $S_1(a,0)$ et $S_2(-a,0)$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus[-a,a]$ $f''(x)=\cdots=\frac{-ab}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}<0$, donc la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion et est toujours concave

tableau de variation :

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
f'(x)		$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
f	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$



<u>2^e cas</u> : $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1}$

Alors $m=(Oy)$, $S_1(0,a)$, $S_2(0,-a)$, $F(0,c)$, $F'(0,-c)$, $D\left(0,\dfrac{a^2}{c}\right)$, $D'\left(0,-\dfrac{a^2}{c}\right)$,

$d\equiv y=\dfrac{a^2}{c}$ et $d'\equiv y=-\dfrac{a^2}{c}$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 &\Leftrightarrow y^2=\frac{a^2x^2}{b^2}+a^2\\ &\Leftrightarrow y^2=\frac{a^2}{b^2}\left(x^2+b^2\right)\\ &\Leftrightarrow y=\frac{a}{b}\sqrt{x^2+b^2} \text{ ou } y=-\frac{a}{b}\sqrt{x^2+b^2}\end{aligned}$$

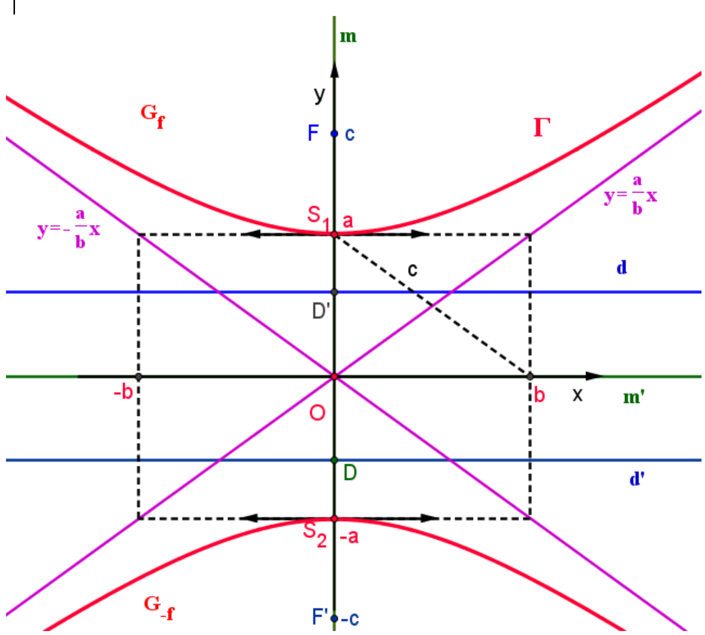
En posant $f(x)=\dfrac{a}{b}\sqrt{x^2+b^2}$ on a $\Gamma=G_f\cup G_{-f}$ et il suffit de faire l'étude de f :

$D_f=\mathbb{R}$, A.O.D. $y=\dfrac{a}{b}x$,A.O.G. $y=-\dfrac{a}{b}x$, $f'(x)\dfrac{ax}{b\cdot\sqrt{x^2+b^2}}$ même signe que x ,

$f''(x)=\dfrac{ab}{\left(x^2+b^2\right)\sqrt{x^2+b^2}}>0$, donc la courbe de f n'admet pas de point d'inflexion

et est toujours convexe et on a le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	
f	$+\infty$	↘	a	↗	$+\infty$



e) Remarques concernant les coefficients a et b

- Si dans l'équation d'une **ellipse** on prenait $a=b$ on obtiendrait $b^2=a^2-c^2 \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow \varepsilon=0$ et $x^2+y^2=a^2=b^2$ c'est-à-dire l'équation du cercle de centre O et de rayon a qui serait alors une « ellipse d'excentricité 0 ». Or ceci n'a <u>pas de sens dans le cadre de l'équation focale</u> puisque $PF=0\cdot Pd \Leftrightarrow PF=0 \Leftrightarrow P=F$ et la conique d'excentricité 0 serait réduite au seul point F ! Il reste néanmoins que plus l'excentricité est proche de 0, plus les deux foyers sont proches (puisque alors c serait également très proche de 0) et les deux axes de l'ellipse de longueurs voisines, c'est-à-dire que ***plus l'excentricité est proche de 0 et plus l'ellipse ressemble au cercle de centre O et de rayon*** $a\approx b$! De même on voit que plus l'excentricité d'une ellipse est proche de 1, plus c est proche de a donc b est proche de 0, plus les foyers sont éloignés l'un de l'autre et plus l'ellipse est « aplatie ».
- Par contre il est parfaitement possible d'avoir $a=b$ dans le cas d'une hyperbole. On a alors :
  - $c^2=a^2+b^2=2a^2 \Leftrightarrow c=\sqrt{2}\cdot a \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\sqrt{2} \Leftrightarrow e=\sqrt{2}$
  - les asymptotes ont pour équations $y=x \text{ et } y=-x$ (puisque $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}=1$) : ce sont les deux bissectrices (perpendiculaires !) du repère.

  Une telle hyperbole est appelée **hyperbole équilatère**.
- Dans le cas d'une hyperbole, si $\varepsilon\approx 1$ alors $c\approx a \text{ et } b\approx 0$, donc les deux branches de l'hyperbole sont très « resserrées » autour de l'axe focal. Par contre si ε est très grand alors $c\approx b \text{ et } a\approx 0$ et par conséquent les deux branches de l'hyperbole sont très « éloignées » de l'axe focal.
- ***A retenir*** : La lettre qui se trouve en dessous de y^2 dans l'équation d'une hyperbole se trouve également au <u>numérateur</u> de la pente de ses A.O. !

Exercices 4, 5, 6

7) Courbes algébriques du second degré

Comme nous l'avons annoncé au premier paragraphe, nous allons maintenant définir les *coniques comme courbes algébriques du second degré*.

Définition

On appelle **conique** le lieu géométrique Γ des points $M(x,y)$, dans un R.O.N. $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, dont les coordonnées vérifient une équation générale du second degré :

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0 \quad (*)$$

(où les coefficients réels A, B, …, F ne sont pas tous nuls)

On peut montrer (*hors programme !*) qu'en faisant un changement de repère par rotation autour de O d'un angle bien choisi on peut toujours s'arranger pour que dans le nouveau repère l'équation (*) soit de la forme :

$$ax^2+by^2+cx+dy+e=0 \quad (**)$$

En d'autres termes on peut supposer, *sans perte de généralité*, que $F=0$.
L'étude générale de l'équation (**) étant très longue en raison des nombreux cas qu'il faut distinguer suivant les valeurs des coefficients a, b, …, e, nous nous contenterons de traiter les différents cas qui peuvent se présenter par des exemples.

Exemple 1 : $a=b=e=1$ et $c=d=0$

$x^2+y^2+1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=-1$, ce qui est impossible, donc $\Gamma=\varnothing$ (conique dégénérée).

Exemple 2 : $a=b=0$

$cx+dy+e=0$, ce qui est l'équation cartésienne d'une droite, donc $\Gamma=\text{droite}$ (conique dégénérée).

Exemple 3 : $a=1$, $b=c=d=0$ et $e=-1$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$, alors $\Gamma=d_1\cup d_2$ où d_1 et d_2 sont les droites strictement parallèles d'équations $d_1 \equiv x=1$ et $d_2 \equiv x=-1$. Ceci n'étant pas une conique au sens défini au début (intersection d'un double cône et d'un plan) on peut supposer qu'on n'a pas $b=d=0$ ou $a=c=0$.

Exemple 4 : $a = 4$, $b = -1$ et $c = d = e = 0$

$4x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = 2x$ ou $y = -2x$, alors $\Gamma = d_1 \cup d_2$ où d_1 et d_2 sont les droites d'équations $d_1 \equiv y = 2x$ et $d_2 \equiv y = -2x$ (conique dégénérée).

Exemple 5 : $a > 0, b > 0$ et $c = d = e = 0$

$ax^2 + by^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$, donc $\Gamma = \{O\}$ (conique dégénérée).

Exemple 6 : $a = b = 1,\ c = -2,\ d = 4$ et $e = 5$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $y = -2$,

donc $\Gamma = \{A(1,-2)\}$ (conique dégénérée).

Exemple 7 : $a = b = 1,\ c = -2,\ d = 4$ et $e = -20$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$,

donc Γ est le **cercle** de centre $A(1,-2)$ et de rayon 5.

Exemple 8 : $a = 4,\ b = 25,\ c = d = 0$ et $e = -100$

$4x^2 + 25y^2 - 100 = 0 \,|\, \div 100 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, donc Γ est une **ellipse** d'axe focal $m = (Ox)$

avec : $a = 5,\ b = 2,\ S_1(5,0),\ S_2(-5,0),\ S_3(0,2),\ S_4(0,-2),\ b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{21} \approx 4{,}58$,

$F\left(\sqrt{21},0\right), F'\left(-\sqrt{21},0\right), \varepsilon = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}92, d \equiv x = \dfrac{25}{\sqrt{21}}, d' \equiv x = -\dfrac{25}{\sqrt{21}}$

Exemple 9 : $a = 9,\ b = 4,\ c = -54,\ d = 40$ et $e = 145$

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 54x + 40y + 145 = 0 &\Leftrightarrow 9\left(x^2 - 6x\right) + 4\left(y^2 + 10y\right) + 145 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9(x-3)^2 - 81 + 4(y+5)^2 - 100 + 145 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9(x-3)^2 + 4(y+5)^2 = 36 \,|\, \div 36 \qquad , \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

posons : $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y+5 \end{cases}$ et $\Omega(3,-5)$, alors dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ la conique a pour équation : $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{9}=1$ donc Γ est une **ellipse** d'axe focal $m=(\Omega Y)$ avec :

$a=3,\ b=2,\ S_1(0{,}3),\ S_2(0,-3),\ S_3(2{,}0),\ S_4(-2{,}0),\ b^2=a^2-c^2 \Leftrightarrow c=\sqrt{5}\approx 2{,}24,$

$F(0,\sqrt{5}),\ F'(0,-\sqrt{5}),\ \varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}75,\ d\equiv Y=\dfrac{9}{\sqrt{5}}\approx 4{,}02,\ d'\equiv Y=-\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

Exemple 10 : $a=4,\ b=-9,\ c=16,\ d=126$ et $e=-429$

$$\begin{aligned}
4x^2-9y^2+16x+126y-429=0 &\Leftrightarrow 4(x^2+4x)-9(y^2-14y)-429=0\\
&\Leftrightarrow 4(x+2)^2-16-9(y-7)^2+441-429=0\\
&\Leftrightarrow 4(x+2)^2-9(y-7)^2=4 \,|\div 4\\
&\Leftrightarrow (x+2)^2-\frac{9}{4}(y-7)^2=1\\
&\Leftrightarrow (x+2)^2-\frac{(y-7)^2}{\frac{4}{9}}=1
\end{aligned}$$

posons : $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-7 \end{cases}$ et $\Omega(-2,7)$, alors dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ la conique a pour équation : $X^2-\dfrac{Y^2}{\frac{4}{9}}=1$ donc Γ est une **hyperbole** d'axe focal $m=(\Omega X)$ avec :

$a=1,\ b=\dfrac{2}{3},\ S_1(1{,}0),\ S_2(-1{,}0),\ \text{A.O. } Y=\dfrac{2}{3}X \text{ et } Y=-\dfrac{2}{3}X,\ c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow c=\dfrac{\sqrt{13}}{3}\approx 1{,}2$

$F\left(\dfrac{\sqrt{13}}{3},0\right),\ F'\left(-\dfrac{\sqrt{13}}{3},0\right),\ \varepsilon=\dfrac{\sqrt{13}}{3},\ d\equiv X=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\approx 0{,}83,\ d'\equiv X=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

Exemple 11 : $a=0,\ b=1,\ c=-10,\ d=12$ et $e=66$

$$\begin{aligned}
y^2-10x+12y+66=0 &\Leftrightarrow (y+6)^2-36-10x+66=0\\
&\Leftrightarrow (y+6)^2=10x-30\\
&\Leftrightarrow (y+6)^2=10(x-3)
\end{aligned}$$

posons : $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y+6 \end{cases}$ et $\Omega(3,-6)$, alors dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ la conique a pour équation : $Y^2 = 10X$ donc Γ est une **parabole** d'axe focal $m = (\Omega X)$, de sommet Ω, de paramètre $p = 5$, de foyer $F\left(\frac{5}{2},0\right)$ et de directrice $d \equiv X = -\frac{5}{2}$

Exemple 12 : $a = 3,\ b = 0,\ c = -30,\ d = 1$ et $e = 76$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 30x + y + 76 = 0 &\Leftrightarrow 3\left(x^2 - 10x\right) + y + 76 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-5)^2 - 75 + y + 76 = 0 \\ &\Leftrightarrow y + 1 = -3(x-5)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-5)^2 = -\frac{1}{3}(y+1) \end{aligned}$$

posons : $\begin{cases} X = x-5 \\ Y = y+1 \end{cases}$ et $\Omega(5,-1)$, alors dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ la conique a pour équation : $X^2 = -\frac{1}{3}Y$ donc Γ est une **parabole** d'axe focal $m = (\Omega Y)$, de sommet Ω, de paramètre $p = \frac{1}{6}$, de foyer $F\left(0,-\frac{1}{12}\right)$ et de directrice $d \equiv Y = \frac{1}{12}$.

Exemple 13 : $a = b = 1,\ c = d = 0$ et $e = -25$

L'équation obtenue $x^2 + y^2 = 25$ est celle du **cercle** de centre O et de rayon 5, ce qui montre que d'après la définition page 25 le cercle est bien une conique alors qu'avec l'équation focale on n'obtient que des ellipses, des hyperboles et des paraboles !

Remarque

Dans l'équation générale (*) les 6 coefficients ne sont pas tous nuls, donc en divisant (*) par un de ces coefficients non nuls on obtient une équation générale avec 5 coefficients. Ceci montre qu'une conique est entièrement déterminée par la donnée de 5 de ses points ! Vous pouvez tester ceci en utilisant la commande « conique » dans GEOGEBRA !

Exercices 7, 8, 9

8) Définition bifocale des coniques centrées

Soit Γ une conique centrée (ellipse ou hyperbole) d'axe focal m, de foyers F et F', de directrices d et d' et d'équation focale :

$$\Gamma \equiv PF = \varepsilon \cdot Pd \qquad \text{ou} \qquad \Gamma \equiv PF' = \varepsilon \cdot Pd'$$

a) Exploration à l'aide de GEOGEBRA

Soient deux points F et F', $[AB]$ un segment de longueur s. Nous allons construire les lieux suivants :

- $\mathbb{E} = \{P \,/\, PF + PF' = s\}$
  - Construisons un point $C \in [AB]$, notons $p = AC$ et $q = CB$ et construisons les cercles $\mathcal{C}_1(F, p)$ et $\mathcal{C}_2(F', q)$.
  - Ces deux cercles se coupent si seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées (inégalités triangulaires) :

    $FF' \le p + q \Leftrightarrow FF' \le s\ (1) \qquad p \le q + FF'\ (2) \qquad q \le p + FF'\ (3)$

    Or $(2) \Leftrightarrow p + q \le 2q + FF' \Leftrightarrow s \le 2q + FF' \Leftrightarrow s - FF' \le 2q \Leftrightarrow q \ge \dfrac{s - FF'}{2}$

    et $(3) \Leftrightarrow q + p \le 2p + FF' \Leftrightarrow s \le 2p + FF' \Leftrightarrow s - FF' \le 2p \Leftrightarrow p \ge \dfrac{s - FF'}{2}$.

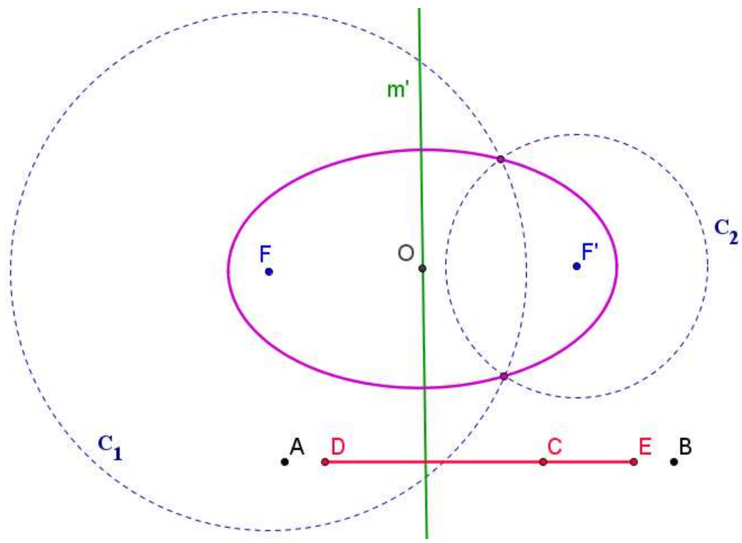
    De plus $(2) \Leftrightarrow p + p \le q + p + FF' \Leftrightarrow 2p \le s + FF' \Leftrightarrow p \le \dfrac{s + FF'}{2}$ et de même

    $(3) \Leftrightarrow q + q \le p + q + FF' \Leftrightarrow 2q \le s + FF' \Leftrightarrow q \le \dfrac{s + FF'}{2}$.

    En posant $d = \dfrac{s - FF'}{2}$ on a $s - d = s - \dfrac{s - FF'}{2} = \dfrac{2s - s + FF'}{2} = \dfrac{s + FF'}{2}$ et par conséquent les deux cercles se coupent si et seulement si :

    $FF' \le s\ (1)$, $d \le p \le s - d\ (4)$ et $d \le q \le s - d\ (5)$
  - Effaçons C et construisons deux points D et E sur $[AB]$ tels que $AD = d$ et $BE = d$. Désactivons l'affichage de $[AB]$ et construisons $[DE]$, puis un point $C \in [DE]$. En désignant de nouveau par $p = AC$ et par $q = CB$, et en reconstruisant les cercles $\mathcal{C}_1(F, p)$ et $\mathcal{C}_2(F', q)$, on voit que pour tout

$C \in [DE]$ les trois conditions (1), (4) et (5) sont vérifiées. En faisant varier le point C sur $[DE]$ les points d'intersection des deux cercles décrivent $\mathbb{E}$ qu'on obtient de façon complète en utilisant la commande « lieu ». On constate que $\mathbb{E}$ est l'ellipse de foyers F et F', de centre O et d'axe non focal m'.



- $\mathbb{H} = \{P / |PF - PF'| = s\}$
  - Construisons un segment $[FF']$, sa médiatrice m' et un segment $[AB]$ dont la longueur sera noté s ($s > 0$ car $A \neq B$). On sait que pour tout point $P \in m'$ on a $PF = PF'$, donc $PF - PF' = 0$ et par conséquent $P \notin \mathbb{H}$. Or si P et F sont du même côté de m' on a : $PF < PF'$, donc $|PF - PF'| = PF' - PF$ et si P est du même côté de m' que F' on a : $PF > PF'$, donc $|PF - PF'| = PF - PF'$.
  - Pour obtenir deux nombres positifs (variables !) p et q tels que $p - q = s$ on peut faire la construction suivante :

où $AB = s$, $AC = p$, $BC = q$ (en particulier $q < p$) et C appartient à la demi-droite rouge.

  - Les points d'intersection (éventuels) P et P' des cercles $\mathcal{C}_1(F,p)$ et $\mathcal{C}_2(F',q)$ se trouvant plus près de F' que de F on a : $|PF - PF'| = PF - PF' = p - q = s$, donc ce sont deux points de $\mathbb{H}$. Or ces deux cercles se coupent si et seulement si les inégalités triangulaires suivantes sont vérifiées :

$FF' \le p+q \Leftrightarrow FF'-2q \le p+q-2q \Leftrightarrow FF'-2q \le s \Leftrightarrow \frac{FF'-s}{2} \le q\ (1)$

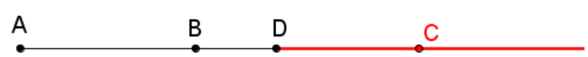
$p \le FF'+q \Leftrightarrow p-q \le FF' \Leftrightarrow s \le FF'\ (2)$

$q \le FF'+p\ (3)$ ce qui est toujours vérifié puisque $q<p$

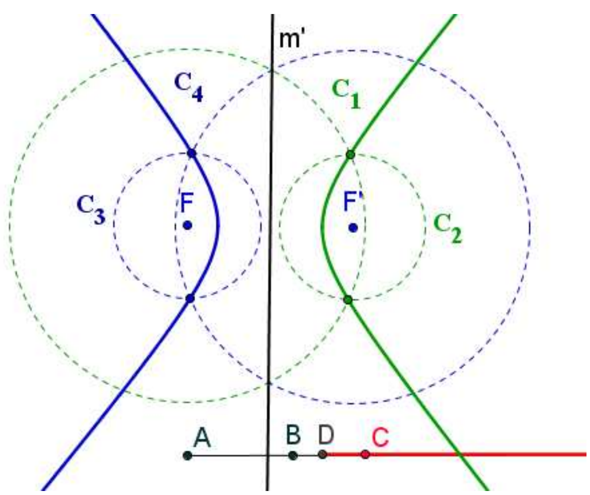
Ainsi en posant $d=\frac{FF'-s}{2}$ les deux cercles $\mathcal{C}_1(F,p)$ et $\mathcal{C}_2(F',q)$ se coupent si et seulement si $FF' \ge s \Leftrightarrow FF' \ge AB$ et $q \ge d \Leftrightarrow BC \ge d$

- De même les points d'intersection (éventuels) P et P' des cercles $\mathcal{C}_3(F,q)$ et $\mathcal{C}_4(F',p)$ se trouvant plus près de F que de F' on a : $|PF-PF'| = PF'-PF = p-q = s$, donc ce sont également deux points de $\mathbb{H}$.

  Les conditions d'existence de ces points d'intersection sont exactement les mêmes que pour les deux premiers cercles.
- Ces calculs préliminaires nous amènent donc à construire une demi-droite $[AB)$, un point $D \in [AB) \setminus [AB]$ tel que $BD = d$, la demi-droite (rouge) d'origine D entièrement contenue dans $[AB)$ et C un point sur cette demi-droite :



- En construisant ensuite les quatre cercles définis plus haut et leurs points d'intersection, on obtient le lieu $\mathbb{H}$. On constate $\mathbb{H}$ est l'hyperbole de foyers F et F', et d'axe non focal m'.



b) Définition bifocale d'une ellipse

Soit Γ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un R.O.N. dont l'axe Ox est égale à l'axe focal m, alors : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$, $d\equiv x=\frac{a^2}{c}$ et $d'\equiv x=-\frac{a^2}{c}$.

Comme l'ellipse est entièrement située entre ses directrices d et d' *(voir figure p 17)*, on a pour tout point $P\in\Gamma$: $Pd++Pd'=dd'=2\frac{a^2}{c}$, d'où :

$$PF+PF'=\varepsilon\cdot Pd+\varepsilon\cdot Pd'=\varepsilon\cdot(Pd+Pd')=\varepsilon\cdot dd'=\frac{c}{a}\cdot 2\cdot\frac{a^2}{c}=2a$$

Réciproquement si $PF+PF'=2a$ alors on a, en posant $P(x,y)$:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\Rightarrow\ldots(\text{exercice!})\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow P\in\Gamma\text{, d'où :}$$

Théorème et définition

Pour toute ellipse Γ de foyers F et F' et de grand axe 2a on a :

$$\forall P\quad P\in\Gamma\Leftrightarrow PF+PF'=2a$$

En d'autres termes $\boxed{\Gamma=\{P/PF+PF'=2a\}}$: c'est la **définition bifocale de l'ellipse.**

c) Définition bifocale d'une hyperbole

Soit Γ une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un R.O.N. dont l'axe Ox est égale à l'axe focal m, alors : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $d\equiv x=\frac{a^2}{c}$ et $d'\equiv x=-\frac{a^2}{c}$.

Comme l'hyperbole est entièrement située à l'extérieur de ses directrices d et d' *(voir figure p 18)*, on a deux possibilités pour tout point $P\in\Gamma$:

- P est du même côté de d que F (donc $Pd<Pd'$ et $Pd'-Pd=dd'$), alors :

  $$PF'-PF=\varepsilon\cdot Pd'-\varepsilon\cdot Pd=\varepsilon\cdot(Pd'-Pd)=\varepsilon\cdot dd'=\frac{c}{a}2\cdot\frac{a^2}{c}=2a$$

- P est du même côté de d' que F' (donc $Pd'<Pd$ et $Pd-Pd'=dd'$), alors :

  $$PF-PF'=\varepsilon\cdot Pd-\varepsilon\cdot Pd'=\varepsilon\cdot(Pd-Pd')=\varepsilon\cdot dd'=\frac{c}{a}2\cdot\frac{a^2}{c}=2a$$

Dans les deux cas on a : $|PF-PF'|=2a$.

Réciproquement si $|PF-PF'|=2a$ alors on a, en posant $P(x,y)$:

$PF - PF' = 2a$ ou $PF' - PF = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ ou $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow \ldots$(exercice!)

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow P \in \Gamma$

Théorème et définition

Pour toute hyperbole Γ de foyers F et F' on a :

$$\forall P \quad P \in \Gamma \Leftrightarrow |PF - PF'| = 2a$$

En d'autres termes $\boxed{\Gamma = \{P / |PF - PF'| = 2a\}}$: c'est la **définition bifocale de l'hyperbole.**

Exercices 10, 11

9) Tangentes à une conique

a) Tangentes à une parabole

Soit Γ une **parabole** de sommet S, de directrice d, d'axe focal m et de paramètre p. Nous avons vu que dans un R.O.N. d'origine S et d'axes parallèles à m et à d l'équation de la parabole Γ est de l'une des quatre formes suivantes :

- $x^2 = 2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers F
- $x^2 = -2py$ si m est l'axe des y orienté de S vers D
- $y^2 = 2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers F
- $y^2 = -2px$ si m est l'axe des x orienté de S vers D

Cherchons l'équation de la tangente (T) à Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$.

- Si $x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2p}x^2$, on a, en posant $f(x) = \dfrac{1}{2p}x^2$:

$$\Gamma = G_f \text{ et } (T) \equiv y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Comme $f'(x) = \dfrac{1}{2p}2x = \dfrac{x}{p}$ et que $x_0{}^2 = 2py_0$ (car $P \in \Gamma$), il vient :

$$\begin{aligned}(T) \equiv y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0) &\Leftrightarrow py - py_0 = x_0x - x_0^2\\ &\Leftrightarrow py - py_0 = x_0x - 2py_0\\ &\Leftrightarrow py + py_0 = x_0x\end{aligned}$$

- Si $x^2 = -2py$ on obtient de même (exercice !) : $(T) \equiv x_0x = -py_0 - py$
- Si $y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$ il faut distinguer trois cas :

<u>**1^er cas**</u> : $y_0 > 0$

Alors $P \in G_f$ où $f(x) = \sqrt{2px}$ (en particulier $y_0 = f(x_0) = \sqrt{2px_0}$) et comme

$f'(x) = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$, donc $f'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}$, on a :

$$\begin{aligned}(T) \equiv y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) &\Leftrightarrow y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)\\ &\Leftrightarrow y_0y - y_0^2 = px - px_0\\ &\Leftrightarrow y_0y - 2px_0 = px - px_0 \ \left(\text{car } y_0^2 = 2px_0\right)\\ &\Leftrightarrow y_0y = px + px_0\end{aligned}$$

<u>**2^e cas**</u> : $y_0 < 0$

Alors $P \in G_f$ où $f(x) = -\sqrt{2px}$ (en particulier $y_0 = f(x_0) = -\sqrt{2px_0}$) et comme $f'(x) = -\frac{p}{\sqrt{2px}}$, donc $f'(x_0) = -\frac{p}{\sqrt{2px_0}} = -\frac{p}{-y_0} = \frac{p}{y_0}$, la suite des calculs et le résultat sont les mêmes que dans le 1^er cas.

<u>**3^e cas**</u> : $y_0 = 0$ (alors $x_0 = 0$ càd $P(0,0)$)

Alors $P \in G_f$ où $f(x) = \sqrt{2px}$ et comme

$\lim\limits_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{0^+} \frac{\sqrt{2px} - 0}{x} = \lim\limits_{0^+} \sqrt{\frac{2p}{x}} = +\infty$, G_f admet l'axe Oy comme tangente, d'où $(T) \equiv x = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot y = px + p \cdot 0$

<u>**Conclusion**</u> : dans les trois cas on obtient : $(T) \equiv y_0y = px + px_0$

Si $y^2 = -2px \Leftrightarrow y = \sqrt{-2px}$ ou $y = -\sqrt{-2px}$ et par un calcul analogue au précédent (exercice !) on obtient : $(T) \equiv y_0y = -px - px_0$

Théorème

La **tangente** (T) à une **parabole** Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation :

- $(T) \equiv x_0 x = py_0 + py$ si $\Gamma \equiv x^2 = 2py$
- $(T) \equiv x_0 x = -py_0 - py$ si $\Gamma \equiv x^2 = -2py$
- $(T) \equiv y_0 y = px + px_0$ si $\Gamma \equiv y^2 = 2px$
- $(T) \equiv y_0 y = -px - px_0$ si $\Gamma \equiv y^2 = -2px$

b) Tangentes à une ellipse

Soit Γ une ellipse d'équation $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $P(x_0, y_0) \in \Gamma$.

Cherchons l'équation de la tangente (T) à Γ en P. Comme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

il faudra distinguer deux cas :

<u>1er cas :</u> $y_0 > 0$ (alors $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$)

Posons $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, alors $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, donc

$f'(x_0) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$ et par conséquent :

$$(T) \equiv y - y_0 = f'(x_0)\left(x - x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}\left(x - x_0\right) \quad \Big| \cdot a\sqrt{a^2 - x_0^2} = a\frac{ay_0}{b} = \frac{a^2 y_0}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 y_0}{b} y - \frac{a^2 y_0}{b} y_0 = -bx_0\left(x - x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b} yy_0 - \frac{a^2}{b} y_0^2 = -bx_0 x + bx_0^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a^2 b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \left(\text{car} \quad P(x_0, y_0) \in \Gamma\right)$$

<u>2^e cas :</u> $y_0 < 0$ (alors $y_0 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$)

Posons $f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, alors $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, donc $f'(x_0) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$

et par un calcul analogue au précédent (exercice !) on obtient exactement le même résultat : $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Dans le cas où $\Gamma \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ on obtient : $(T) \equiv \frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$ par un calcul analogue en échangeant a et b, d'où :

Théorème

La **tangente** (T) à une **ellipse** Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation :

- $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $(T) \equiv \frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

c) Tangentes à une hyperbole

Par des calculs analogues aux précédents (exercice !) on montre que :

Théorème

La **tangente** (T) à une **hyperbole** Γ au point $P(x_0, y_0) \in \Gamma$ a pour équation :

- $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $(T) \equiv \frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{b^2} = 1$ si $\Gamma \equiv \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Remarque : intersection d'une conique et d'une droite

- Pour trouver les points d'intersection d'une conique Γ et d'une droite d (il y en a 0, 1 ou 2) il faut résoudre le système formé par les équations de la droite et de la conique.
- Si $d \cap \Gamma = \varnothing$, on dit que la droite est **extérieure** à la conique (elle peut être asymptote à la conique dans le cas d'une hyperbole).

- Si $d \cap \Gamma = \{I\}$ alors la droite d est soit une tangente, soit une sécante à la conique (si d est parallèle à une asymptote d'une hyperbole).
- Si $d \cap \Gamma = \{I, J\}$ alors la droite d est **sécante** à la conique.

Exercices 12 - 24

10) Propriétés optiques des coniques

a) Propriétés préparatoires (appelées aussi : *lemmes*)

Lemme 1

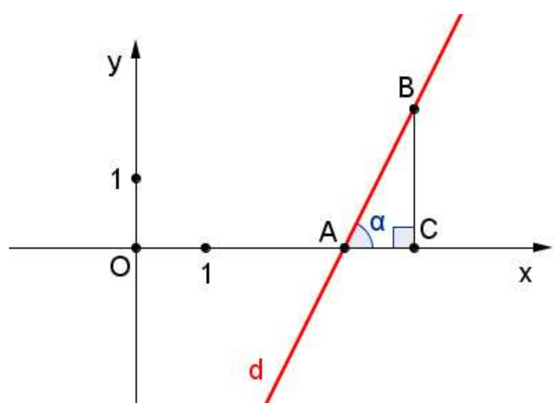
Soit d une droite non parallèle à (Oy) d'équation $d \equiv y = ax + b$ qui coupe (Ox) en A et α l'angle formé par d et Ox tel que $\alpha = \widehat{xAB}$ où $B \in d$ et $y_B > 0$. Alors :

$$\boxed{\tan \alpha = a}$$

démonstration :

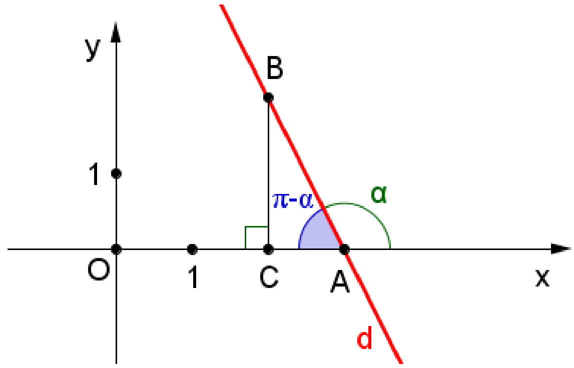
1^{er} cas : $a > 0$

Choisissons B et C tels que le triangle $\Delta(ABC)$ soit rectangle en C et $\overline{AC} = 1$ Alors $BC = \text{pente de } d = a$ et $\tan \alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{1} = a$.



2^{e} cas : $a < 0$

Choisissons B et C tels que le triangle $\Delta(ABC)$ soit rectangle en C et $AC = 1$. Alors $BC = |\text{pente de } d| = -a$ puisque $a < 0$ et $\tan(\pi - \alpha) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{-a}{1} = -a$. Comme $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ on a bien : $\tan \alpha = a$.



<u>3^e cas</u> : $a = 0$

Alors $d = (Ox)$, donc $\alpha = 0$ et $\tan\alpha = \tan 0 = 0 = a$.

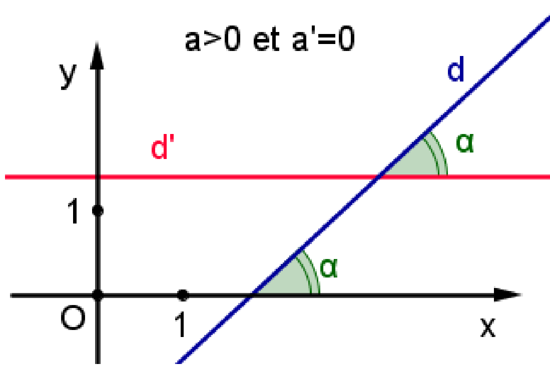
cqfd

Lemme 2

Soient d et d' deux droites d'équations $d \equiv y = ax + b$ et $d' \equiv y = a'x + b'$ (d et d' non parallèles à (Oy)), sécantes (càd $a \neq a'$), non perpendiculaires (donc $aa' \neq -1$) et α l'angle <u>aigu</u> formé par d et d'. Alors : $\boxed{\tan\alpha = \left|\dfrac{a-a'}{1+aa'}\right|}$

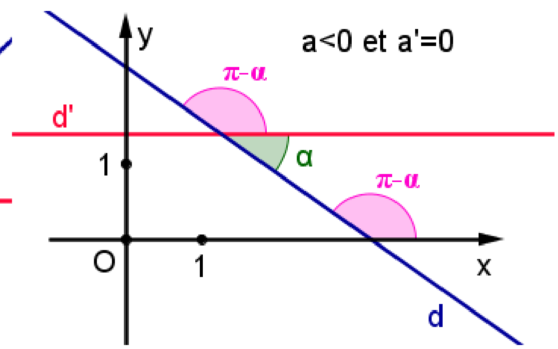
démonstration:

<u>1^er cas</u> : $a = 0$ ou $a' = 0$ (p.ex. $a' = 0$ et $a \neq 0$)



$\tan\alpha = a \quad$ (d'après lemme 1)

$\quad = |a| \quad$ (car $a > 0$)



$\tan(\pi - \alpha) = a \quad$ (d'après lemme 1)

$\Leftrightarrow -\tan\alpha = a$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = -a$

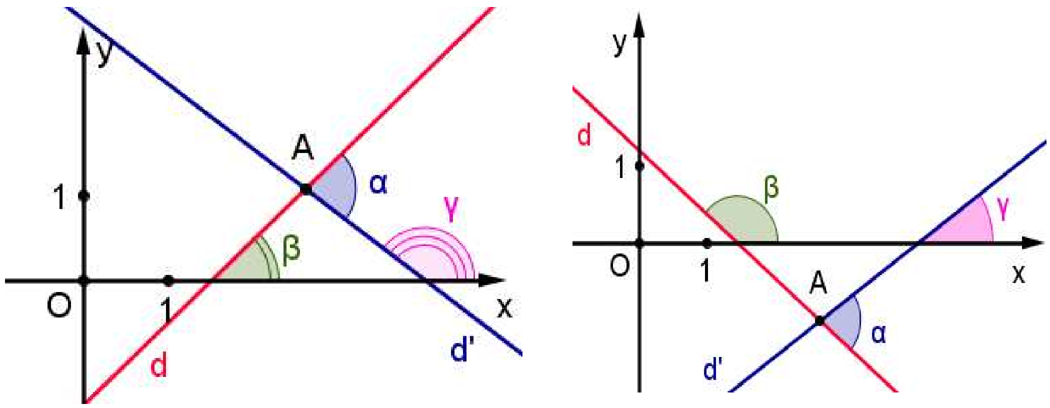
$\Leftrightarrow \tan\alpha = |a| \quad$ (car $a < 0$)

pour les deux figures on a : $\tan\alpha = |a| = \left|\dfrac{a-0}{1+a\cdot 0}\right| = \left|\dfrac{a-a'}{1+a\cdot a'}\right|$

<u>cas général</u> : $a \neq 0$ et $a' \neq 0$

Posons $d \cap d' = \{A\}$, $\alpha =$ angle aigu formé par d et d’, $\beta =$ angle formé par d et (Ox) tel que $\tan\beta = a$ et $\gamma =$ angle formé par d’ et (Ox) tel que $\tan\gamma = a'$ d’après lemme 1.

Dans tous les cas de figure on obtient : $\tan\alpha = \left|\tan(\beta-\gamma)\right|$. Vérifions-le sur deux exemples :



$(\pi-\alpha)+\beta+(\pi-\gamma)=\pi \Leftrightarrow \alpha=\pi+\beta-\gamma$
donc $\tan\alpha = \tan(\beta-\gamma)$

$(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+\gamma=\pi \Leftrightarrow \alpha=\pi-(\beta-\gamma)$
donc $\tan\alpha = -\tan(\beta-\gamma)$

Ainsi dans chaque cas de figure on a : $\tan\alpha = \left|\tan(\beta-\gamma)\right| = \left|\dfrac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}\right| = \left|\dfrac{a-a'}{1+aa'}\right|$

b) Propriété optique de la parabole

Soit Γ une **parabol**e de foyer F, de sommet S et d’axe focal m, $P \in \Gamma \setminus \{S\}$, (T) la tangente à Γ en P, α l’angle <u>aigu</u> formé par (T) et (FP), et β l’angle <u>aigu</u> formé par (T) et m (ou toute autre droite parallèle à m, en particulier celle passant par P).
Alors $\alpha = \beta$.

démonstration :

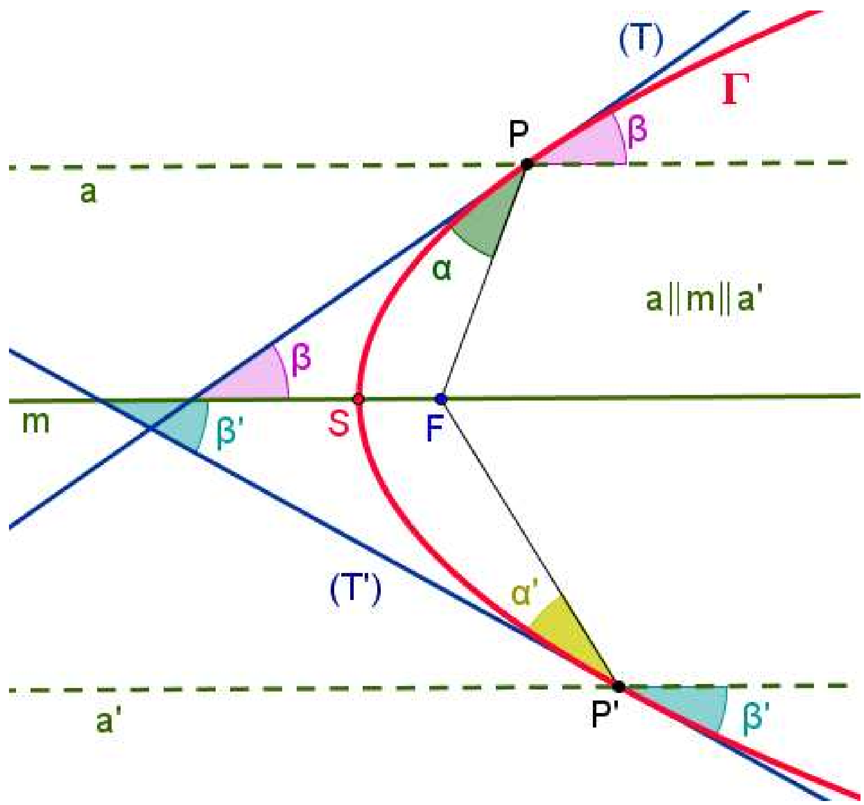
Prenons un R.O.N. d’origine S avec $(Sx) = m$ orienté tel que $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$. Dans ce repère $\Gamma \equiv y^2 = 2px$, pour tout $P(x_0, y_0) \in \Gamma \setminus \{S\}$ on a $x_0 > 0$ et $y_0 \neq 0$ et enfin l’équation de (T) est donnée par : $(T) \equiv y_0 y = px + px_0 \Leftrightarrow y = \dfrac{p}{y_0}x + \dfrac{px_0}{y_0}$. Ainsi la pente de (T) vaut $\dfrac{p}{y_0}$ et celle de m vaut 0.

En appliquant le lemme 2 aux droites (T) et $a \parallel m$ on obtient :

$$\tan\beta = \left|\frac{\frac{p}{y_0}-0}{1+\frac{p}{y_0}\cdot 0}\right| = \left|\frac{p}{y_0}\right|.$$

Pour l'angle α il faut distinguer deux cas :

<u>1^er cas</u> **:** $x_P \neq x_F$ c'est-à-dire (FP) et m ne sont pas orthogonales.



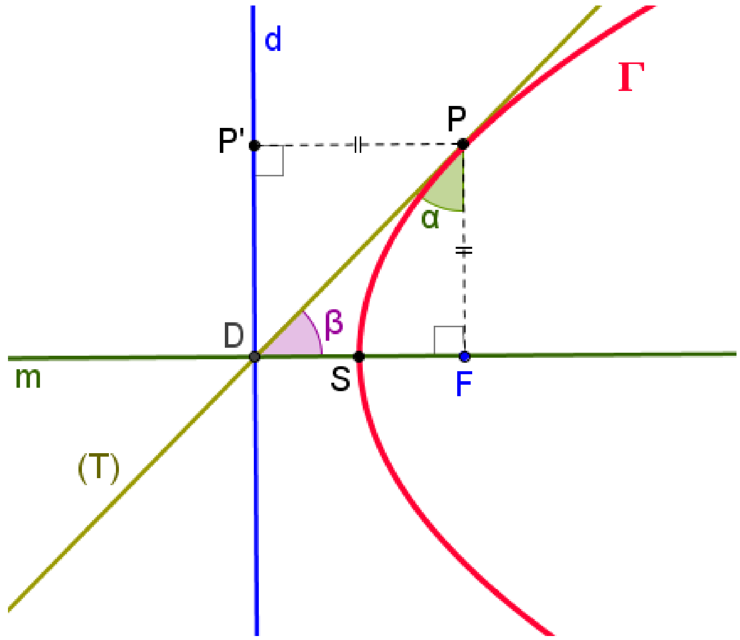
Alors la pente de (FP) vaut $\frac{y_P - y_F}{x_P - x_F} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - \frac{p}{2}} = \frac{2y_0}{2x_0 - p}$ et d'après le lemme 2 on a :

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{2y_0}{2x_0-p}-\frac{p}{y_0}}{1+\frac{2y_0}{2x_0-p}\cdot\frac{p}{y_0}}\right| = \left|\frac{\frac{2y_0^2-p(2x_0-p)}{(2x_0-p)y_0}}{\frac{2x_0-p+2p}{2x_0-p}}\right| = \left|\frac{2y_0^2-2px_0+p^2}{(2x_0+p)y_0}\right|$$

$$= \left|\frac{2\cdot 2px_0-2px_0+p^2}{(2x_0+p)y_0}\right| = \left|\frac{2px_0+p^2}{(2x_0+p)y_0}\right| = \left|\frac{p(2x_0+p)}{(2x_0+p)y_0}\right| = \left|\frac{p}{y_0}\right|$$

Ainsi $\tan\alpha = \tan\beta$, donc $\alpha = \beta$ puisque $\alpha, \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

<u>2^e cas</u> : $x_P = x_F \Leftrightarrow (FP) \perp m$



Alors FPP'D est un rectangle, et comme $PP' = Pf$ (puisque Γ est une parabole) FPP'D est un carré donc $FP = FD \Leftrightarrow y_0 = p$ (1) et $\widehat{FDP} = \widehat{DPF} = \frac{\pi}{4}$ (2).

Or $\tan\beta = \text{pente de (T)} = \frac{p}{y_0}$ (et ceci *indépendamment du point d'intersection de (T) et de m* qui n'est pas *a priori* le point D !) donc $\tan\beta = 1$ d'après (1). Par conséquent $\beta = \frac{\pi}{4}$ et d'après (2) la droite (DP) et la tangente (T) forment le même angle avec m et comme elles passent toutes les deux par P, on a $(T) = (PD)$, donc $\alpha = \beta\left(= \frac{\pi}{4}\right)$.

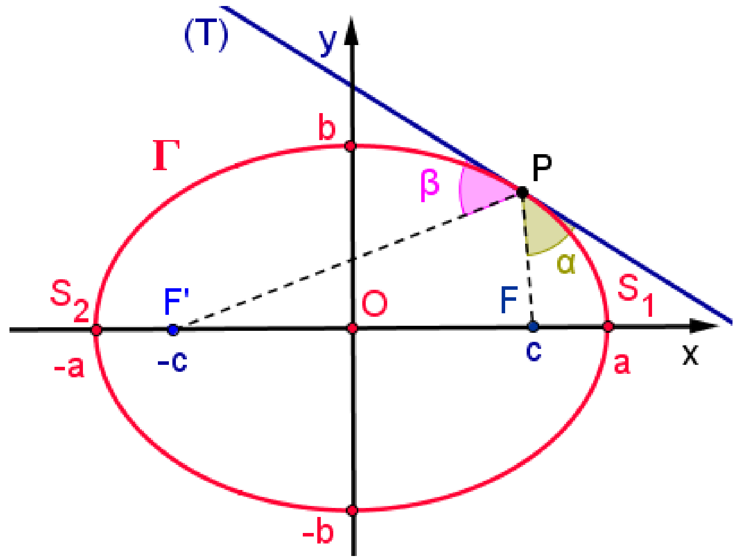
Commentaire

Cette propriété montre que si F est une source lumineuse (p.ex. une ampoule), alors tous les rayons de lumière qui touchent la parabole sont reflétés par celle-ci parallèlement à l'axe focal, c'est-à-dire que la parabole (en fait un paraboloïde, surface obtenue en faisant tourner la parabole autour de son axe focal) peut servir comme miroir d'un projecteur. Inversement tous les rayons lumineux parallèles à l'axe focal sont réfléchis par la parabole sur son foyer, ce qui montre que la parabole peut aussi servir comme miroir d'un télescope (les rayons d'une étoile arrivant sur terre peuvent en effet être considérés comme étant parallèles et l'œil de l'observateur sera placé en F).

c) Propriété optique de l'ellipse

Soit Γ une **ellipse** de foyers F et F', $P \in \Gamma$, (T) la tangente à Γ en P, α l'angle <u>aigu</u> formé par (T) et (FP), et β l'angle <u>aigu</u> formé par (T) et (F'P).

Alors $\alpha = \beta$.



démonstration :

Prenons un R.O.N. d'origine $O = \text{milieu de}[FF']$ avec $(Ox) = m$ orienté tel que

$F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $S_1(a,0)$ et $S_2(-a,0)$. Dans ce repère $\Gamma \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avec

Il faudra distinguer trois cas suivant la position de P :

<u>1^{er} cas</u> : $y_0 = 0$

Alors $P = S_1$ ou $P = S_2$, donc $(T) \equiv x = a$ ou $(T) \equiv x = -a$ et dans les deux cas on a $\alpha = \beta = 0$.

<u>2^{e} cas</u> : $x_0 = c$ ou $x_0 = -c$, c'est-à-dire $(PF) \perp m$ ou $(PF') \perp m$

$$P(\pm c, y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^2b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{b^2}{a}$$

On a donc quatre possibilités : $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, $P\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, $P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ ou $P\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$

Nous traiterons le cas $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$, les calculs pour les autres cas étant analogues.

$$(T) \equiv \frac{cx}{a^2} + \frac{\frac{b^2}{a}y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{cx}{a^2} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{cx}{a} + y = a \Leftrightarrow y = -\frac{c}{a}x + a$$

$(T) \cap m: \quad y = 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a}x = a \Leftrightarrow x = \frac{a^2}{c}$, donc $(T) \cap m = \left\{ D\left(\frac{a^2}{c}, 0\right) \right\}$ et (T) = (PD)

Dans le triangle $\Delta(PDF)$ rectangle en F : $\tan\alpha = \frac{FD}{FP} = \frac{\frac{a^2}{c} - c}{\frac{b^2}{a}} = \frac{\frac{a^2 - c^2}{c}}{\frac{b^2}{a}} = \frac{b^2}{c} \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{a}{c}$.

D'autre part la pente de $F'P = \frac{\frac{b^2}{a} - 0}{c + c} = \frac{b^2}{2ac}$ et la pente de $(T) = -\frac{c}{a}$, donc d'après le lemme2 : $\tan\beta = \left| \frac{\frac{b^2}{2ac} + \frac{c}{a}}{1 - \frac{b^2}{2ac} \cdot \frac{c}{a}} \right| = \left| \frac{\frac{b^2 + 2c^2}{2ac}}{\frac{2a^2 - b^2}{2a^2}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 - c^2 + 2c^2}{2ac}}{\frac{2a^2 + c^2 - a^2}{2a^2}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 + c^2}{2ac}}{\frac{a^2 + c^2}{2a^2}} \right| = \left| \frac{2a^2}{2ac} \right| = \frac{a}{c}$ et

par conséquent $\tan\alpha = \tan\beta$, donc $\alpha = \beta$ puisque $\alpha, \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

<u>3^e cas</u> : $x_0 \neq \pm c$ et $y_0 \neq 0$

$$(T) \equiv \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2 \Leftrightarrow y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x + \frac{b^2}{y_0}.$$

Ainsi la pente de (T) vaut $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, celle de (FP) $\frac{y_0 - 0}{x_0 - c} = \frac{y_0}{x_0 - c}$ et celle (PF') $\frac{y_0}{x_0 + c}$, donc d'après le lemme2 :

$$\tan\alpha = \left| \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{y_0}{x_0 - c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0 (x_0 - c)}{a^2 y_0 (x_0 - c)}}{\frac{a^2 (x_0 - c) - b^2 x_0}{a^2 (x_0 - c)}} \right| = \left| \frac{\frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - b^2 c x_0}{y_0}}{\frac{a^2 x_0 - a^2 c - b^2 x_0}{1}} \right|$$

$$= \left| \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_0}{y_0 \left(x_0 (a^2 - b^2) - a^2 c \right)} \right| = \left| \frac{b^2 (a^2 - c x_0)}{y_0 (x_0 c^2 - a^2 c)} \right| = \left| \frac{b^2 (a^2 - c x_0)}{-c y_0 (a^2 - x_0 c)} \right| = \left| \frac{b^2}{c y_0} \right|$$

$$\tan\beta = \left| \frac{\frac{y_0}{x_0 + c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{y_0}{x_0 + c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} \right| = \cdots = \left| \frac{b^2}{c y_0} \right|$$

par conséquent $\tan\alpha = \tan\beta$, donc $\alpha = \beta$ puisque $\alpha,\beta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

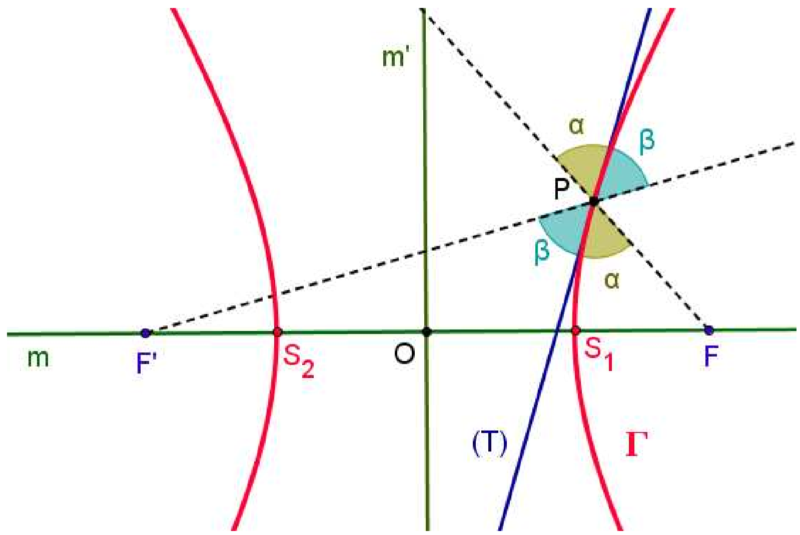
Commentaire

Un rayon lumineux partant d'un foyer dans n'importe quelle direction sera réfléchi par l'ellipse vers l'autre foyer.

d) Propriété optique de l'hyperbole

Soit Γ une **hyperbole** de foyers F et F', $P \in \Gamma$ avec $P \neq$ sommet de Γ, (T) la tangente à Γ en P, α l'angle aigu formé par (T) et (FP), et β l'angle aigu formé par (T) et (F'P). Alors $\alpha = \beta$.

La démonstration, laissée en exercice, est analogue à la précédente



Commentaire :

Un miroir hyperbolique réfléchit un rayon issu d'un foyer comme s'il était issu de l'autre foyer !

Exercices 25 - 27

FORMULAIRE SUR LES CONIQUES

d'équation focale : $\boxed{PF = \varepsilon \cdot Pd}$

A) PARABOLES

- une **directrice** d, **un foyer** F, **excentricité** $\varepsilon = 1$
- **axe focal m** : $F \in m$, $m \perp d$ et $m \cap d = \{D\}$ (m est un axe de symétrie)
- **paramètre p** de la parabole : $p = Fd = FD$
- un **sommet** $S =$ milieu de $[DF]$: $SF = SD = \frac{p}{2}$
- **équation** dans un R.O.N. d'origine S et d'axes parallèles à m et à d :

si $m = (Ox)$ orienté de S vers F alors $\boxed{y^2 = 2px}$, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, $d \equiv x = -\frac{p}{2}$ et $(T) \equiv y_0 y = px + px_0$

si $m = (Ox)$ orienté de S vers D alors $\boxed{y^2 = -2px}$, $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, $d \equiv x = \frac{p}{2}$ et $(T) \equiv y_0 y = -px - px_0$

si $m = (Oy)$ orienté de S vers F alors $\boxed{x^2 = 2py}$, $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, $d \equiv y = -\frac{p}{2}$ et $(T) \equiv x_0 x = py + py_0$

si $m = (Oy)$ orienté de S vers D alors $\boxed{x^2 = -2py}$, $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, $d \equiv y = \frac{p}{2}$ et $(T) \equiv x_0 x = -py - py_0$

où (T) est la tangente à l'ellipse au point $P(x_0;y_0)$

B) CONIQUES CENTREES : ELLIPSES et HYPERBOLES

1) Coniques centrées

- **axes** : axes focal **m** et axe non focal **m'**

  $m \perp m'$ et m et m' sont les axes de symétrie de la conique
- deux **sommets** sur l'axe focal m : S_1 et S_2
- un **centre** : le milieu **O** de $[S_1,S_2]$, on pose : $\mathbf{a} = OS_1 = OS_2$

  O est centre de symétrie de la conique et $O \in m \cap m'$
- deux **foyers** $F, F' \in m$ symétriques par rapport à O, on pose $\mathbf{c} = OF = OF'$

  la distance $FF' = 2c$ est appelée **distance focale**
- deux **directrices** d et d' symétriques par rapport à m' avec $\boxed{Od = Od' = \frac{a^2}{c}}$
- **excentricité** $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$

2) Ellipses $(\varepsilon < 1)$

- le nombre <u>réel positif</u> **b < a** est défini par : $\boxed{b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2}$
- deux **sommets supplémentaires** sur m' : S_3 et S_4, avec : $OS_3 = OS_4 = b$
- on appelle **grand axe** la distance $S_1S_2 = 2a$ et **petit axe** la distance $S_3S_4 = 2b$
- **équation** dans un R.O.N. <u>d'origine O</u> et d'axes parallèles à m et à d :
  - si $m = (Ox)$ alors $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $S_{1,2}(\pm a, 0)$, $S_{3,4}(0, \pm b)$, $F(c,0)$, $F'(-c,0)$,

    $d, d' \equiv x = \pm\frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
  - si $m = (Oy)$ alors $\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$, $S_{1,2}(0, \pm a)$, $S_{3,4}(\pm b, 0)$, $F(0,c)$, $F'(0,-c)$,

    $d, d' \equiv y = \pm\frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{xx_0}{b^2} + \frac{yy_0}{a^2} = 1$
- $\Gamma = \{P \,/\, PF + PF' = 2a\}$ (définition bifocale)

3) Hyperboles $(\varepsilon > 1)$

- le nombre <u>réel positif</u> **b** est défini par : $\boxed{b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2}$
- deux **asymptotes obliques** (A.O.) passant par O
- **équation** dans un R.O.N. <u>d'origine O</u> et d'axes parallèles à m et à d :
  - si $m = (Ox)$ alors $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, **A.O.** : $y = \pm\frac{b}{a}x$, $S_{1,2}(\pm a, 0)$, $F(c,0)$, $F'(-c,0)$,

    $d, d' \equiv x = \pm\frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
  - si $m = (Oy)$ alors $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$, **A.O.** : $y = \pm\frac{a}{b}x$, $S_{1,2}(0, \pm a)$, $F(0,c)$, $F'(0,-c)$,

    $d, d' \equiv y = \pm\frac{a^2}{c}$ et la **tangente** au point $P(x_0, y_0)$: $(T) \equiv \frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{b^2} = 1$
- si $a = b$ les A.O. sont orthogonales et on dit que l'hyperbole est **équilatère.**
- $\Gamma = \{P \,/\, |PF - PF'| = 2a\}$ (définition bifocale)

EXERCICES

1) Dans un R.O.N. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan on définit 4 paraboles par leurs équations cartésiennes réduites :

$y^2 = 12x \quad (1) \qquad x^2 + 9y = 0 \quad (2) \qquad y^2 + \frac{5}{6}x = 0 \quad (3) \qquad 8x^2 - 5y = 0 \quad (4)$

Pour chacune d'elles, précisez l'axe focal, le foyer et la directrice. Construisez-les.

2) Dans un R.O.N. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan on donne les points $A(3;0)$, $B(-7;0)$, $C(0;5)$, $E(1,3)$ et les droites $d \equiv x = -3$, $d' \equiv y = -1$.

a) Ecrivez l'équation cartésienne (dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$) de la parabole de foyer A et de directrice d. Précisez son axe focal et son sommet.

b) Mêmes question pour la parabole de foyer B et de directrice d.

c) Mêmes question pour la parabole de foyer C et de directrice d'.

d) Mêmes question pour la parabole de foyer E et de directrice d.

e) Mêmes question pour la parabole de foyer E et de directrice d'.

3) Donnez une équation cartésienne dans un R.O.N. d'origine O des paraboles de sommet O, de foyer F, de directrice d et de paramètre p qui vérifient :

a) (Ox) est l'axe focal, la coordonnée non nulle de F est positive et $p = 7$.

b) (Oy) est l'axe focal, la coordonnée non nulle de F est négative et $p = \frac{11}{4}$.

c) $d \equiv x + 6 = 0$.

d) $F(0;4)$.

e) $F(0;-1)$.

f) (Ox) est l'axe focal et le point $M(3;-4)$ appartient à la parabole.

g) (Oy) est l'axe focal et le point $M(2;-5)$ appartient à la parabole.

4) Soient $\Gamma_1 \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ et $\Gamma_2 \equiv \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ dans un R.O.N. Pour chacune de ces coniques déterminez sa nature, son axe focal, ses sommets, ses foyers, ses directrices, ses asymptotes éventuelles et son excentricité. Donnez également une équation focale pour chacune d'elles. Construisez-les (unités : 1 cm).

5) Le plan est rapporté à un R.O.N. d'origine O. Déterminez une équation cartésienne et une équation focale des coniques de centre O telles que :

a) (Ox) est l'axe focal, le grand axe vaut 16 et la distance focale 12.

b) (Oy) est l'axe focal, la distance focale vaut 20 et l'excentricité $\sqrt{20}$.

c) (Ox) est l'axe focal, le petit axe vaut 10 et l'excentricité 0,2.

d) (Oy) est l'axe focal, le grand axe vaut 32 et la conique passe par $A(1;2)$.

e) La conique passe par les points $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ et $\varepsilon<1$.

f) (Oy) est l'axe focal, la distance focale vaut 24 et la conique admet deux asymptotes obliques qui forment un angle de $\frac{\pi}{3}$ rd.

g) Un foyer a pour coordonnées $(-3;0)$ et l'excentricité vaut $\sqrt{3}$.

h) La conique coupe l'axe focal en $(0;-2)$ et elle admet comme A.O. : $y=\frac{1}{3}x$.

i) Un foyer a pour coordonnées $(-8;0)$ et le petit axe vaut 12.

6) **a)** Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $4y^2+12y+4x+9=0$ dans un R.O.N. Déterminez les coordonnées de son foyer, de son sommet et les équations de sa directrice et de son axe de symétrie <u>dans ce même repère</u>.

b) Mêmes questions pour la parabole d'équation $x^2+6x-5y=0$.

7) Identifiez les coniques données par les équations suivantes, donnez leurs caractéristiques (foyers, directrices, sommets, excentricité, asymptotes éventuelles) et représentez-les :

a) $4x^2+9y^2-36=0$

b) $9x^2-y^2+18=0$

c) $9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$

d) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

e) $4y^2-24y+x+36=0$

f) $4x^2-y^2=2y$

g) $x^2+6x+y=0$

h) $4x^2-y^2+x+4y-48=0$

i) $y=2\sqrt{x^2-4}$

j) $y = 2 - \sqrt{-x^2 - 2x}$

k) $x = 2 + \sqrt{2 + y}$

8) Déterminez une équation, le sommet, le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ sachant que :

a) L'axe de $\mathcal{P}$ est horizontal et $\mathcal{P}$ passe par $A(-2;3)$, $B(2;7)$ et $C(-1;1)$.

b) L'axe de $\mathcal{P}$ est vertical et $\mathcal{P}$ passe par $A(-2;3)$, $B(2;7)$ et $C(-1;1)$.

c) L'axe de $\mathcal{P}$ n'est pas oblique et $\mathcal{P}$ passe par $A(-1;5)$, $B(1;2)$ et $C(3;5)$.

9) Déterminez l'équation cartésienne réduite des coniques suivantes données par un foyer F et la directrice associée dans un R.O.N. ainsi que leur excentricité ε :

a) $F(1,4)$, $d \equiv y + 3 = 0$ et $\varepsilon = 2$.

b) $F(-2,3)$, $d \equiv x + 5 = 0$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

c) $F(5,2)$, $d \equiv y - 1 = 0$ et $\varepsilon = 1$.

d) $F(6,-2)$, $d \equiv x = 2{,}8$ et $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

e) $F\left(-\frac{11}{2},5\right)$, $d \equiv x = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 1$.

10) Soient A et B deux points fixes avec $AB = 8$. Déterminez la nature, donnez une équation cartésienne et une équation focale des lieux suivants puis construisez-les:

$\mathbb{S} = \{M / MA + MB = 10\}$ $\qquad$ $\mathbb{T}\mathbb{T} = \{M / |MA - MB| = 4\}$

11) Un jardinier souhaite créer un parterre de forme elliptique dont la grande dimension est 20 m et la plus petite 10 m. Pour cela il plante deux piquets fixes M et P dans le sol auxquels il attache les deux bouts d'une ficelle rigide d'une certaine longueur. Il tend cette ficelle par un piquet mobile R qu'il garde toujours vertical tout en le déplaçant de telle façon que la corde reste bien tendue. Justifiez pourquoi le piquet R décrit de cette façon une ellipse ! Comment faut-il choisir la distance entre les piquets fixes et la longueur de la ficelle pour obtenir l'ellipse souhaitée ?

12) Soit l'hyperbole d'équation $4x^2 - 9y^2 = 36$ et les droites :

$d_1 \equiv x - y + 1 = 0$

$d_2 \equiv 2\left(\sqrt{2} + 1\right)x - 3y - 6\left(\sqrt{2} + 1\right) = 0$

$d_3 \equiv y = 4 - \frac{2\sqrt{5}}{3}x$

Etudiez les positions relatives de ces droites et de cette hyperbole.

13) Déterminez les équations des tangentes à l'ellipse d'équation $9x^2 + 16y^2 = 144$ aux points d'abscisse 2 et aux points d'ordonnée 3.

14) Discutez suivant les valeurs du paramètre réel m la position relative de la droite $d \equiv x + y = m$ et de l'ellipse $\Gamma \equiv 4x^2 + y^2 = 1$.

15) Soit Γ une parabole de sommet S, de directrice d et de foyer F, T un point de Γ différent du sommet S, t la tangente à Γ au point T. La tangente t coupe d en U et la droite passant par le foyer F qui est parallèle à d en R (figure !). Montrez que $FU = FR$.

16) Soit $\Gamma \equiv y^2 = 2px$ l'équation d'une parabole dans un R.O.N. du plan, $M(x_1, y_1) \in \Gamma$ et t la tangente à Γ au point M qui coupe (Ox) en T et (Oy) en J.

a) Déterminez une équation de t.

b) Montrez que $T(-x_1, 0)$ et $J\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$.

c) Déduisez-en une construction de la tangente t.

17) Soit l'ellipse d'équation cartésienne $\Gamma \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$. Déterminez les équations des tangentes à cette ellipse issues du point $P(4;0)$ ainsi que les coordonnées de leurs points de contact.

18) Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $\Gamma \equiv x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. Déterminez les équations des tangentes à cette hyperbole issues du point $P(1;1)$. Faites une figure !

19) Soit l'hyperbole d'équation cartésienne $\Gamma \equiv 16x^2 - 25y^2 + 400 = 0$. Déterminez les équations des tangentes à cette hyperbole de coefficient angulaire $\frac{\sqrt{7}}{5}$. Faites une figure !

20) Soit la conique d'équation cartésienne $\Gamma \equiv y^2 - 6y - 8x + 41 = 0$ et la droite $d \equiv 3x - 4y + 1 = 0$. Déterminez les équations des tangentes à cette conique qui sont parallèles à d. (figure !)

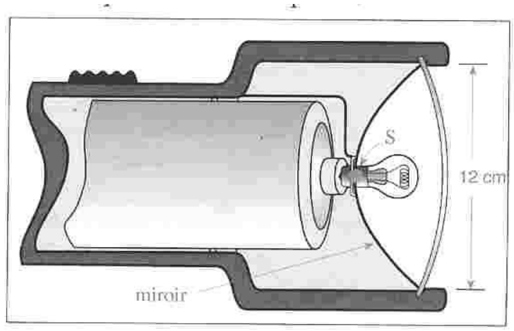
21) Soit la conique d'équation cartésienne $\Gamma \equiv x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ et la droite $d \equiv x - 3y = 9$. Déterminez les équations des tangentes à cette conique qui sont perpendiculaires à d. (figure !)

22) Calculez le réel p pour que la droite d'équation $d \equiv y = px + 5$ soit tangente à l'hyperbole $\Gamma \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$.

23) Déterminez une équation cartésienne de la tangente à l'ellipse $\Gamma \equiv 3x^2 + 5y^2 - 32 = 0$ en ses points dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

24) Le point $P(-1;2)$ est l'un des sommets du parallélogramme circonscrit à l'ellipse $\Gamma \equiv x^2 + 4y^2 - 16 = 0$. Trouvez les équations cartésiennes des côtés de ce parallélogramme.

25) Le miroir d'une torche électrique a la forme d'un paraboloïde (surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe focal) de 12 cm de diamètre et de 3 cm de profondeur. Où faut-il placer l'ampoule pour que les rayons lumineux émis soient réfléchis parallèlement à l'axe du paraboloïde ? A quelle distance du point S ?

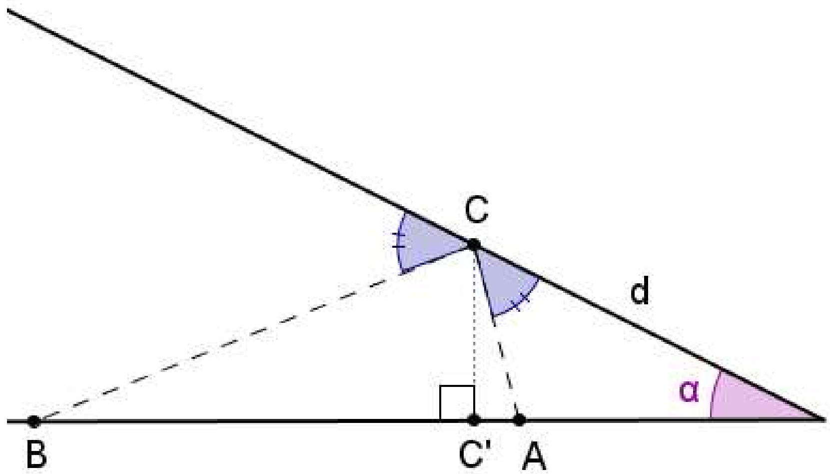


26) Dans un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm) on donne le point $A(1,4)$ et l'hyperbole d'équation $\Gamma \equiv 16x^2 - 9y^2 = 144$.

a) Déterminez toutes les caractéristiques (sommets, foyers, directrices, asymptotes, excentricité) de l'hyperbole puis représentez-la (figure soignée !).

b) A partir du foyer F' on dirige un rayon laser sur la branche de l'hyperbole la plus éloignée de F' (on suppose pour cela que la branche la plus rapprochée a été enlevée pour laisser passer le rayon). Ce rayon est réfléchi par l'hyperbole et atteint le point A. Déterminez les coordonnées du point d'impact $I \in \Gamma$ du rayon. Justifiez vos calculs !

27) Deux points A et B sont éloignés de 12 m et la droite d forme avec (AB) un angle α. Un rayon lumineux issu de A est réfléchi par d au point C et arrive en B après un parcours de 20 m. De plus la projection orthogonale C' de C sur (AB) est telle que $C' \in [AB]$ et $AC' = 1\,\text{m}$.



a) Montrez que C appartient à une conique dont vous déterminerez l'équation réduite.

b) Quelle est la position de d par rapport à cette conique ? Trouvez son équation !

c) Calculez une mesure de l'angle α