# CHAPITRE I

# LES NOMBRES COMPLEXES

## Table des matières

**COURS**

# COURS

## 1) L'invention du "nombre" i

Un des premiers problèmes traités par l'**algèbre**, science inventée par les Arabes au IX$^{e}$ siècle (« al-jabr » signifie « calcul » en arabe), fut la résolution des équations du premier, deuxième, troisième et quatrième degré. Ce n'est qu'au XVI$^{e}$ siècle que les mathématiciens « algébristes » italiens *Del Ferro* (1465-1526), *Tartaglia* (1499-1557) et son grand rival *Cardano* (1501-1575) et enfin *Bombelli* (1526-1573), ont enfin réussi à résoudre les équations du 3$^{e}$ et du 4$^{e}$ degré. Or ce ne sont pas tant les formules qu'ils ont trouvées qui se sont révélées importantes par la suite, mais une certaine méthode qu'ils ont développée pour y arriver et qui a mené aux nombres qu'on appelle aujourd'hui « **nombres complexes** ».

Au début du seizième siècle ***Del Ferro*** a démontré que l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0 \quad (\text{où } p, q \in \mathbb{R})$$

a pour solution le nombre

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}}$$

à condition bien sûr que $4p^3 + 27q^2 \geq 0$ !

***Exercice 1***

Cette formule n'est donc pas applicable à une équation comme par exemple

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \ (*)$$

car $\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}} = \sqrt{\frac{4(-15)^3 + 27(-4)^2}{108}} = \sqrt{-121}$ n'existe pas !

C'est là que ***Bombelli*** a eu l'idée insolite d'imaginer qu'il existe un « nombre » i tel que $i^2 = -1$ et avec lequel on puisse faire les mêmes calculs qu'avec les nombres réels ordinaires comme p.ex. $i + 2$, $3i - 4$, $\frac{9}{i}$, etc…(on pourrait dire aussi qu'il a eu l'audace de faire *comme si* une telle « chose » existait….).

On aurait alors $(11i)^2 = 121i^2 = 121(-1) = -121$, donc $\sqrt{-121} = 11 \cdot i$ et par conséquent $x = \sqrt[3]{2+11 \cdot i} + \sqrt[3]{2-11 \cdot i}$.

Or $(2+i)^3 = 8+3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8+12 \cdot i - 6 - i = 2+11 \cdot i$ (car $i^3 = i^2 i = -i$)

donc $\sqrt[3]{2+11 \cdot i} = 2+i$ et on montre de même que $(2-i)^3 = 2-11 \cdot i$, donc $\sqrt[3]{2-11 \cdot i} = 2-i$. Finalement on obtient $x = 2+i+2-i = 4$ et on vérifie facilement que le réel 4 est bien une solution de l'équation (*) !

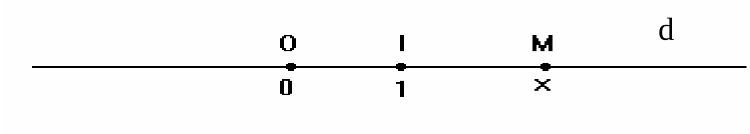
Ainsi *Bombelli* avait trouvé une solution bien réelle de l'équation (*) en utilisant un « nombre » qui ne pouvait pas exister mais qui avait le bon goût de disparaître à la fin des calculs…. Au 17e siècle *Descartes* (1596-1650) appela ce nombre irréel et inexistant **« nombre imaginaire »** et au 18e siècle *Euler* (1707-1783) imposa la notation « ***i*** » que *Bombelli* n'avait pas encore utilisée, en l'appelant aussi « nombre impossible ».


Ces dénominations (irréel, imaginaire, impossible…) témoignent du profond malaise que les mathématiciens du 16e au 18e siècles ont ressenti envers ce nombre i (et ses composés $i+2$, $3i-4$, etc appelés **nombres complexes**) qui malgré sa définition incertaine et bizarre s'est révélé être un instrument très efficace pour la résolution de nombreux problèmes algébriques. Ce n'est qu'au cours du 19e siècle que des mathématiciens comme ***Gauss*** (1777-1855), ***Cauchy*** (1789-1857) et ***Hamilton*** (1805-1865) ont enfin réussi à donner une construction rigoureuse de ces nombres et à leur enlever leur caractère magique et mystérieux. Ils constituent aujourd'hui encore une des notions les plus importantes des mathématiques modernes.

## 2) Construction des nombres complexes

### a) Idée fondamentale

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être interprété géométriquement comme l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite d munie d'un repère $\left(O,\overrightarrow{OI}\right)$ :




$$\forall M \in d \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad M(x) \quad \text{càd } \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI}$$

Comme $i \notin \mathbb{R}$ le point repéré par i, *à supposer qu'il existe*, ne peut pas se trouver sur d mais doit être cherché ailleurs dans le plan ! Or dans le plan muni d'un R.O.N. chaque point M est repéré par un *couple de deux nombres réels* a et b : M(a,b). C'est en se basant sur ces considérations que *Hamilton* a eu l'idée de définir l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, comme l'ensemble des <u>couples</u> $(a,b)$ de deux nombres réels :

$$\mathbb{C} = \left\{(a,b) / a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\right\}$$

Pour lui <u>un « nombre » complexe est donc un couple de deux réels</u> !

### b) Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Il a ensuite défini une <u>addition</u> notée $\oplus$ et une <u>multiplication</u> notée $\otimes$ en posant :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{C} \quad & (a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b') \\ & (a,b) \otimes (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b) \end{aligned}}$$

*p.ex.* $(3,-7) \oplus (-11,54) = (-8,47)$

$(4,-5) \otimes (-3,2) = (-12+10, 8+15) = (-2,23)$

On vérifie facilement que les opérations ainsi définies ont les <u>propriétés</u> suivantes :

- **Addition**
  - Commutativité : $(a,b) \oplus (a',b') = (a',b') \oplus (a,b)$

- Associativité :

  $\left[(a,b)\oplus(a',b')\right]\oplus(a'',b'')=(a,b)\oplus\left[(a',b')\oplus(a'',b'')\right]$

- $(a,b)\oplus(0,0)=(a,b)$, donc (0,0) est *l'élément neutre* pour l'addition
- $(a,b)\oplus(-a,-b)=(0,0)$, donc $(-a,-b)$ est l'*opposé* de (a,b) )
- *Conclusion :* $(\mathbb{C},\oplus)$ est un **groupe commutatif**
- *Notation* **:** $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}/\{(0,0)\}=\{(a,b)/a\in\mathbb{R}^* \text{ ou } b\in\mathbb{R}^*\}$

• **Multiplication**

- Commutativité : $(a,b)\otimes(a',b')=(a',b')\otimes(a,b)$
- Associativité :

  $\left[(a,b)\otimes(a',b')\right]\otimes(a'',b'')=(a,b)\otimes\left[(a',b')\otimes(a'',b'')\right]$

- $(a,b)\otimes(1,0)=(a,b)$, donc (1,0) est *l'élément neutre* pour $\otimes$
- si $(a,b)\in\mathbb{C}^*$ $\quad(a,b)\otimes\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$,

  donc $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ est l'*inverse* de (a,b)

- $(\mathbb{C}^*,\otimes)$ est un groupe commutatif

• **Distributivité** de la multiplication pour l'addition :

$$(a,b)\otimes\left[(a',b')\oplus(a'',b'')\right]=(a,b)\otimes(a',b')\oplus(a,b)\otimes(a'',b'')$$

• **Conclusion** :

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition $\oplus$ et de la multiplication $\otimes$ est un **corps commutatif**, exactement comme $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

***Exercice 2***

## c) Relations entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Géométriquement, on peut identifier $\mathbb{R}$ au sous-ensemble $A=\{(a,0)/a\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$. Mais alors on aura sur $\mathbb{R}$ deux additions et deux multiplications : les opérations usuelles (opérations « réelles ») et celles induites par $\mathbb{C}$ (opérations

« complexes ») ! Or en analysant le comportement des opérations « complexes » sur A on voit que :

- $(0,0) \in A$ et $(1,0) \in A$
- $(a,0) \oplus (a',0) = (a+a',0) \in A$
- $(a,0) \otimes (a',0) = (aa'-0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot a') = (aa',0) \in A$
- si $a \neq 0$ l'inverse de $(a,0) = \left( \frac{a}{a^2+0^2}, \frac{-0}{a^2+0^2} \right) = \left( \frac{1}{a}, 0 \right) \in A$

En d'autres termes les opérations « complexes » et « réelles » se comportent exactement de la même manière sur A !

**Conclusion :**

On peut considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et que $\oplus$ et $\otimes$ sont des *extensions* à $\mathbb{C}$ de l'addition et de la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$. Ainsi on peut *identifier* $(a,0)$ au nombre réel a : $(a,0) \cong a$, $(1,0) \cong 1$, $(0,0) \cong 0$, etc.

## d) Le nombre i existe !

Calculons $(0,1)^2 = (0,1) \otimes (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) \cong -1$. Donc en notant **i** le couple $(0;1)$ on a bien $\boxed{i^2 = -1}$, c'est-à-dire que cet **i** a exactement la propriété imaginée par Bombelli ce qui résout définitivement le problème de *l'existence* d'un tel nombre ! De plus :

- $\forall b \in \mathbb{R} \quad (b,0) \otimes (0,1) = (0-0, b+0) = (0,b)$, donc $(0,b) \cong b \otimes i$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \quad (a,b) = (a,0) \oplus (0,b) \cong a \oplus b \otimes i$

## e) Notations définitives

Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ dans $\mathbb{C}$ ayant les mêmes propriétés que l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ qu'on peut par ailleurs considérer comme une partie de $\mathbb{C}$, on peut sans risquer aucune ambiguïté prendre les <u>mêmes notations</u> pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Ainsi par exemple au lieu de $a \oplus b \otimes i$ on écrira simplement : **a+bi**.

Avec ces <u>nouvelles notations</u> on peut donc écrire :

- $(a,b) = a + bi$
- $\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- opposé de $(a + bi) = -(a + bi) = -a - bi$
- $(a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$ *en particulier* : $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

*<u>Remarque</u>* : $\frac{i}{2}$ signifie $\frac{1}{2} \cdot i$ et $\frac{5+3i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot i$

*<u>Définitions</u>*

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$ :

- le réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a = \Re(z)$
- le réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b = \Im(z)$
- si $a = \Re(z) = 0$, càd si $z = bi$, on dit que z est un **imaginaire pur.** L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

*<u>Remarque</u>* :

Bien que ces nombres n'aient aujourd'hui plus rien « d'*imaginaire* », le mot est resté, sans doute par esprit de tradition. On observe le même phénomène à propos des nombres « *irrationnels* » (p.ex. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}, \pi, \ldots$) qui n'ont plus rien d'irrationnel depuis qu'on a trouvé, également au 19e siècle, une construction tout à fait rationnelle de ces nombres, mais c'est une autre histoire !

***Exercices 3, 4, 5***

## f) Conjugué d'un complexe

*<u>Définition</u>*

Pour tout nombre complexe $z = a + bi$, on appelle **conjugué** de z le nombre :

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

*Propriétés du conjugué*

- $\forall z,z'\in\mathbb{C}\quad \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'},\ \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$ et $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$
- $\forall z=a+bi\in\mathbb{C}\quad z\overline{z}=a^2+b^2$
- $\forall z\in\mathbb{C}\quad z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$
- $\forall z\in\mathbb{C}\quad z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

***Exercices 6, 7***

## g) Division dans $\mathbb{C}$

Soit $z=a+bi\in\mathbb{C}^*$ et $z'=a'+b'i\in\mathbb{C}$, alors :

- $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

  *on retrouve ici la formule de l'inverse de* $a+bi$ *vue en b !*

- $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\dfrac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2}=\dfrac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+\dfrac{ab'-a'b}{a^2+b^2}i$

*Remarques* :

Ce n'est pas la peine d'apprendre ces formules par cœur, il suffit de retenir qu'*on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur*, ce qui donne un dénominateur réel d'après la propriété $z\overline{z}=a^2+b^2$ !

*Propriétés*

- $\forall z\in\mathbb{C}^*\quad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
- $\forall z\in\mathbb{C}\ \forall z'\in\mathbb{C}^*\quad \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

***Exercices 8, 9, 10***

## h) Interprétation géométrique

Dans le plan muni d'un R.O.N. , appelé **plan de Gauss**, on peut représenter un nombre complexe $z=a+bi$ par le point $M(a,b)$. On dit que M est le **point image d'affixe z** et on note **M(z)**.

Ainsi *par exemple* au lieu de noter $A(3;2)$, $B(0;-7)$, $C(4;0)$ on peut noter $A(3+2i)$, $B(-7i)$, $C(4)$.

On voit facilement que :

- $z \in \mathbb{R}$ ssi M(z) est sur l'axe des abscisses appelé **axe réel**.
- $z \in i\mathbb{R}$ ssi M(z) est sur l'axe des ordonnées appelé **axe imaginaire**.
- M(z) et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
- M(z) et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

***Exercices 11, 12, 13, 14***

## i) Module d'un complexe

- *Définition*

  Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et M(z) le point d'affixe z dans le plan de Gauss. On appelle **module de z**, et on note $|z|$, la distance de M à l'origine O du repère :

$$\boxed{|z| = OM = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}}$$

- *Exemples*

  $|i| = \sqrt{0+1} = 1$

  $|3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$

  $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

- *Remarques*

  ➢ $\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue)

  Sur $\mathbb{R}$ il n'y a donc *aucune différence entre module et valeur absolue*, ce qui explique la similitude des notations !

  ➢ $\forall b \in \mathbb{R} \quad |bi| = \sqrt{0^2+b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$ (valeur absolue)

  p.ex. $|5i| = 5$ ; $|-7i| = 7$

- *Propriétés du module*

  *Ces propriétés sont exactement analogues (sauf la dernière) aux propriétés de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$*

  - $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \in \mathbb{R}_+$
  - $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
  - $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
  - $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
  - $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$
  - $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\bar{z}| = |z|$

***Exercice 15***

## j) Relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ ?

- Sur l'ensemble des nombres réels la relation « ..≤..» est une relation d'ordre total ce qui signifie qu'elle permet toujours de comparer deux réels quelconques : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a$

  De plus elle est « compatible » avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p.ex. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$, si $c > 0$ on a : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$, etc). Cette relation permet aussi de distinguer les réels positifs (ceux qui sont plus grands que 0) des réels négatifs (ceux qui sont plus petits que 0).
- Une telle relation d'ordre **n'existe pas** sur $\mathbb{C}$ **!** On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes (p.ex. écrire « $1 + i \leq 3 - i$ » N'A PAS DE SENS !!!), ni parler de nombres complexes « positifs » ou « négatifs » puisqu'on ne peut pas les comparer à 0 ! En particulier il n'y a pas d'inéquations dans $\mathbb{C}$ **!**

## 3) Racines carrées complexes

- *Définition*

Soient $z, u \in \mathbb{C}$, on dit que u est une **racine carrée complexe** (on notera : **rcc**) de z ssi $z = u^2$

- *Exemples*

$(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$ donc $3i$ et $-3i$ sont deux rcc de $-9$.

$(2-i)^2 = 4-4i-1 = 3-4i$ et $(i-2)^2 = \cdots = 3-4i$, donc $2-i$ et $i-2$ sont deux rcc de $3-4i$

$5^2 = (-5)^2 = 25$, donc 5 et $-5$ sont deux rcc de 25

*Attention* : 25 n'a qu'une seule racine carrée réelle : $\sqrt{25} = 5$ !

- *Calcul des rcc de* $z = a + bi$

Supposons que $u = x + yi$ est une rcc de $z = a + bi$, alors:

$$(x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

et $|u^2| = |z| \Leftrightarrow |u|^2 = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ (3),

d'où :

$$(3)+(1): \qquad 2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

$$(3)-(1): \qquad 2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a$$
$$\Leftrightarrow y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$
$$\Leftrightarrow y=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{avec } \varepsilon=\pm 1$$

Or d'après (2) xy et b ont le même signe, donc il faut distinguer 2 cas :

<u>1^er cas</u> : $b\geq 0$

Alors x et y ont même signe puisque $xy\geq 0$, donc u est égal à l'un des deux nombres suivants : $u_1=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i$ et $u_2=-u_1$.

<u>2^e cas</u> : $b<0$

Alors x et y ont des signes opposés puisque $xy<0$, donc u est égal à l'un des deux nombres suivants : $u_1=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i$ et $u_2=-u_1$.

*Réciproquement* on vérifie facilement (exercice !) que les nombres $u_1$ et $u_2$ trouvés dans les deux cas sont bien des rcc de $z=a+bi$.

Comme par ailleurs $\sqrt{a^2+b^2}=|z|$, $a=\Re(z)$ et $b=\Im(z)$ on peut formuler le résultat obtenu de la manière suivante :

***<u>Théorème</u>***

Tout nombre complexe z a <u>exactement deux rcc (**r**acines **c**arrées **c**omplexes) opposées</u> données par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1=\sqrt{\frac{|z|+\Re(z)}{2}}+\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{|z|-\Re(z)}{2}}\cdot i \quad \text{avec } \varepsilon=\begin{cases}+1 & \text{si } \Im(z)\geq 0\\ -1 & \text{si } \Im(z)<0\end{cases}\\ u_2=-u_1\end{array}}$$

- *Exemples*
  - $|3-4i|=\sqrt{9+16}=5$, $\Re(3-4i)=3$ et $\Im(3-4i)<0$ donc les rcc de $3-4i$ sont : $u_1=\sqrt{\frac{5+3}{2}}-\sqrt{\frac{5-3}{2}}\cdot i=2-i$ et $u_2=-2+i$
  - $|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\Re(1+i)=1$ et $\Im(1+i)>0$ donc les rcc de $1+i$ sont $u_1=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cdot i$ et $u_2=-u_1$
  - $|-3i|=\sqrt{0+9}=3$, $\Re(-3i)=0$ et $\Im(-3i)<0$ donc les rcc de $-3i$ sont $u_1=\sqrt{\frac{3+0}{2}}-\sqrt{\frac{3-0}{2}}\cdot i=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i$ et $u_2=-u_1$

- *Attention :*
  - Il ne faut pas confondre racine carrée <u>réelle</u> et racine carrée <u>complexe</u> !

    *p.ex.* 4 a une racine carrée réelle : $\sqrt{4}=2$, mais deux rcc : $2$ et $-2$, alors que $-4$ n'a aucune racine réelle, mais deux rcc : $2i$ et $-2i$ !
  - Le symbole $\sqrt{\ }$ n'est <u>jamais</u> utilisé pour noter une <u>rcc</u> ! En effet quel sens donner p.ex à $\sqrt{-4}$ ? $2i$ ou $-2i$ ?

**Exercice 16**

## 4) Equations du second degré

### a) Résolution générale d'une équation du second degré

Soit $az^2+bz+c=0$ une équation du second degré à *coefficients complexes* ($a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$) et cherchons toutes les *solutions complexes* de cette équation.

$$az^2+bz+c=0 \quad \big|\div a\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad (*)$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et soit $\delta$ une rcc de $\Delta$, alors :

$$(*) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b+\delta}{2a}$$

***<u>Théorème</u>***

Toute équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) a <u>deux racines complexes</u> données par :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$$

où $\delta$ est *<u>l'une</u>* <u>des rcc</u> du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

*<u>Remarques</u>* :

- De la démonstration du théorème il découle immédiatement la **formule de factorisation** suivante :

$$\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$$

En d'autres termes un polynôme du second degré à coefficients complexes est toujours factorisable sous forme de produit de deux polynômes du premier degré. C'est un cas particulier du ***théorème de D'Alembert*** (1717-1783) (théorème fondamental de l'algèbre !) qui affirme que tout polynôme de degré n (n entier positif quelconque !) à coefficients complexes est factorisable sous forme de produit de n polynômes du premier degré.

- Autre conséquence de ce théorème :

$$z_1+z_2=\frac{-b-\delta}{2a}+\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$z_1\cdot z_2=\frac{(-b-\delta)(-b+\delta)}{4a^2}=\frac{b^2-\delta^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Ces deux formules permettent de calculer la somme et le produit des deux racines de n'importe quelle équation du second degré, sans connaître celles-ci !

- Si $\Delta=\delta=0$, alors les deux racines sont confondues et on dit que l'équation a une **racine double** $z_1=z_2=\dfrac{-b}{2a}$.
- On a les mêmes formules bien connues que dans $\mathbb{R}$ sauf qu'on n'écrit plus $\sqrt{\Delta}$ et qu'on n'a plus besoin de distinguer suivant le signe de $\Delta$ !
- En général on utilise plutôt la *lettre z* pour désigner une inconnue complexe, mais rien n'interdit d'utiliser x, y ou toute autre lettre !

***Exercices 17, 18***

## b) Exemples d'équations se ramenant à des équations du second degré

*Exemple1 : par factorisation*

$10z^3-4z^2-15iz+6i=0$ (équation du $3^e$ degré)

$\Leftrightarrow 2z^2(5z-2)-3i(5z-2)=0$

$\Leftrightarrow (5z-2)(2z^2-3i)=0$

$\Leftrightarrow 5z-2=0$ ou $2z^2-3i=0$, etc.

on trouve $S=\left\{\frac{2}{5};\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i;-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right\}$

*Exemple2 : par changement d'inconnue*

$z^4+(2i-2)z^2+3-6i=0$ (équation **« bicarrée »**)

En posant $t=z^2$ on obtient l'équation du second degré d'inconnue $t$ :

$t^2+(2i-2)t+3-6i=0$ qui a pour solutions $t'=2+i$ et $t"=-3i$.

D'où : $z^2=2+i$ ou $z^2=-3i$, et en cherchant les rcc de ces deux complexes on trouve :

$$S=\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i;-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i;\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\cdot i;-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\cdot i\right\}$$

*Exemple3 : par réduction au même dénominateur*

$\frac{6}{z+1}-\frac{10}{3-z}=4i-1 \Big| \cdot (z+1)(3-z)\neq 0$ C.E. $z\neq -1$ et $z\neq 3$

$\Leftrightarrow 6(3-z)-10(z+1)=(4i-1)(3-z)(z+1)$

$\Leftrightarrow (4i-1)z^2-(14+8i)z+11-12i=0$, etc. $S=\left\{1-2\cdot i;\frac{1}{17}-\frac{30}{17}\cdot i\right\}$

*Remarque* :

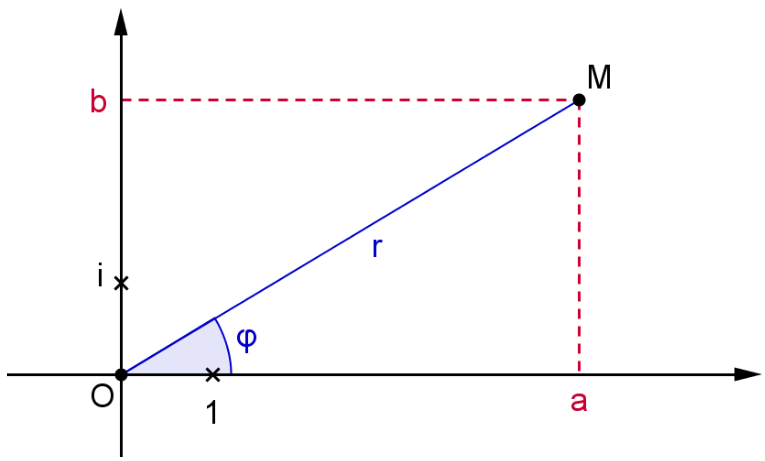
A titre d'exercice vous pourrez faire les calculs détaillés de ces exemples !

## Exercice 19

## 5) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### a) Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

- Soit M un point du plan muni d'un R.O.N. $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, alors :
  - les réels uniques a et b tels que $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OJ}$ sont appelés **coordonnées cartésiennes** de M. On note $M(a,b)$.
  - le point M peut également être repéré par la donnée de la distance $r=OM$ et une mesure $\varphi$ de l'angle $\widehat{xOM}$ : ce sont les **coordonnées polaires** de M. On note $M(r,\varphi)$.




  - *Attention* : Pour un point donné M les coordonnées a, b et r sont déterminées de façon unique alors que $\varphi$ n'est déterminé qu'à un multiple entier de $2\pi$ près !

- **Relations entre coordonnées cartésiennes et polaires**

Si M appartient au premier quadrant (voir figure !) le triangle $\Delta(OAM)$ où $A(a,0)$ est rectangle en A, donc : $\boxed{\cos\varphi=\frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin\varphi=\frac{b}{r}}$

*On vérifie facilement (exercice !) que cette formule reste valable pour les autres quadrants.*

*Exercice 20*

## b) Forme trigonométrique et forme algébrique

- Soient $z = a + bi$, M le point d'affixe z et $(r, \varphi)$ les coordonnées polaires de M. Alors :
  - $r = |z|$ (module de z)
  - $\varphi$ est appelé **argument** de z et on note : $\boxed{\arg(z) = \varphi}$
  - $\boxed{z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$
  - *Notations* :

    le nombre $\cos\varphi + i\sin\varphi$ sera noté $\mathrm{cis}\varphi$ ou $e^{i\varphi}$, où cis est une abréviation pour « $\cos + i\sin$ » et $e^{i\varphi}$ est l'exponentielle complexe)

- *Exemples* :

$$\mathrm{cis}0 = e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$$\mathrm{cis}\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

$$\mathrm{cis}\pi = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

$$\mathrm{cis}\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- *Définitions* :
  - $z = r\mathrm{cis}\varphi = re^{i\varphi}$ est appelée : **forme trigonométrique** de z
  - $z = a + bi$ est appelée : **forme algébrique** de z

- *Exemples* :

$$z = 6\mathrm{cis}\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3\sqrt{3} \cdot i$$

$$z = 5e^{\frac{\pi}{6}i} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$$

## c) Propriétés

- $\boxed{\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \left|\text{cis}\varphi\right| = \left|e^{i\varphi}\right| = 1}$

  en effet $\left|\text{cis}\varphi\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$

- $\boxed{\text{cis}\varphi = \text{cis}\varphi' \Leftrightarrow \varphi' = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$

  en effet $\text{cis}\varphi = \text{cis}\varphi' \Leftrightarrow (\cos\varphi = \cos\varphi' \text{ et } \sin\varphi = \sin\varphi')$,

  or $\cos\varphi = \cos\varphi' \Leftrightarrow (\varphi = \varphi' + 2k\pi \text{ ou } \varphi = -\varphi' + 2k\pi)$

  et $\sin\varphi = \sin\varphi' \Leftrightarrow (\varphi = \varphi' + 2k\pi \text{ ou } \varphi = \pi - \varphi' + 2k\pi)$,

  donc $\cos\varphi = \cos\varphi' \text{ et } \sin\varphi = \sin\varphi' \Leftrightarrow \varphi = \varphi' + 2k\pi$.

- $$\boxed{\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \text{cis}(\varphi + 2\pi) = \text{cis}\varphi & (1) \\ \text{cis}(\varphi + \pi) = -\text{cis}\varphi & (2) \\ \text{cis}(-\varphi) = \overline{\text{cis}\varphi} & (3) \end{cases}}$$

  la vérification de ces formules découle immédiatement des formules analogues pour sinus et cosinus !

- $\boxed{\forall \varphi, \varphi' \in \mathbb{R} \quad \text{cis}(\varphi+\varphi') = \text{cis}\varphi \cdot \text{cis}\varphi' \quad \text{et} \quad \text{cis}(\varphi-\varphi') = \frac{\text{cis}\varphi}{\text{cis}\varphi'}}$

  <u>*Remarque*</u> :

  en notation exponentielle : $e^{i(\varphi+\varphi')} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'}$ et $e^{i(\varphi-\varphi')} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi'}}$ on retrouve les mêmes formules que pour la fonction exponentielle réelle (voir cours d'analyse), ce qui justifie cette notation !

  *Démonstration :*

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}\varphi\cdot\operatorname{cis}\varphi' &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\\ &= \cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'\\ &= \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')\\ &= \cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')\\ &= \operatorname{cis}(\varphi+\varphi')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{cis}\varphi}{\operatorname{cis}\varphi'} &= \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi' + i\sin\varphi'}\\ &= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}\\ &= \frac{\cos\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - i^2\sin\varphi\sin\varphi'}{\cos^2\varphi' - i^2\sin^2\varphi'}\\ &= \frac{\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' - \cos\varphi\sin\varphi')}{\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi'}\\ &= \frac{\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')}{1}\\ &= \operatorname{cis}(\varphi-\varphi')\end{aligned}$$

- $\boxed{\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \arg(z\cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')}$

En effet soient $z = r\operatorname{cis}\varphi$ et $z' = r'\operatorname{cis}\varphi'$ deux complexes sous leur forme trigonométrique, alors $z\cdot z' = r\operatorname{cis}\varphi \cdot r'\operatorname{cis}\varphi' = rr'\operatorname{cis}(\varphi+\varphi')$ d'après la propriété précédente donc $\arg(zz') = \varphi + \varphi' = \arg(z) + \arg(z')$.

De même :

$\frac{z}{z'} = \frac{r\operatorname{cis}\varphi}{r'\operatorname{cis}\varphi'} = \frac{r}{r'}\operatorname{cis}(\varphi-\varphi')$, donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \varphi - \varphi' = \arg(z) - \arg(z')$.

- **Formule de MOIVRE** (1667-1754)

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{Z}\quad \forall\varphi\in\mathbb{R}\quad (\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)}$$

*Démonstration :*

Montrons d'abord <u>par récurrence</u> que la formule est vraie pour $n\in\mathbb{N}$ :

* $\underline{n=0}$ : $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^0=1$ et $\cos 0+i\cdot\sin 0=1+i\cdot 0=1$, donc

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^0=\cos 0+i\sin 0$$

* Supposons que la formule est vraie pour $n\in\mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}(\operatorname{cis}\varphi)^{n+1}&=(\operatorname{cis}\varphi)^n\operatorname{cis}\varphi\\&=\operatorname{cis}(n\varphi)\cdot\operatorname{cis}\varphi &&\text{(hypothèse de récurrence)}\\&=\operatorname{cis}(n\varphi+\varphi)&&\text{(voir page 18)}\\&\overset{!}{=}\operatorname{cis}(n+1)\varphi\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n\in\mathbb{N}$, d'où :

$$(\operatorname{cis}\varphi)^{-n}=\frac{1}{(\operatorname{cis}\varphi)^n}=\frac{1}{\operatorname{cis}n\varphi}=\frac{\overline{\operatorname{cis}n\varphi}}{\operatorname{cis}n\varphi\cdot\overline{\operatorname{cis}n\varphi}}=\frac{\operatorname{cis}(-n\varphi)}{|\operatorname{cis}n\varphi|^2}=\frac{\operatorname{cis}(-n\varphi)}{1}=\operatorname{cis}(-n\varphi)$$

la formule est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{Z}$, cqfd.

<u>*Remarque*</u> :

Cette formule peut s'écrire aussi : $\boxed{(\operatorname{cis}\varphi)^n=\operatorname{cis}(n\varphi)\quad\text{ou}\quad\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}}$

## d) Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z=a+bi$ un complexe sous forme algébrique ; pour mettre z sous forme trigonométrique, il faut calculer son module r et son argument $\varphi$.

- On commence par calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Ensuite pour calculer $\varphi$ il faut résoudre le système d'inconnue $\varphi$ :

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

Or ce système admet toujours une solution (unique à un multiple de $2\pi$ près !) puisque chaque complexe a un argument !

*Exemples*

- $z = 1 + i \quad (a = b = 1)$, alors $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \end{aligned}\right\} \text{ donc } \varphi = \frac{\pi}{4} (+2k\pi)$$

d'où $z = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ ou $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

- $z = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$, alors $r = \sqrt{\dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{9} = 3$ et

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\varphi = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}\right\} \text{ donc } \varphi = \frac{5\pi}{6} (+2k\pi)$$

d'où $z = 3\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$ ou $z = 3e^{\frac{5\pi}{6}i}$

***Exercices 21, 22, 23***

## 6) Racines n-ièmes complexes d'un nombre complexe

- *Définition*

  Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}\ (n \geq 2)$, on appelle **racine n-ième (complexe)** de z tout nombre complexe u tel que $\boxed{u^n = z}$.

- *Recherche des racines n-ièmes de z :*

  Soit $z = r\text{cis}\varphi$ et $u = \rho\text{cis}\alpha$, alors : 
  
$$\begin{aligned} u^n = z &\Leftrightarrow (\rho\text{cis}\alpha)^n = r\text{cis}\varphi \\ &\Leftrightarrow \rho^n \text{cis}(n\alpha) = r\text{cis}\varphi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

  Ainsi $|u| = \sqrt[n]{|z|}$ et $\arg(u) = \dfrac{\arg(z) + 2k\pi}{n}$ ; toutes les racines n-ièmes ont donc le même module et on obtient n arguments distincts :

$$\frac{\varphi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n};\ \ldots;\ \frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

  en effet pour $k = n : \dfrac{\varphi}{n} + n\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi = \dfrac{\varphi}{n}$, etc..., d'où :

  ***Théorème***

  Tout nombre complexe $z = r\text{cis}\varphi$ admet n racines n-ièmes distinctes $(n \geq 2)$ :

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{avec } k = 0; 1; 2; 3; \ldots; n-1}$$

- *Remarque* :

  Comme pour les rcc on n'utilise JAMAIS la notation $\sqrt[n]{\ }$ pour une racine n-ème complexe !

- *Exemple* :

  Les racines 4-ièmes de $z = 16 \cdot \text{cis}\dfrac{\pi}{3}$ sont :

$$z_k = \sqrt[4]{16} \cdot \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \quad (\text{avec} \quad k = 0;1;2;3), \text{ càd :}$$

$$z_0 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{\pi}{12}, \quad z_1 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}, \quad z_2 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{13\pi}{12}, \quad z_3 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$$

- *Interprétation géométrique*

  Toutes les racines n-ièmes de $z = r\operatorname{cis}\varphi$ ont le même module $\sqrt[n]{r}$ donc les n points $M_k(z_k)$ d'affixes $z_k$ $(k = 0;1;\cdots;n-1)$ sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. On voit facilement que

$$\arg(z_k) = \arg(z_{k-1}) + \frac{2\pi}{n} \quad (\text{pour } k = 1;\cdots;n-1)$$

  donc $\widehat{M_0OM_1} = \widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_2OM_3} = \cdots = \widehat{M_{n-1}OM_1} = \frac{2\pi}{n}$.

  Par conséquent $M_0M_1M_2\cdots M_{n-1}$ est un **polygone régulier** à n côtés.

***Exercices 24, 25, 26, 27***

## 7) Polynômes à coefficients complexes

Soit $P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $c_i \in \mathbb{C}$ $(c_n \in \mathbb{C}^*)$ un polynôme de degré n à coefficients complexes et à variable complexe z. Comme les règles de calcul sont les mêmes dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, ces polynômes sont traités exactement de la même façon que les polynômes à coefficients réels et à variable réelle. En particulier le schéma pour la division des polynômes reste valable ainsi que le schéma de Horner pour une division par $z - a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Rappelons également la propriété fondamentale des polynômes :

P(a) est le reste de la division de P(z) par $z - a$

et sa conséquence pratique :

$$\boxed{P(z) \text{ est divisible par } z - a \Leftrightarrow P(a) = 0}$$

Ceci permet de factoriser P(z) quand on connaît une racine de P(z) et donc de résoudre certaines équations d'un degré supérieur à 2.

***Exercices 28 – 44***

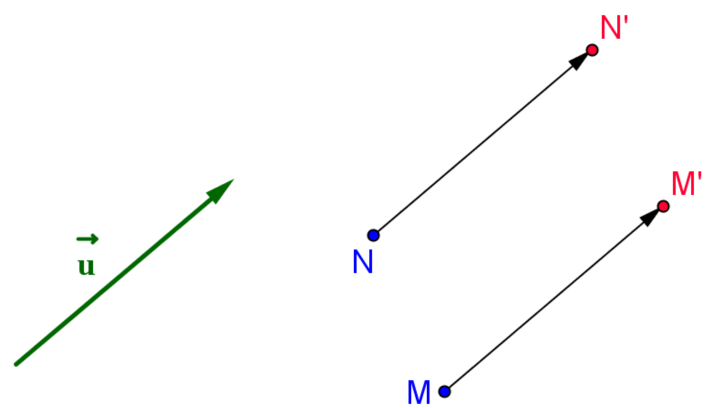
## 8) Interprétation géométrique des opérations sur les complexes

### a) Transformations du plan

Soit le plan muni d'un R.O.N. d'origine O, $\vec{u}$ un vecteur, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

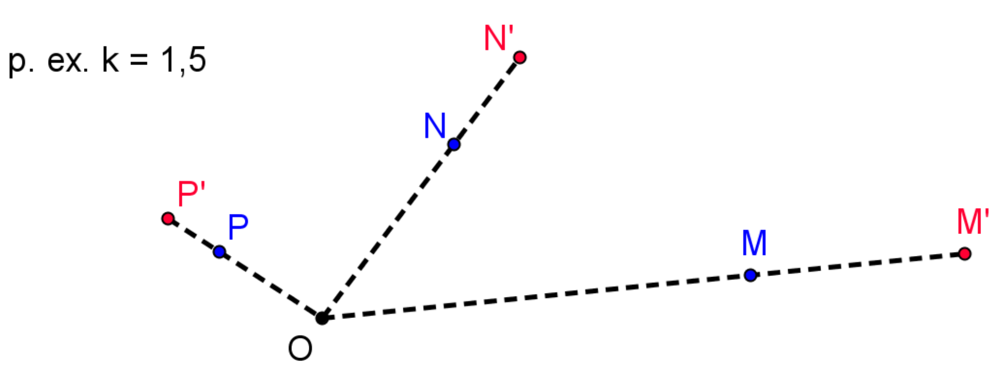
- On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$ la transformation du plan qui à tout point M associe le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$




- On appelle **homothétie** de centre O et de rapport k la transformation du plan qui à tout point M associe le point $M' = h_{O,k}(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

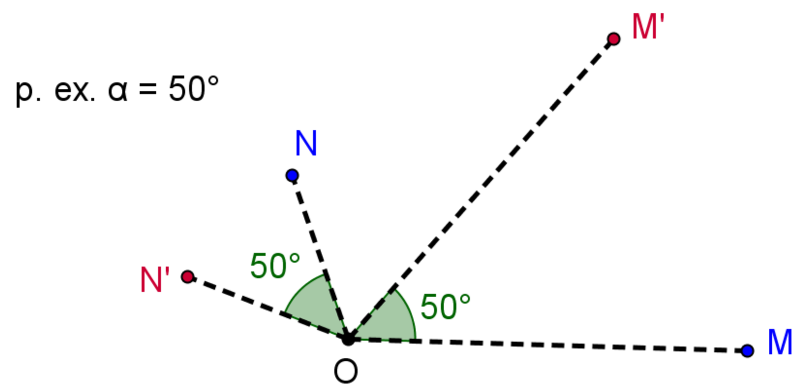


*Remarque*

On suppose $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ car pour $k = 1$ on aurait $\forall M \ \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, donc $M' = M$, et pour $k = 0$ on aurait $\forall M \ \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$, donc $M' = O$, deux cas peu intéressants !

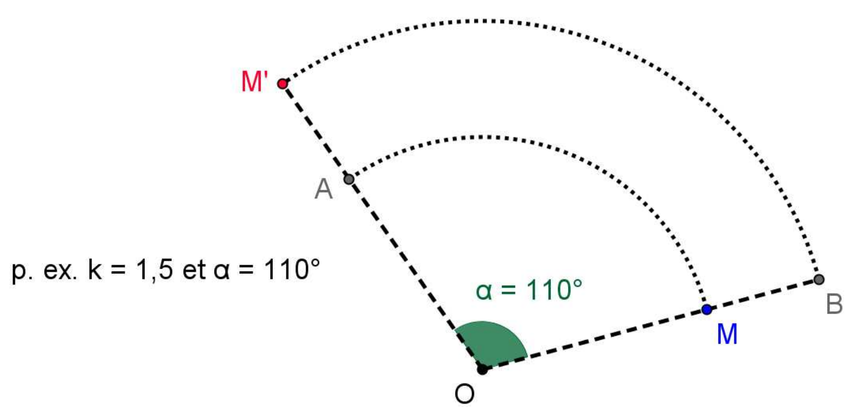
- On appelle **rotation** de centre O et d'angle $\alpha$ la transformation du plan qui à tout point M associe le point $M' = r_{O,\alpha}(M)$ défini par :

$$\overline{OM'} = \overline{OM} \text{ et } \operatorname{mes} \widehat{MOM'} = \alpha$$




- Soient $r_{O,\alpha}$ une rotation et $h_{O,k}$ une homothétie de <u>même centre</u> O, M un point du plan, $A = r_{O,\alpha}(M)$, $M' = h_{O,k}(A)$, $B = h_{O,k}(M)$. Alors on constate que $M' = r_{O,\alpha}(B)$ (voir figure !). En d'autres termes :

$$\boxed{\forall M \quad h_{O,k}\left(r_{O,\alpha}(M)\right) = r_{O,\alpha}\left(h_{O,k}(M)\right)}.$$

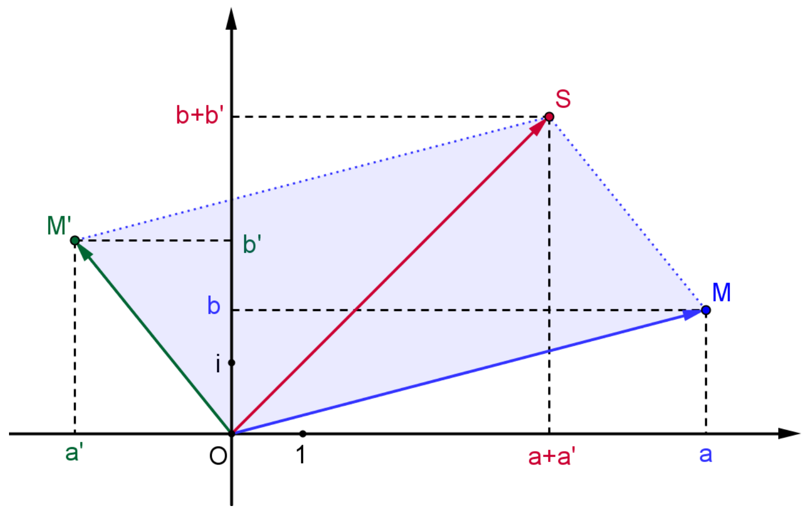



La transformation $\boxed{s_{O,\alpha,k} = r_{O,\alpha} \circ h_{O,k} = h_{O,k} \circ r_{O,\alpha}}$ est appelée **similitude** de centre O, d'angle $\alpha$ et de rapport k.

## b) Addition

Soient $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes, leur somme $s = z + z'$ et $M(z)$, $M'(z')$ et $S(s)$ dans le plan de Gauss.

Alors $s = (a + a') + (b + b')i$ et comme $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OS}\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ et par conséquent $OMSM' = \#$ !




On peut dire également : $S = t_{\overrightarrow{OM}}(M')$ ou $S = t_{\overrightarrow{OM'}}(M)$, par conséquent :

$$\boxed{\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad M(z), M'(z'), S(z + z') \Leftrightarrow OMSM' = \# \Leftrightarrow S = t_{\overrightarrow{OM'}}(M)}$$

*Remarques* :

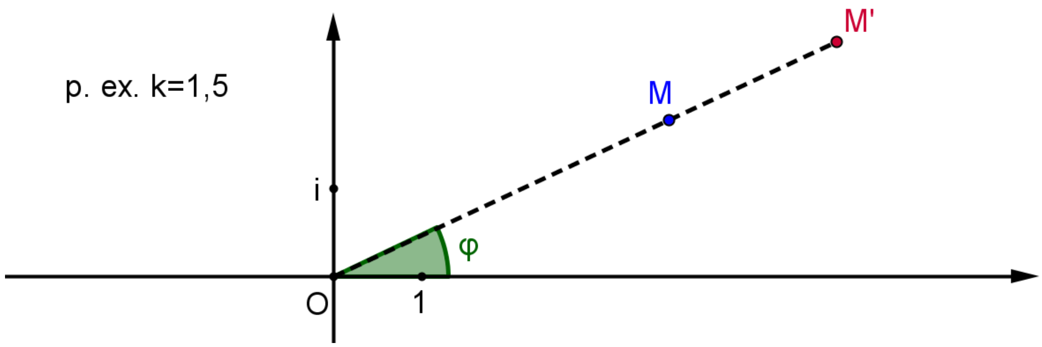
- On dit parfois que $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le <u>vecteur d'affixe</u> $a + bi$ et on note, comme pour les points, $\overrightarrow{OM}(a + bi)$.
- Si $M(x + yi)$ et $\vec{u}(a + bi)$, alors $t_{\vec{u}}(M) = M'(a + x + i(b + y))$.

## c) Multiplication par un réel k

Soient $k \in \mathbb{R}$, $z = r \cdot \text{cis}\varphi$, $z' = k \cdot z$, M(z) et M'(z').

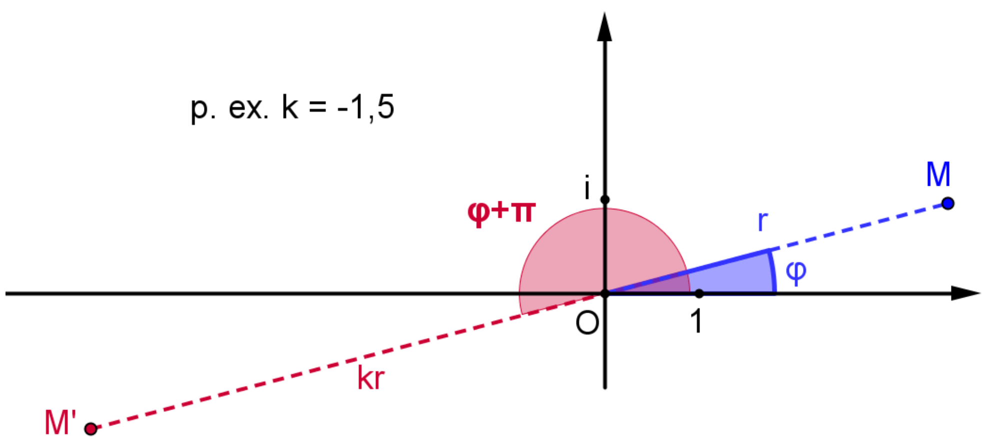
- $\boxed{1^{er} \text{ cas : } k \geq 0}$

  Alors $|z'| = |kr\text{cis}\varphi| = kr$, càd $OM' = k \cdot OM$, et $\arg(z') = \arg(z) = \varphi$, donc $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$




- $\boxed{2^{e} \text{ cas : } k < 0}$

  Alors $z' = kr \cdot \text{cis}\varphi = -kr \cdot (-\text{cis}\varphi) = -kr \cdot \text{cis}(\varphi + \pi)$, donc $|z'| = -kr$, càd $OM' = -k \cdot OM$, et $\arg(z') = \varphi + \pi = \arg(z) + \pi$, d'où $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$



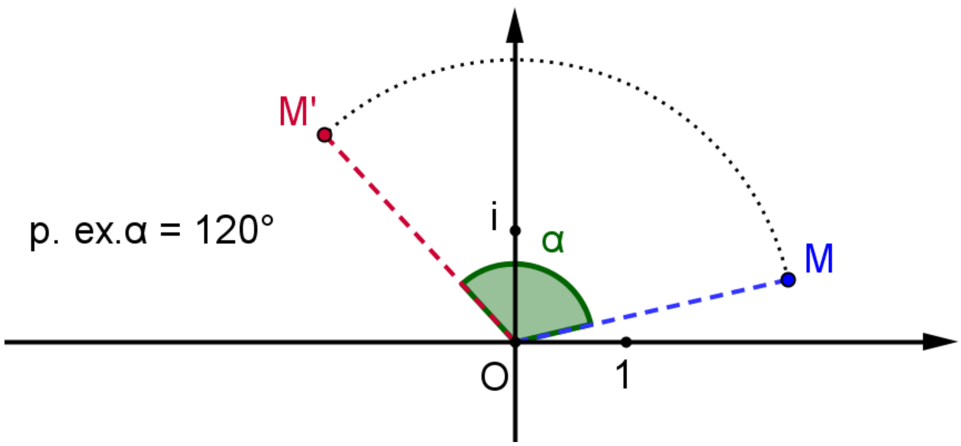

- *Conclusion* :

  $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad M(z)$ et $M'(k \cdot z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow M' = h_{O,k}(M)$
  où $h_{O,k}$ est l'homothétie de centre O et de rapport k

### d) Multiplication par cis $\alpha$

Soient $z = r \cdot \text{cis}\varphi$, $z' = z \cdot \text{cis}\alpha$, M(z) et M'(z').

Alors $z' = r \cdot \text{cis}\varphi \cdot \text{cis}\alpha = r \cdot \text{cis}(\varphi + \alpha)$, donc z et z' ont même module r et $\arg(z') = \arg(z) + \alpha$, par conséquent : $OM = OM' = r$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.




$$\boxed{\begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad M(z) \text{ et } M'(\text{cis}\alpha \cdot z) \Leftrightarrow M' = r_{O,\alpha}(M) \\ \text{où } r_{O,\alpha} \text{ est la rotation de centre O et d'angle } \alpha \end{array}}$$

### e) Multiplication par un complexe quelconque $r \cdot \text{cis}\alpha$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$, $M(z)$, et $M'(z')$ alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{z'}{z} = r\text{cis}\alpha \text{ (avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow z' = z \cdot r\text{cis}\varphi \Leftrightarrow M' = h_{O,r}\left(r_{O,\varphi}(M)\right) = s_{O,\varphi,r}(M) \\ \text{où } s_{O,\varphi,r} \text{ est la similitude de centre O, d'angle } \varphi \text{ et de rapport } r \end{array}}$$

*Exercices 45, 46*

### f) Quelques formules utiles

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ avec $z_A = x_A + iy_A$, $z_B = x_B + iy_B$, alors :

- $\boxed{\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)}$

En effet avec les notations classiques on a $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ donc

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\big((x_B-x_A)+i(y_B-y_A)\big) = \overrightarrow{AB}\big((x_B+iy_B)-(x_A+iy_B)\big)$$
$$= \overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$$

- $\boxed{AB=|z_B-z_A|=|z_A-z_B|}$

En effet : $AB = \left\| \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} \right\|$

$$= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$= |(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)|$$
$$= |z_B-z_A|$$

- $\boxed{\widehat{BAC} = \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)}$ (*)

*démonstration*

$\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)=\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AC}(z_C-z_A)=\overrightarrow{ON}$ avec $M(z_B-z_A)$ et $N(z_C-z_A)$,

donc $\widehat{BAC}=\widehat{MON}=\widehat{MOx}+\widehat{xON}=\widehat{xON}-\widehat{xOM}$

$$= \arg(z_C-z_A)-\arg(z_B-z_A)=\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$$

- $\boxed{A, B, C \text{ sont alignés } \Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}}$

En effet A, B, C sont alignés ssi $\widehat{BAC}$ mesure 0, $2\pi$, $\pi$ ou $-\pi$ rd c'est-à-dire $k\pi$ rd $(k\in\mathbb{Z})$ et d'après la formule (*) ceci revient à dire que $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

- $\boxed{(AB)\perp(AC)\Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}}$

En effet $(AB)\perp(AC)\Leftrightarrow \widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$ d'après (*).

- $\boxed{\text{A, B, C, D sont cocycliques } \Leftrightarrow \dfrac{\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}}{\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}}\in\mathbb{R}}$

  Nous admettrons ce résultat sans démonstration (celle-ci utilise (*), le cercle de Thalès et le théorème de l'arc capable).

***Exercices 47, 48, 49, 50***

# EXERCICES

## Exercice 1

Utilisez la formule de Del Ferro pour trouver une solution des équations suivantes (vérifiez l'exactitude de votre solution) :

**1)** $x^3-18x-35=0$

**2)** $x^3-3x+2=0$

## Exercice 2

Vérifiez les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

## Exercice 3

Calculez (donnez le résultat sous la forme $a+bi$) :

**1)** $(3-5i)+(-2+2i)-(-2+3i)$

**2)** $\frac{4-3i}{2}-\frac{2}{3}(1-i)-\frac{2-i}{6}$

**3)** $(3+2i)(4-3i)$

**4)** $\left(-\sqrt{3}-\frac{i}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+\frac{i}{2}\right)$

**5)** $\left(\sqrt{2}+3i\right)^2$

**6)** $\left(\sqrt{5}-3i\right)\left(2-i\sqrt{5}\right)$

**7)** $\left(-\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)^2$

**8)** $\left(2+\frac{i}{2}\right)^3$

**9)** $\left(\sqrt{2}-3i\right)^2\left(-7+6i\sqrt{2}\right)$

**10)** $\left(-2+i\sqrt{3}\right)^3$

**11)** $\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}+i\right)\left(\frac{2}{3}-i\right)$

**12)** $\left(\sqrt{2}-3i\right)^3-\left(\sqrt{2}+i\right)^3$

## Exercice 4

Trouvez les réels x et y tels que :

**1)** $(2x-1)+(1-y)i=5-3i$

**2)** $3x+2y+i-4xi=yi+2-i$

**3)** $3xi-2y=3x+2-4yi-2i$

**4)** $xi-y-x+3i=0$

**5)** $2x-1+2yi=2y-(2-3x)i$

## Exercice 5

**1)** Calculez $i^3$, $i^4$, $i^5$,…., $i^{10}$.

**2)** Déduisez-en une formule pour calculer $i^n$ où $n\in\mathbb{N}$.

**3)** Appliquez cette formule pour calculer $i^{372}$, $i^{2970}$, $i^{875}$ et $i^{1345}$.

## Exercice 6

**1)** Calculez $\overline{5+7i}$, $\overline{\dfrac{9-i}{2}}$, $\overline{13i}$, $\overline{78}$, $\overline{-4i}$.

**2)** Calculez $z+\overline{z}$ et $z-\overline{z}$ avec $z\in\mathbb{C}$

## Exercice 7

Démontrez les propriétés suivantes :

**1)** $\forall z\in\mathbb{C}\quad z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

**2)** $\forall z\in\mathbb{C}\quad z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

**3)** $\forall z=a+bi\in\mathbb{C}\quad z\overline{z}=a^2+b^2$

**4)** $\forall z,z'\in\mathbb{C}\quad \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

**5)** $\forall z,z'\in\mathbb{C}\quad \overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$

## Exercice 8

**1)** Calculez $i^{-1}$, $i^{-2}$, $i^{-3}$,…., $i^{-6}$.

**2)** Déduisez-en une formule pour calculer $i^n$ où $n\in\mathbb{Z}$.

**3)** Appliquez cette formule pour calculer $i^{-179}$, $i^{-2481}$, $i^{-522}$ et $i^{-1724}$.

## Exercice 9

Calculez :

1) $\frac{1}{-3i}$

2) $\frac{1}{3-i\sqrt{2}}$

3 $\frac{3+4i}{-2i}$

4) $\frac{7+i}{4-5i}$

5) $\frac{i\sqrt{5}}{\sqrt{3-i\sqrt{2}}}$

6) $\frac{1}{\sqrt{5}+i}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}\right)^2$

7) $\left(\frac{5-i}{7+i}\right)^2 \div \frac{2i}{3+i}$

8) $\frac{z^2-2z+3}{z^2+2z+3}$ avec $z=3-2i$

9) $\frac{3-2i}{4+3i}-\frac{7+8i}{1-3i}$

10) $\frac{1-3i}{5-i}-\frac{9i}{2+3i}$

## Exercice 10

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

1) $4z+25\overline{z}=2-3i$

2) $z-3=4z+8i$

3) $(1-3i)\overline{z}-\frac{5}{1+i}=7\overline{z}$

4) $\overline{3z-5\overline{z}}=2-i$

5) $(3-2i)z-\overline{1+3i}=\frac{z}{2-i}$

6) $(5-7i)z-\overline{2-3i}=\frac{2}{i}+4\overline{z}$

## Exercice 11

Construisez dans le plan de Gauss les points suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A(i)$ | $B(-5i)$ | $C(6)$ | $D(-4)$ |
| $E(3-5i)$ | $F(-(3-5i))$ | $G\left(\overline{3-5i}\right)$ | $H\left(-\overline{(3-5i)}\right)$ |
| $I(1+i)$ | $J(1-i)$ | | |

## Exercice 12

On donne $w = (z+2i)(\overline{z}+4)$ avec $z = x+yi \in \mathbb{C}$.

**1)** Représentez les ensembles suivants dans le plan de Gauss:

$A = \{z \in \mathbb{C} / w \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} / w \in i\mathbb{R}\}$

**2)** Déterminez le nombre k pour que l'équation $(z+2i)(\overline{z}+4) = k$ admette $2-3i$ comme solution, puis calculez l'autre solution de cette équation.

## Exercice 13

Soit $x = \dfrac{z^2}{1-z}$ avec $z = a+bi \in \mathbb{C}$.

**1)** Calculez x en fonction de a et b.

**2)** Construisez le lieu géométrique des points images P(z) pour lesquels $x \in \mathbb{R}$

## Exercice 14

**1)** Déterminez puis représentez dans le plan de Gauss les ensembles suivants :

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} / (iz+1+2i)(\overline{z}-3i) \in \mathbb{R}\right\}$$

$$B = \left\{z \in \mathbb{C} / (iz+1+2i)(\overline{z}-3i) \in i\mathbb{R}\right\}$$

**2)** Déterminez $A \cap B$

## Exercice 15

Démontrez les propriétés suivantes :

**1)** $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \in \mathbb{R}_+$

**2)** $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

**3)** $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

**4)** $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et déduisez-en que $\forall z' \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$

**5)** $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z+z'| \leq |z| + |z'|$. Sous quelle condition a-t-on l'égalité ?

**6)** $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\overline{z}| = |z|$

## Exercice 16

Calculez les rcc des nombres suivants :

**1)** $z = 8 + 6i$

**2)** $z = -45 - 28i$

**3)** $z = 1 + 2i$

**4)** $z = -9$

**5)** $z = 4i$

**6)** $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

**7)** $z = 3 - 5i$

## Exercice 17

Résolvez les équation suivantes dans $\mathbb{C}$

**1)** $3z^2 - 4z + 2 = 0$

**2)** $z^2 - 5iz - 6 = 0$

**3)** $(i+1)x^2 + 4 = 4x$

**4)** $u^2 + \left(\sqrt{2} - 2\right)iu + 2\sqrt{2} = 0$

**5)** $\frac{1}{2}z^2 + (2+i)z + 8i - 1 = 0$

**6)** $\frac{3}{1-2i}z^2 - (5+i)z + \frac{18}{5} + \frac{14}{5i} = 0$

## Exercice 18

Factorisez les polynômes suivants :

**1)** $P(z) = z^2 + 4$

**2)** $P(x) = 2x^2 + ix + 3$

**3)** $P(z) = 3z^2 + (8i - 2)z - 2i - 5$

**4)** $P(z) = (1 - 3i)z^2 - (4 + 18i)z + i - 17$

## Exercice 19

Résolvez les équation suivantes dans $\mathbb{C}$

**1)** $\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{3}$

**2)** $x^4 + 12x^2 + 27 = 0$

**3)** $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

**4)** $z^4 + (5 + 2i)z^2 - 50i = 0$

**5)** $3u^4 - 4u^3 + 4u - 3 = 0$

## Exercice 20

Vérifiez que les formules donnant les relations entre coordonnées cartésiennes et polaires pour un point du premier quadrant restent valables pour tous les points du plan.

## Exercice 21

Ecrivez les complexes suivants sous forme trigonométrique :

**1)** $z = -7$

**2)** $z = \frac{5i}{7}$

**3)** $1 + i\sqrt{3}$

**4)** $z = -3 - i\sqrt{3}$

**5)** $z = \sqrt{3} - 3i$

**6)** $z = -16 + 16i$

**7)** $z = 5 - 7i$

**8)** $z = 3i - (\sqrt{3} - i)$

**9)** $z = \left( \frac{-1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \right)^{46}$

## Exercice 22

Ecrivez les complexes suivants sous forme algébrique :

**1)** $z = 2\text{cis}120°$

**2)** $z = 5e^{\frac{11\pi}{6}i}$

**3)** $z = \text{cis}45° \cdot \text{cis}30°$ (en déduire $\cos 75°$ et $\sin 75°$)

**4)** $z = \left( 2\text{cis}\frac{\pi}{3} \right)^2 \left( 3\text{cis}\frac{\pi}{4} \right)^3$ (en déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$)

**5)** $z=(3-3i)^{17}$

**6)** $z=\dfrac{2e^{i60°}}{5e^{i45°}}$ (en déduire $\cos 15°$ et $\sin 15°$)

**7)** $z=\dfrac{(2-2i)^5}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^4}$

**8)** $z=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5(2-2i)^6$

**9)** $z=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4\left(-\sqrt{3}-3i\right)^6}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^8}$

## Exercice 23

Calculez $z=\dfrac{(1-i)^5}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}$ sous forme algébrique et trigonométrique. Déduisez-en les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

## Exercice 24

*Les racines cubiques de 1 :*

**1)** Calculez les trois racines cubiques de 1 sous forme trigonométrique et algébrique. On note **j** la racine cubique d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

**2)** Représentez ces racines dans le plan de Gauss.

**3)** Montrez que $j^2=\bar{j}$ est une des trois racines.

**4)** Résolvez l'équation $z^2+z+1=0$ dans $\mathbb{C}$. Que constatez-vous ?

## Exercice 25

Calculez les racines suivantes et faites à chaque fois une figure dans le plan de Gauss :

**1)** les racines cubiques de $i$

**2)** les racines quatrièmes de $-16$

**3)** les racines cinquièmes de $-\sqrt{3}+i$

**4)** les racines sixièmes de $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

**5)** les racines cubiques de $\dfrac{(2-2i)^4}{\left(-\sqrt{3}-i\right)^6(-2i)^{10}}$

## Exercice 26

*Somme des n racines n-ièmes de z*

**1)** Calculez les n racines n-ièmes de 1.

**2)** Montrez que $\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}\quad 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$.

**3)** Déduisez-en que la somme des n racines n-ièmes de 1 vaut 0.

**4)** Déduisez-en que la somme des n racines n-ièmes de tout complexe z vaut 0.

## Exercice 27

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ :

**1)** $z^6+1+i=0$

**2)** $x^4+81=0$

**3)** $y^3-2+i=0$

**4)** $t^4+t^2+1=0$

**5)** $z^4+8\sqrt{2}=8i\sqrt{2}$

**6)** $z^6-z^3+1=0$

## Exercice 28

Effectuez les divisions suivantes (utilisez le schéma général et vérifiez par le schéma de Horner si possible) :

**1)** $\left(z^3-3iz^2+(1-i)z+5\right)\div\left(z^2-iz+3\right)$

**2)** $\left(3x^3+(6i-9)x^2-5ix+10+15i\right)\div(x-3+2i)$

**3)** $\left((5-i)z^4+4iz+9-i\right)\div\left(iz^2-5\right)$

**4)** $\left(z^2-2iz+5-i\right)\div(z+i)$

**5)** $\left(z^3+(3-3i)z^2+(3-7i)z+14-8i\right)\div(z+3-i)$

## Exercice 29

Pour quelles valeurs du paramètre m le polynôme $P(z) = z^4 - 2iz^3 + (i - m)z + 2m$ est-il divisible par $z - 2i$ ?

## Exercice 30

Résolvez les équations suivantes :

**1)** $2z^3 - (21 + i)z^2 + (68 + 2i)z - 64 + 8i = 0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

**2)** $z^3 + (7 + 10i)z^2 + (120i - 81)z + 110i - 407 = 0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

**3)** $z^3 + (8i - 9)z^2 - (5 + 42i)z + 45 + 30i = 0$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.

**4)** $2z^3 + (5 - 11i)z^2 - (16 + 18i)z - 16 + 4i = 0$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.

**5)** $z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i = 0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

**6)** $z^3 + 2z^2 + 7iz - 5 - i = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

## Exercice 31

Factorisez le polynôme $P(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7$ sachant qu'il admet deux racines imaginaires pures.

## Exercice 32

Soit $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ où $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sont des paramètres complexes.

**1)** Déterminez $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sachant que $P(i) = 0$, $P(1) = -4i$ et que le reste de la division de P(z) par $z + i$ vaut $-8i$.

**2)** Factorisez P(z).

## Exercice 33

**1)** Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à coefficients complexes. Rappelez les formules donnant la somme et le produit des deux solutions complexes de cette équation.

**2)** Soit l'équation $z^2-(\alpha+3i+4)z+2\alpha i-1=0$ où $\alpha$ est un paramètre complexe. Déterminez $\alpha$ pour que cette équation ait deux racines conjuguées.

**3)** Soit l'équation $z^2+bz+c=0$ où $b,c\in\mathbb{C}$. A quelle condition cette équation admet-elle deux racines conjuguées ?

**Exercice 34**

Soit l'équation $z^2+\alpha z-(3+4i)\alpha+8+3i=0$ où $\alpha\in\mathbb{R}i$. Déterminez $\alpha$ sachant que cette équation a deux racines imaginaires pures que vous calculerez également.

**Exercice 35**

Soit l'équation $z^3+(2\lambda+3i)z^2+(-4+4\lambda i)z-4\lambda-2i=0$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

**1)** Montrez que $1-i$ est une racine de cette équation.

**2)** Trouvez les autres racines.

**3)** Déterminez $\lambda$ pour qu'au moins une racine soit imaginaire pure.

**Exercice 36*** (UCL 1997)

On considère l'équation que voici, dans laquelle p et q sont des paramètres complexes (et i est l'unité imaginaire) :

$$z^4+(1-2i)z^3+pz^2-(1+2i)z+q=0.$$

Déterminez le couple (p ;q) de telle manière que cette équation possède une racine double égale à i (c'est-à-dire deux racines confondues). Ensuite, pour le couple (p ;q) ainsi obtenu, calculez les autres racines (complexes) de l'équation.

**Exercice 37*** (UCL 1995)

Donnez toutes les racines complexes (y compris, bien entendu, les racines réelles), sous la forme $a+bi$, de l'équation suivante : $(z^2+2z)^3=8$

**Exercice 38*** (ULB 1996)

Soit l'équation $z^2+2(\alpha+i\gamma)z+\beta^2+4i\gamma+\alpha^2=0$ où $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Déterminez $\alpha,\beta$ et $\gamma$ pour que l'équation admette deux racines complexes conjuguées. Trouvez ensuite ces racines.

**Exercice 39*** (UCL 1996)

Déterminez le polynôme P(x) du 4$^e$ degré (possédant quatre racines réelles ou complexes) qui satisfait aux conditions suivantes :

- le coefficient de $x^4$ dans P(x) vaut 1 ;
- P(x) est divisible par $x^2-2x+5$ ;
- la somme des racines de P(x) vaut 1 ;
- le produit des racines de P(x) vaut $-30$.

Ensuite donnez toutes les racines de P(x).

**Exercice 40*** (ULB 1995)

Soit l'équation $z^3+\left(a-i\right)z^2+(b-ai)z-bi=0$ où $a,b\in\mathbb{R}$.

**a)** Démontrez que $z=i$ est une racine.

**b)** Déterminez a et b pour que le produit des trois racines égale i et la somme des trois racines égale $1+i$.

**Exercice 41*** (ULB 1999)

Résolvez dans $\mathbb{C}$ : $z^7-\dfrac{2+i}{i-3}z^4-z^3+\dfrac{2+i}{i-3}=0$.

Représentez les solutions dans le plan de Gauss.

**Exercice 42*** (ULG 1994)

Résolvez l'équation $\begin{vmatrix}1 & z^2 & z^6\\ 1 & i & -i\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$. Représentez l'ensemble des solutions dans le plan complexe.

**Exercice 43*** (ULG 1997)

Résolvez l'équation $z^3=\left|z\right|^2+i\sqrt{2}\leq\left|z\right|$.

*Suggestion* : recherchez $\left|z\right|$ en égalant les modules des deux membres. Déduisez-en la forme trigonométrique des solutions. Pour en obtenir la forme algébrique, notez que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$.

## Exercice 44* (ULG 1998)

Soient a et b deux nombres réels vérifiant l'inégalité $|b| < 2|a|$.

**a)** Montrez que l'équation $az^2 + bz + a = 0$ possède deux solutions conjuguées.

**b)** Calculez le module de ces solutions.

**c)** Calculez le cosinus de l'argument des ces solutions.

## Exercice 45

Soit $P(-2;3)$ dans un R.O.N. du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$. En vous servant des opérations dans $\mathbb{C}$ déterminez l'image P' de P par :

**1)** la translation $t_{\vec{u}}$.

**2)** l'homothétie $h_{O,-5}$.

**3)** la rotation $r_{O,210°}$.

**4)** la composée $r_{O,\frac{\pi}{3}} \circ t_{\vec{u}}$.

**5)** la composée $t_{\vec{u}} \circ r_{O,\frac{\pi}{3}}$.

**6)** la composée $t_{\vec{u}} \circ h_{O,7} \circ r_{O,-\frac{3\pi}{4}}$.

**7)** la composée $h_{O,-2} \circ r_{O,-\frac{5\pi}{6}} \circ t_{2\vec{u}}$.

## Exercice 46

**1)** Existe-t-il une translation $t_{\vec{u}}$ qui, appliquée trois fois de suite à $P(2+i)$ donne le point $P'(1+2i)$ comme image ?

**2)** Même question pour une homothétie $h_{O,k}$ ?

**3)** Même question pour une rotation $r_{O,\alpha}$ ?

## Exercice 47

Soient $A(-2+i)$, $B(-2-2i)$ et $C\left(\frac{3\sqrt{3}-4-i}{2}\right)$. Montrez de deux façons différentes que le triangle $\Delta(ABC)$ est équilatéral.

## Exercice 48

Soient $P(-2-i)$, $Q(5+2i)$ et $R(-8+13i)$. Montrez de deux façons différentes que le triangle $\Delta(PQR)$ est rectangle en P.

## Exercice 49

Soient $A(-1-5i)$, $B(2+i)$ et $C(4+5i)$. Montrez de deux façons différentes que A, B et C sont alignés.

## Exercice 50

Montrez que les points $A(8+i)$, $B(3+6i)$, $C(5i)$ et $D(7+4i)$ sont cocycliques.