CHAPITRE III

PROBABILITES

Table des matières

COURS

Ce cours faisant suite au cours de « Probabilités » de la classe de II^e B, chapitre V, il est vivement recommandé de commencer par réviser ce dernier !

A) Analyse combinatoire

En classe de 2^e nous avons vu que dans le cas de l'équiprobabilité la probabilité d'un évènement est donné par la formule de Laplace : « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles ». Pour appliquer cette formule il faut donc être à même de compter ces cas « favorables » ou « possibles », ce qui devient très vite une tâche assez difficile… Le but de ***« l'analyse combinatoire »*** *est de développer des techniques de « dénombrement » qui permettent de compter les éléments de certains « grands » ensembles.*

1) Les tirages au sort

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des **tirages au sort** de p boules d'une urne qui en contient n.

  Exemple

  La question : « Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier sur les trois premiers ? » peut être reformulée de la manière suivante : « De combien de façons peut-on tirer 3 boules d'une urne qui en contient 10 ? »

- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages au sort :
  - **L'ordre**

    si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon on parle d'un « tirage sans ordre ».
  - **La répétition**

    si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans la cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

- Il y a donc *quatre sortes de tirages au sort* :
  - Tirages *avec ordre et avec répétition* (OR)
  - Tirages *avec ordre et sans répétition* ($O\overline{R}$)
  - Tirages *sans ordre et sans répétition* ($\overline{O}\,\overline{R}$)
  - Tirages *sans ordre et avec répétition* ($\overline{O}R$)

2) Tirages avec ordre et avec répétition

- *Exemple :*

  Combien de nombres à deux chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?

  (en d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient trois numérotées de 1 à 3, avec ordre : 1^re boule tirée = chiffre des dizaines, 2^e boule tirée = chiffre des unités, et avec répétition (ou remise), le chiffre des dizaines et des unités pouvant être le même ?)

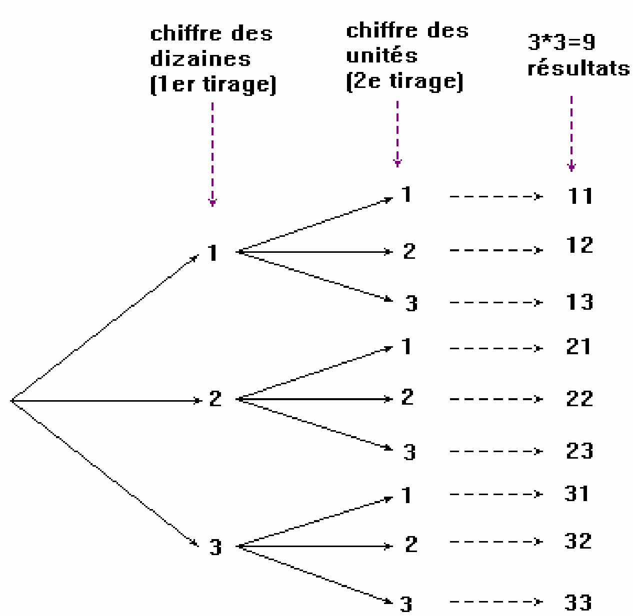
  Réponse : 9 nombres : 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

  Raisonnement :

  - pour le chiffre des dizaines on a 3 possibilités : 1, 2 ou 3
  - pour le chiffre des unités on a également 3 possibilités : 1, 2 ou 3
  - au total on a donc $3 \cdot 3 = 9$ possibilités

  Justification

  Pourquoi $3 \cdot 3 = 9$ et non pas $3 + 3 = 6$ possibilités ? Pour bien comprendre pourquoi dans ce genre de situation il faut multiplier et non pas additionner pour obtenir le total, il faut considérer le **diagramme en arbre** ci-contre :



- ***Cas général***

  On fait un tirage OR de p boules d'une urne qui en contient n :

  - Nombre de possibilités pour tirer la 1^{re} boule : n
  - Nombre de possibilités pour tirer la 2^{e} boule : n (car remise !)

    ⋮

  - Nombre de possibilités pour la p^{e} boule : n
  - Total : $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^p$ (diagramme en arbre !)

- **Définition**

  Un *tirage avec ordre et avec remise OR* de p objets parmi n est appelé **arrangement à répétition de n objets pris p à p**. Le nombre de ces tirages est noté B_n^p

- Nous venons de montrer que : $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad B_n^p = n^p}$

3) Tirages avec ordre et sans répétition

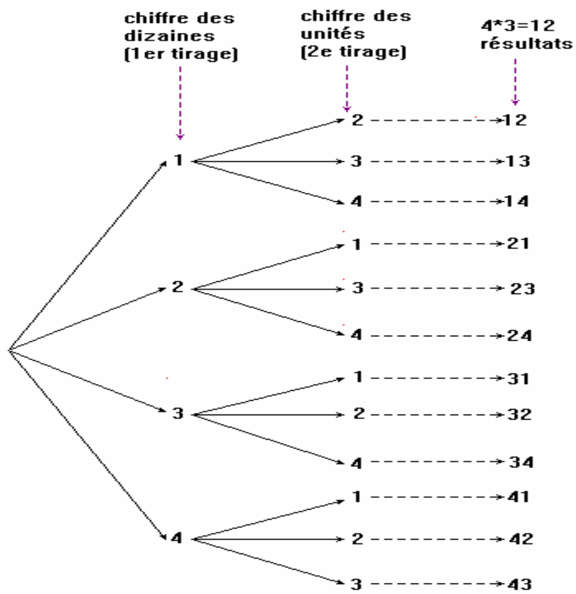
- *Exemple :*

  Combien de nombres à deux chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?

  (en d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient quatre numérotées de 1 à 4, avec ordre : 1^{re} boule tirée = chiffre des dizaines, 2^{e} boule tirée = chiffre des unités, et sans répétition ou remise, les chiffres des dizaines et des unités devant être différents ?)

  Raisonnement :

  - pour le chiffre des dizaines on a 4 possibilités : 1, 2, 3 ou 4
  - pour le chiffre des unités on n'a plus que $4-1=3$ possibilités puisqu'on ne peut plus tirer la boule qui vient de sortir !
  - au total on a donc $4 \cdot 3 = 12$ possibilités



- ***Cas général***

  On fait un tirage $O\overline{R}$ de p boules d'une urne qui en contient n. Il est tout d'abord évident que pour qu'un tel tirage existe, il faut que $p \le n$.

  - Nombre de possibilités pour la 1^{re} boule : n
  - Nombre de possibilités pour la 2^e boule : $n-1$ (car pas de remise !)
  - Nombre de possibilités pour la 3^e boule : $(n-1)-1 = n-2$

    $\vdots$

  - Nombre de possibilités pour la p^e boule : $n-(p-1) = n-p+1$
  - Total : $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-p+1)$ (diagramme en arbre !)

- **Définition**

  Un *tirage avec ordre et sans remise* $O\overline{R}$ de p objets parmi n est appelé **arrangement de n objets pris p à p**. Le nombre de ces tirages est noté A_n^p

- Nous venons de montrer que :

$$\boxed{\forall n,p \in \mathbb{N}^* \quad A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-p+1) & \text{si } p \le n \end{cases}}$$

- ***Cas particulier : p = n***

  Un tel tirage (on tire toutes les boules de l'urne dans un certain ordre) revient à *ranger les n boules de l'urne dans un certain ordre* : on dit qu'on a fait une **permutation** des n objets de l'urne et $A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

- **Définition**

  Le nombre $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ $(\text{pour } n \ge 2)$ est appelé **factorielle n** et est noté **n !**.Pour des raisons exposées plus bas on pose : $0! = 1! = 1$, d'où :

$$\boxed{n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n \le 1 \\ \prod_{i=1}^{n} i & \text{si } n > 1 \end{cases}}$$

- *Exemples*

  - $5! = 120$; $10! = 3'628'800$; $50! \approx 3{,}041409\cdot 10^{64}$; $100! \approx 9{,}332622\cdot 10^{157}$

- Il y a 25 ! possibilités pour placer 25 personnes sur 25 chaises. En supposant qu'un ordinateur très puissant « réalise » 100 milliards $\left(10^{11}\right)$ de tels placements *par seconde*, il aurait besoin pour finir son travail de :

$$\frac{25!}{3600\cdot 24\cdot 365{,}25\cdot 10^{11}} \approx 4'915'206 \ \underline{\text{années}} \ !$$

- *Autre notation pour* A_n^p *:*

  - pour $p < n-1$: $A_n^p = \dfrac{n\cdot\cdots\cdot(n-p+1)\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ (*)

  - $A_n^{n-1} = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-(n-1)+1) = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2 = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$

    Donc la formule (*) marche pour $p = n-1$ si et seulement si :

$$\frac{n!}{\left(n-(n-1)\right)!} = n! \Leftrightarrow \frac{n!}{1!} = n! \Leftrightarrow 1! = 1$$

  - $A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 1 = n!$

    Donc la formule (*) marche pour $p = n$ si et seulement si :

$$\frac{n!}{(n-n)!} = n! \Leftrightarrow \frac{n!}{0!} = n! \Leftrightarrow 0! = 1$$

  - Ainsi on a posé $0! = 1! = 1$ pour pouvoir écrire:

$$\boxed{\forall p \leq n \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

4) Tirages sans ordre et sans répétition

- *Exemple : le loto*

  On tire 6 boules d'une urne qui en contient 49 (numérotées de 1 à 49) sans considérer l'ordre dans lequel elles ont été tirées et sans remise (on ne peut pas tirer deux fois le même nombre).

  Soit x le nombre de tirages possibles : à chacun de ces tirages (p.ex. 5 – 43 – 17 – 28 – 31 – 35) on peut associer 6 ! tirages *avec ordre* (en permutant ces 6 éléments), donc $x\cdot 6! = A_{49}^6 \Leftrightarrow x = \dfrac{A_{49}^6}{6!} \Leftrightarrow x = \dfrac{49!}{43!6!}$. Ainsi il y a 13'983'816 façons de remplir une grille de loto !

- ***Cas général***

  Soit x le nombre de tirages $\overline{O}\,\overline{R}$ de p boules d'une urne qui en contient n (avec $p \le n$). En permutant les p boules d'un tel tirage, on obtient p ! tirages $O\overline{R}$. D'où :

  $$x \cdot p! = A_n^p \Leftrightarrow x = \frac{A_n^p}{p!} \Leftrightarrow x = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

- **Définition**

  Un *tirage sans ordre et sans remise* $\overline{O}\,\overline{R}$ de p objets parmi n (avec $p \le n$) est appelé **combinaison (sans répétition) de n objets pris p à p**. Le nombre de ces tirages est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

- Nous venons de montrer que : $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$

- Si p>n il n' y a aucune possibilité de tirer p objets parmi n sans répétition, donc on pose : $\forall p > n \quad C_n^p = 0$.

- Dans l'énumération des éléments d'un ensemble l'ordre ne joue pas de rôle donc un tirage $\overline{O}\,\overline{R}$ peut être considéré comme un sous-ensemble de p éléments d'un ensemble de cardinal n. Par conséquent :

  $$\boxed{C_n^p = \text{ nombre de sous-ensembles de p éléments d'un ensemble à n éléments}}$$

- *Exemples :*

  $C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$, $C_9^4 = \frac{9!}{5!4!} = 126$, $C_{17}^1 = \frac{17!}{16!1!} = 17$, $C_{39}^0 = \frac{39!}{39!0!} = 1$, etc.

5) Tirages sans ordre et avec répétition *(hors programme)*

- ***Exemple***

On choisit 6 entiers parmi 4 entiers a, b, c et d et on fait leur somme. Combien de résultats *différents* peut-on ainsi obtenir *au plus* (si on choisit p.ex. $a=1$, $b=10$, $c=100$ et $d=1000$ toutes les sommes calculées sont différentes, mais on vérifie facilement que pour d'autres choix, p.ex. $a=1$, $b=2$, $c=3$ et $d=4$, certaines sommes sont égales !) ?

Comme l'ordre des termes d'une somme ne joue aucun rôle, ceci revient à compter le nombre de tirages $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{R}$ de 6 nombres parmi les entiers a, b, c et d. Dans un tel tirage, la seule chose qui importe est le nombre de fois que chacun de ces entiers a été tiré. On peut donc représenter ces tirages de la manière suivante :

$$u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid u_4$$

où u_1 (respectivement u_2, u_3 et u_4) est le nombre de fois que l'entier a (respectivement b, c et d) est tiré, avec $\sum_{i=1}^{4} u_i = 6$.

Ou encore : $\underbrace{00\cdots0}_{u_1\,"0"} \mid \underbrace{00\cdots0}_{u_2\,"0"} \mid \underbrace{00\cdots0}_{u_3\,"0"} \mid \underbrace{00\cdots0}_{u_4\,"0"}$, autrement dit un tirage peut être représenté par une suite dans un certain ordre de 6 « 0 » et de $4-1=3$ « | ». Par exemple $000\,||\,0\,|\,00$ signifie qu'on a tiré 3 fois le a, aucune fois le b, 1 fois le c et 2 fois le d. Dans une telle suite de $6+3=9$ symboles il faut choisir 6 places pour mettre les « 0 » (les 3 places restantes sont occupées par des « | »), c'est-à-dire dans l'ensemble des 9 places disponibles il faut choisir un <u>sous-ensemble</u> de 6 places pour mettre les « 0 », ce qui peut se faire de $C_9^6 = \dfrac{9!}{3!6!} = 84$ manières différentes.

- ***<u>Cas général</u>***

Désignons par D_n^p le nombre de tirages $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{R}$ de p objets parmi n. D'après ce qui précède, un tel tirage peut être représenté par une suite de p « 0 » et de $n-1$ « | », donc D_n^p est égal au nombre de sous-ensembles de p éléments (les p places pour les « 0 ») d'un ensemble de $n-1+p$ éléments (puisqu'en tout il y a $n-1+p$ symboles dans une suite), d'où :

$$\boxed{D_n^p = C_{n+p-1}^p}$$

6) Propriétés du nombre C_n^p

a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^0 = C_n^n = 1}$

En effet $C_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!0!} = \dfrac{n!}{n!\cdot 1} = 1$ et $C_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!n!} = \dfrac{1}{0!\cdot 1} = \dfrac{1}{1\cdot 1} = 1$.

On aurait pu dire aussi qu'un ensemble de n éléments a 1 sous-ensemble de 0 élément (l'ensemble vide) et 1 sous-ensemble de n éléments (l'ensemble lui-même !).

b) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

En effet $C_n^1 = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{(n-1)!n}{(n-1)!1} = n$ et $C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

c) $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \leq n) \quad C_n^p = C_n^{n-p}}$

En effet $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = C_n^{n-p}$

p.ex. $C_5^3 = C_5^2$, $C_{17}^6 = C_{17}^{11}$, *etc.*

d) Triangle de Pascal

(Blaise Pascal, mathématicien, physicien, philosophe et théologien, 1623-1662, un des initiateurs du calcul des probabilités)

- $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \leq n) \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p}$ (*)

démonstration :

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot p}{(n-p)!(p-1)!\cdot p} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)(n-1-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot p}{(n-p)!p!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot p + (n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\left[p + (n-p)\right]}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p
\end{aligned}$$

- Dressons un tableau avec les valeurs des C_n^p :
  - Les lignes et les colonnes sont numérotées :0, 1, 2, 3, etc.
  - C_n^p se trouve à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne
  - d'après la propriété a) la première colonne et la diagonale du tableau seront remplies de « 1 »
  - au-dessus de la diagonale il n'y a que des 0 car si $p > n$ $C_n^p = 0$, ce qui donne une forme « triangulaire » à ce tableau
  - pour les autres valeurs on utilise la formule (*) pour calculer progressivement :

    $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1+1 = 2$, $C_3^1 = 1+2 = 3$, $C_3^2 = 2+1 = 3$, $C_4^1 = 1+3 = 4$,

    $C_4^2 = 3+3 = 6$, $C_4^3 = 3+1 = 4$, $C_5^1 = 1+4 = 5$, $C_5^2 = 4+6 = 10$, etc

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	**1**	**2**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**1**	**3**	**3**	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	0	0	0	0	0	0
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	0	0	0	0	0
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	0	0	0	0
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**	0	0	0
8	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**	0	0
9	**1**	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**	0
10	**1**	**10**	**45**	**120**	**210**	**252**	**210**	**120**	**45**	**10**	**1**

Exercices 1 – 26

e) Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors nous savons que :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

et nous constatons que les coefficients des expressions des membres droits de ces égalités sont les nombres des 3^e^ et 4^e^ lignes du triangle de Pascal :

$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$ et $(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$

Formulons l'hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^ia^{n-i}b^i + \cdots + C_n^na^0b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^ia^{n-i}b^i\end{aligned}} \quad (*)$$

et démontrons-la *par récurrence* :

pour $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b = C_1^0a^1 + C_1^1b^1$ donc (*) est bien vérifiée !

supposons que (*) est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle l'est aussi pour $n+1$:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} \\
&= (a+b)^n(a+b) \\
&= \left(C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^ia^{n-i}b^i + \cdots + C_n^na^0b^n\right)(a+b) \\
&= C_n^0a^{n+1}b^0 + C_n^1a^nb + C_n^2a^{n-1}b^2 + \cdots + C_n^na^1b^n + C_n^0a^nb + C_n^1a^{n-1}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^n + C_n^na^0b^{n+1} \\
&= C_n^0a^{n+1}b^0 + \left(C_n^1 + C_n^0\right)a^nb + \left(C_n^2 + C_n^1\right)a^{n-1}b^2 + \cdots + \left(C_n^n + C_n^{n-1}\right)ab^n + C_n^na^0b^{n+1} \\
&\overset{!}{=} C_{n+1}^0a^{n+1}b^0 + C_{n+1}^1a^nb + C_{n+1}^2a^{n-1}b^2 + \cdots + C_{n+1}^nab^n + C_{n+1}^{n+1}a^0b^{n+1}
\end{aligned}$$

La formule (*) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous les réels a et b : elle est appelée **formule du binôme de Newton**.

Exercices 27 – 35

B) Lois de probabilité

1) Variables aléatoires

- Soit Ω l'ensemble des éventualités liées à une expérience aléatoire et $p : \Omega \to [0,1]$ la probabilité associée à cette expérience.

  Exemple

  Un dé est jeté deux fois de suite :

$\Omega = \{(x, y) / \text{ x est le résultat du 1er jet et y celui du 2e jet}\}$, $\#\Omega = 6^2 = 36$ et p est l'équiprobabilité : $\forall (x, y) \in \Omega \quad p((x, y)) = \frac{1}{36}$

- Il arrive alors souvent qu'on associe à chaque élément de Ω un certain nombre réel par une application appelée **variable aléatoire** et notée X, Y, Z, ….

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Exemples

En reprenant l'exemple précédent on peut, par exemple :

- s'intéresser à la *somme* des deux résultats obtenus :

$$X : \Omega \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \text{ avec } \forall (x, y) \in \Omega \quad X((x, y)) = x + y$$

- faire un *jeu* : si j'obtiens deux fois le même résultat je gagne 10 €, sinon je perds 1 €.

$$Y : \Omega \to \{10, -1\} \text{ avec } \forall (x, y) \in \Omega \quad Y((x, y)) = \begin{cases} 10 & \text{si } x = y \\ -1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

- Comme nous ne considérons que les Ω finis dans ce cours, une variable aléatoire ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs que nous noterons x_i. La probabilité qu'une variable aléatoire X prenne la valeur x_i sera notée $p(X = x_i) = p_i$. En calculant p_i pour toutes les valeurs x_i possibles, on définit **la loi de probabilité de la variable aléatoire X**.

Exemples

En reprenant les exemples précédents :

- pour la v.a. X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Il suffit de regarder pour combien d'éventualités chaque somme x_i est obtenue.

- pour la v.a. Y :

x_i	10	-1
p_i	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

- En dessinant les points de coordonnées (x_i, p_i) dans un repère orthogonal et en reliant ces points par des segments, on obtient le **polygone de probabilité** de X.
- *Rappel :* **Moyenne arithmétique pondérée**
  - *Exemple*

    Marie a eu 43 en mathématiques, 38 en français et 51 en géographie. Calculez sa note moyenne sachant que ces notes sont « pondérées » par les coefficients 4 pour les mathématiques, 3 pour le français et 2 pour la géographie.

    $$\text{moyenne} = \frac{4\cdot 43+3\cdot 38+2\cdot 51}{4+3+2}=\frac{4}{9}\cdot 43+\frac{3}{9}\cdot 38+\frac{2}{9}\cdot 51\simeq 43{,}1$$

    En notant $x_1=43$, $p_1=\frac{4}{9}$, $x_2=38$, $p_2=\frac{3}{9}$, $x_3=51$ et $p_3=\frac{2}{9}$, on a :

    $$\text{moyenne} = p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+p_3\cdot x_3=\sum_{i=1}^{3}p_i\cdot x_i \text{ avec } \sum_{i=1}^{3}p_i=1 \text{ et } \forall i\ 0\le p_i\le 1.$$

  - *Cas général*

    Soient $(x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ n nombres réels quelconques et $(p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ n nombres réels compris entre 0 et 1 et dont la somme vaut 1 : $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$. Alors on appelle **moyenne arithmétique pondérée** des nombres $(x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ le nombre $\overline{x}$ défini par : $\overline{x}=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+\ldots+p_n\cdot x_n=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i$

- On appelle **espérance mathématique** de la v. a. X le nombre E(X) défini par :

$$\boxed{E(X)=\sum_i x_i p_i}$$

D'après ce qui précède ce nombre E(X) est la moyenne arithmétique *pondérée* des valeurs x_i, chaque x_i étant pondéré par sa probabilité p_i. L'espérance mathématique peut donc être interprétée comme **la moyenne arithmétique des valeurs x_i si on répétait l'expérience une infinité de fois** !

Exemples

En reprenant les exemples précédents :

- $E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+\cdots+12\cdot\frac{1}{36}=\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+\cdots+12\cdot 1}{36}=\frac{252}{36}=7$, ce qui signifie que si on répétait l'expérience une infinité de fois on obtiendrait en moyenne une somme de 7.

- $E(Y)=10\cdot\frac{1}{6}-1\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$, ce qui veut dire qu'en moyenne (en jouant un très grand nombre de fois) on gagne $\frac{5}{6}$ € par « partie ».

- Si X est un **jeu** et :
  - $E(X)>0$, on dit que ce jeu est **favorable** (au joueur).
  - $E(X)<0$, on dit que ce jeu est **défavorable** (au joueur).
  - $E(X)=0$, on dit que ce jeu est **équilibré.**

- On appelle **variance** de la v. a. X le nombre v(X) défini par :

$$\boxed{v(X)=\sum_i p_i\left(x_i-E(X)\right)^2}$$

C'est la moyenne pondérée des *carrés* des écarts des x_i par rapport à E(X). Le fait de prendre les carrés de ces écarts tend à donner plus d'importance aux grands écarts et de minimiser l'importance des petits écarts. La *dispersion* des valeurs x_i autour de E(X) est alors mesurée par un nombre appelé **écart type** défini par :

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{v(X)}}$$

Exemples

En reprenant les exemples précédents :

- $v(X)=\frac{1}{36}(2-7)^2+\frac{2}{36}(3-7)^2+\cdots+\frac{1}{36}(12-7)^2=\frac{35}{6}$ et $\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{6}}\approx 2{,}42$
- $v(Y)=\frac{1}{6}\left(10-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{5}{6}\left(-1-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{605}{36}$ et $\sigma(X)=\sqrt{\frac{605}{36}}\approx 4{,}10$

2) Loi binomiale

- Une **épreuve de Bernoulli** (*famille de mathématiciens suisses du 18e siècle*) est une expérience aléatoire qui
  - **n'a que <u>deux résultats possibles</u> qu'on convient d'appeler « succès » et « échec »**
  - **qu'on peut répéter indéfiniment dans les <u>mêmes conditions</u>**

On note **p** la probabilité du succès et $\mathbf{q}=1-p$ la probabilité de l'échec.

- *Exemples*
  - On joue à « pile ou face » et on définit soit pile soit face comme un « succès », alors $p = q = \frac{1}{2}$
  - On jette un dé non truqué et on définit le résultat « 6 » comme « succès », tout autre résultat comme « échec », alors $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$
- En répétant une telle expérience n fois on a :

$$\Omega = \left\{ \left(u_1, u_2, \cdots, u_i, \cdots, u_n \right) / \ u_i = \text{ succès ou échec} \right\}$$

On appelle **loi binomiale** la loi de probabilité de la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X\left(\left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right) \right) =$ nombre de succès dans $\left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right)$

- Calcul de $p_i = p\left(X = i \right)$ pour $0 \leq i \leq n$:
  - Soit $\left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right) \in \Omega$ telle que $X\left(\left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right) \right) = i$, c'est-à-dire une éventualité qui compte i « succès » et $n - i$ « échecs ». Cette éventualité peut être considérée comme l'intersection des n évènements définis par :

$$A_j : \text{ "obtenir } u_j \text{ à la } j^e \text{ épreuve" avec } p\left(A_j \right) = \begin{cases} p & \text{si } u_j \text{ est un succès} \\ q & \text{si } u_j \text{ est un échec} \end{cases}$$

Comme ces n évènements sont <u>indépendants</u>, on a :

$$p\left(\left(u_1, u_2, \cdots, u_n \right) \right) = p\left(\bigcap_{j=0}^{n} A_j \right) = \prod_{j=0}^{n} p\left(A_j \right) = p^i q^{n-i}$$

  - Or il y a C_n^i possibilités pour choisir i « emplacements » pour les « succès », les « emplacements » restants étant réservés pour les $n - i$ « échecs ».
  - D'où : $\boxed{\forall i \leq n \quad p_i = p\left(X = i \right) = C_n^i p^i q^{n-i} = C_n^i p^i \left(1 - p \right)^{n-i}}$

- *Remarque :*

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = \left(p + q \right)^n = 1^n = 1 \text{ (d'après la formule du binôme de Newton)}$$

- <u>*Exemples*</u> *(reprise des deux exemples précédents)*
  - En jouant 30 fois à « pile ou face » la probabilité d'obtenir 10 fois « face » vaut : $p\left(X = 10 \right) = C_{30}^{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{20} = C_{30}^{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{30} \simeq 0,0280$

- En jetant 30 fois un dé non truqué la probabilité d'obtenir 10 fois un « 6 » vaut : $p(X=10)=C_{30}^{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{20}=C_{30}^{10}\frac{5^{20}}{6^{30}}\simeq 0,0130$

- Calculons l'espérance mathématique d'une loi binomiale :

$E(X)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot p_i=\sum_{i=1}^{n} i\cdot p_i=\sum_{i=1}^{n} i\,C_n^i p^i q^{n-i}$, or pour tout $i\geq 1$ on a :

$i\cdot C_n^i=i\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}=n\cdot C_{n-1}^{i-1}$, d'où :

$E(X)=\sum_{i=1}^{n} n\cdot C_{n-1}^{i-1}p^i q^{n-i}=np\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1}p^{i-1}q^{n-i}$, et en posant $k=i-1$ il vient :

$E(X)=np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}p^k q^{n-1-k}=np\left(p+q\right)^{n-1}=np1^{n-1}=np$, d'où :

$$\boxed{E(X)=np}$$

- *Exemples (reprise des deux exemples précédents)*
  - En jouant 30 fois à « pile ou face » $E(X)=30\cdot\frac{1}{2}=15$
  - En jetant 30 fois un dé non truqué $E(X)=30\cdot\frac{1}{6}=5$

- Calculons la variance mathématique d'une loi binomiale :

$$\begin{aligned}
v(X)&=\sum_{i=0}^{n} p_i\left(i-E(X)\right)^2=\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}\left(i-np\right)^2\\
&=\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}\cdot i^2-2np\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}\cdot i+n^2p^2\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i}\\
&=\sum_{i=1}^{n} i\cdot i\cdot C_n^i p^i q^{n-i}-2np\cdot E(X)+n^2p^2\left(p+q\right)^n\\
&=\sum_{i=1}^{n} i\cdot n\cdot C_{n-1}^{i-1}p^i q^{n-i}-2np\cdot np+n^2p^2\cdot 1^n\\
&=np\cdot\sum_{i=1}^{n} i\cdot C_{n-1}^{i-1}p^{i-1}q^{n-i}-2n^2p^2+n^2p^2\\
&=np\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(k+1\right)\cdot C_{n-1}^{k}p^k q^{n-1-k}-n^2p^2\quad\left(\text{en posant } k=i-1\right)\\
&=np\cdot\sum_{k=0}^{n-1} k\cdot C_{n-1}^{k}p^k q^{n-1-k}+np\cdot\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}p^k q^{n-1-k}-n^2p^2
\end{aligned}$$

$$= np\cdot(n-1)p + np\cdot(p+q)^{n-1} - n^2p^2$$
$$= n^2p^2 - np\cdot p + np\cdot 1 - n^2p^2$$
$$= np(np - p + 1 - np)$$
$$= np(1-p)$$
$$= npq$$

- *<u>Exemples</u> (reprise des deux exemples précédents)*
  - o $v(X) = 30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 7{,}5$ et $\sigma(X) = \sqrt{7{,}5} \approx 2{,}74$
  - o $v(X) = 30\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$ et $\sigma(X) = \sqrt{4{,}17} \approx 2{,}04$

- **Formulaire pour la loi binomiale :**

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall i \le n \quad p_i = p(X=i) = C_n^i p^i q^{n-i} = C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \\ E(X) = np \\ v(X) = npq \\ \sigma(X) = \sqrt{npq} \end{array}}$$

Exercices 36 – 50

<u>EXERCICES</u>

1) Avec les chiffres de 0 à 9, combien peut-on former de nombres à 6 chiffres (le premier chiffre étant bien sûr différent de 0) :

a) si on admet que ces nombres peuvent contenir plusieurs fois le même chiffre ?

b) si on veut que les 6 chiffres d'un de ces nombres soient 2 à 2 différents ?

2) Combien de plaques d'immatriculation pour les voitures a-t-on si chaque plaque

a) est constituée de 2 lettres suivies de 3 chiffres ?

b) est constituée de 2 lettres suivies de 4 chiffres ?

c) est constituée de 2 lettres et de 3 chiffres dans un ordre quelconque ?

3) Combien y a-t-il de nombres à 4 chiffres tel que le chiffre des milliers soit impair, le chiffre des centaines strictement inférieur à 7, le chiffre des dizaines pair et le chiffre des unités supérieur ou égal à 4 ?

4) Un lycée de 1200 élèves (640 filles et 560 garçons) et de 180 professeurs (72 femmes et 108 hommes) veut se doter d'un conseil de 10 membres, 5 élèves et 5 professeurs. De combien de façons peut-on procéder si

a) on n'impose pas de condition particulière ?

b) on veut que le conseil ait autant de membres masculins que féminins ?

c) on veut que le conseil ait au moins 4 filles et au moins 4 membres masculins ?

5) De combien de façons peut-on tirer une main de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant

a) 1 roi, 1 dame et 2 valets?

b) 3 cartes noires ?

c) au moins 1 trèfle?

d) 2 dames et 2 cœurs ?

e) une carte de chaque couleur ?

f) 4 cartes de même valeur ?

g) au moins 1 roi et au plus 3 as ?

h) au moins 1 roi et au plus 2 as ?

i) des cartes de deux couleurs différentes ?

j) des cartes de trois valeurs différentes ?

6) De combien de manières peut-on choisir 2 délégués de nationalités différentes parmi 4 belges, 6 français et 8 anglais ?

7) De combien de manières une société de 10 membres peut-elle choisir un groupe de 3 personnes pour effectuer un voyage culturel …..

a) si Madame Gamma refuse de partir avec Monsieur Zète ?

b) si Mlle Alpha et M. Bêta n'acceptent de participer au voyage que s'ils sont ensemble ?

c) si on est soumis aux deux contraintes précédentes à la fois ?

d) mêmes questions si on veut constituer un groupe de 4 personnes pour le voyage.

8) P. a 5 livres d'algèbre, 3 livres de géométrie et 4 livres d'analyse.

a) De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère de sa bibliothèque ?

b) Même question en les regroupant par sujet.

9) De combien de façons peut-on ranger 5 boules dans 7 cases …

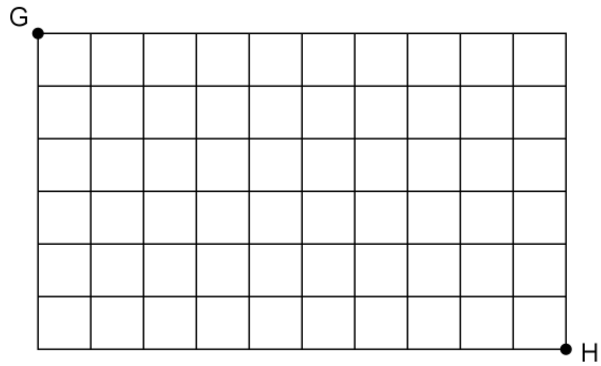
a) si les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?

b) si les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?

c) si les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?

d) si les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?

10) Voici le plan d'une ville américaine, G étant la gare et H un hôtel :



Chaque bloc est un carré de 100 m sur 100 m. Quelle est la longueur minimale d'un trajet qui va de la gare à l'hôtel indiqué ? Comment faut-il se déplacer sur ce quadrillage si on ne veut pas dépasser cette longueur minimale ? Combien de trajets différents y a-t-il pour aller de la gare à l'hôtel sans faire de détour ?

11) De combien de façons peut-on dédoubler une classe de 30 élèves …

a) en deux classes de 15 élèves ?

b) en deux classes de 15 élèves sachant que l'une aura M. Hicks comme titulaire tandis que la titulaire de l'autre sera Mme Ygraic ?

c) mêmes questions si on veut faire 3 classes de 10 élèves.

12) Avec les 9 chiffres distincts de 0, combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres différents …

a) qui se terminent par 7 ?

b) qui se terminent par 23 ?

c) qui comprennent 4 ?

d) qui ne comprennent pas 9 ?

e) qui ne comprennent que des chiffres impairs ?

f) qui comprennent 5 mais pas 6 ?

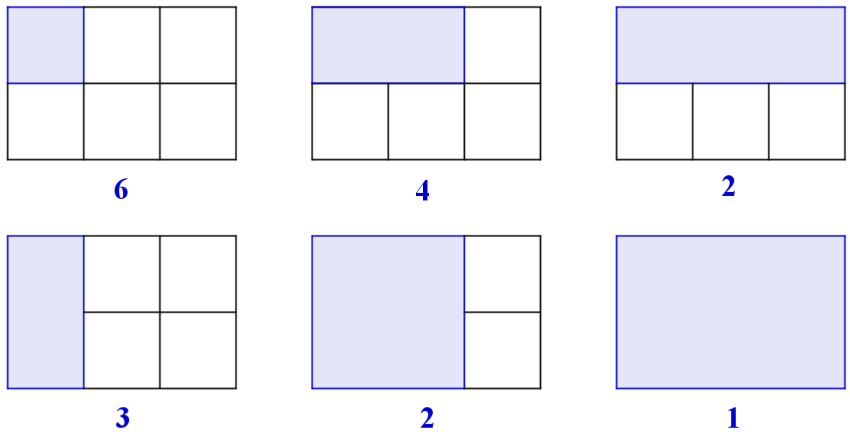
g) qui comprennent 2 et 5 sous la forme 25 ? *(p,ex. 7**25**18, mais pas 7**2**1**5**8)*

h) qui comprennent 2 et 5 dans cet ordre ? *(p.ex. 9**2**47**5**1, mais pas 9**5**47**2**1)*

i) qui comprennent 2 et 5 dans un ordre quelconque ?

j) dont deux sont pairs et trois impairs ?

13) Il y a $6+4+2+3+2+1=18$ rectangles possibles sur un damier de dimensions 2×3 :



Combien y en a t-il sur un damier $m\times n$?

14) Au poker on dispose d'un jeu de 32 cartes (4 **couleurs** : cœurs, carreaux, trèfles et piques et 8 **valeurs** : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7). Calculez la probabilité d'obtenir une main de 5 cartes formant :

a) un *full* (3 cartes d'une valeur et 2 autres d'une autre valeur, *p.ex. 3 as et 2 valets*)

b) une *quinte floche* (5 cartes consécutives d'une même couleur, *p.ex. 8, 9, 10, valet, dame, tous carreaux*)

c) une *couleur* (5 cartes non consécutives d'une même couleur, *p.ex. 7, 9, 10, valet, as, tous carreaux*)

d) une *quinte* (5 cartes consécutives qui ne sont pas d'une même couleur, *p.ex. 8 de trèfle, 9 de carreau, 10 de pique, valet de pique, dame de cœur)*

e) un *carré* (4 cartes d'une même valeur et une autre, *p.ex. 4 as et un 10*)

15) D'un jeu de 32 cartes on tire simultanément 2 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 2 cartes rouges ?

b) 2 piques ?

c) 2 cartes de même couleur (parmi les 4 couleurs) ?

d) 1 roi et 1 neuf ?

e) 2 cartes de valeurs différentes ?

f) 1 valet et 1 trèfle exactement ?

g) 1 roi ou 1 pique ?

16) Reprenez les questions de l'exercice précédent si on tire successivement 2 cartes en tenant compte de l'ordre du tirage,

a) sans remise.

b) avec remise de la première carte avant de tirer la deuxième.

17) On distribue à un joueur 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculez la probabilité qu'il ait dans sa main :

a) 5 piques, 3 trèfles, 4 carreaux et 1 cœur.

b) Au moins 2 cœurs ?

c) Au plus 3 rois ?

d) Au moins 1as et 1 sept?

18) Une commission européenne est formée de 20 membres : 12 allemands, 6 polonais et 2 hongrois. En en choisissant 2 au hasard, quelle est la probabilité qu'ils aient la même nationalité ?

19) Dans un village il y a 6 bistrots. Six villageois décident, sans se concerter, de passer la soirée dans un des 6 bistrots.

a) Quelle est la probabilité pour que les six personnes aient choisi le même bistrot ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient choisi le même établissement ?

20) Pour l'examen oral de géographie, le professeur a réalisé 60 fiches proposant chacune un paragraphe de la matière à réviser. Chaque élève doit en tirer 4 au hasard. Sachant que P. n'a révisé qu'un tiers du programme, quelle est la probabilité pour qu'il :

a) connaisse les 4 sujets tirés ?

b) ne connaisse aucun des 4 sujets tirés ?

c) connaisse 3 des 4 sujets tirés ?

d) rate son examen ?

21) On lance 5 pièces de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) exactement 3 faces ?

b) au moins 3 faces ?

22) Dans un sac il y a 9 boules numérotées de 1 à 9. Calculez la probabilité de tirer

a) deux boules impaires

i) simultanément

ii) successivement (sans remise)

b) une paire et une impaire

i) simultanément

ii) successivement (sans remise)

23) On tire simultanément 3 boules d'une urne qui contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 7 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 1 boule de chaque couleur ?

b) 3 boules de même couleur ?

c) 2 boules rouges et 1 boule d'une autre couleur ?

d) au moins 2 boules noires ?

24) Jouer au loto consiste à choisir 6 numéros parmi 49. Calculez la probabilité d'avoir :

a) les 6 bons numéros.

b) 5 bons numéros et le numéro complémentaire.

c) 5 bons numéros.

d) 4 bons numéros.

e) 3 bons numéros.

25) Une tombola comprend 1000 billets pour 2 lots gagnants. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité de gagner soit supérieure à 0,5 ?

26) Ecrivez plus simplement :

a) $71!\cdot 72$

b) $\dfrac{84!}{84}$

c) $(n+1)n!$

d) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)(n+2)}$

e) $\dfrac{100!}{99!}$

f) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

27) Développez les binômes suivants :

a) $(a+b)^7$

b) $(2x+3y)^4$

c) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^3$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}-\dfrac{x^2}{2}\right)^6$

e) $(a-2b)^5$

f) $\left(x^3\sqrt{2}-\dfrac{1}{x\sqrt{2}}\right)^4$

28) Quelle est la somme des coefficients des développements de $(x+y)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$?

29) Soit E un ensemble de n éléments, où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E à 0, 1, 2, 3, p éléments ?

b) Notons $\wp(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Calculez le cardinal de cet ensemble.

c) Retrouvez ce résultat en utilisant un tirage au sort bien choisi.

30) Calculez le terme en …

a) x^6 dans $\left(3x^2-2\right)^{10}$

b) x dans $\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5$

c) x^{16} dans $x^{10}\left(x+7\right)^8$

d) t^3 dans $\left(3t+\frac{1}{t^2}\right)^{12}$

31) Calculez le(s) terme(s) milieu(x) dans le développement de :

a) $\left(3x+2\right)^{12}$

b) $\left(4k^2-\frac{3}{k}\right)^{11}$

c) $\left(y\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7$

32) Démontrez (et complétez celles qui sont incomplètes) les formules suivantes où $n, p \in \mathbb{N}^*$:

a) $C_n^p = \ldots C_{n-1}^{p-1}$

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + \left(-1\right)^n C_n^n = \ldots$

c) $C_{n+1}^p = C_n^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} + \cdots + C_{n-p+1}^1 + C_{n-p}^0$

d) $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

e) $\frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + \cdots + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

f) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ pour $1 \le k \le n$

g) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = \ldots$

h) $\sum_{i=0}^{n} iC_n^i p^i (1-p)^{n-i} = \ldots$ $\left(\text{avec } p \in \mathbb{R}\right)$

33) Calcule n sachant que $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{3}-387n=0$

34) **a)** Démontrez les **formules d'Euler** suivantes :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \cos x=\frac{\operatorname{cis}(x)+\operatorname{cis}(-x)}{2}=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\quad (1)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin x=\frac{\operatorname{cis}(x)-\operatorname{cis}(-x)}{2i}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\quad (2)$$

b) Appliquez ces formules pour **linéariser** (c-à-d exprimer sans exposant) $\cos^n x$ et $\sin^n x$ pour n=2, 3, 4, 5.

35) Pour chacune des expressions suivantes :

- développez en vous servant de la formule du binôme de Newton
- calculez en vous servant de la formule de Moivre
- comparez les résultats

a) $(1+i)^5$

b) $(1-i)^6$

c) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^4$

d) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$

36) Dans le jeu de « pile ou face » on gagne 1 € si on obtient « pile » et on perd 2 € si on obtient « face ». Choisissez une variable aléatoire X et calculez E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

37) Dans une urne il y a 12 boules noires et 8 boules blanches. Si on tire une boule blanche on gagne 5 €, si on tire une boule noire on perd 3 €. Choisissez une variable aléatoire X et calculez E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

38) On jette un dé non truqué et on gagne 5 € si on obtient le 6, 2 € si on obtient le 4 ou le 5, on perd 3 € si on obtient le 2 ou le 3, et 4 € si on obtient le 1. La variable aléatoire X est définie par le gain du joueur. Calculez la loi de probabilités de X, E(X), V(X) et $\sigma(X)$ et dessinez le polygone de probabilités de X. Le jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ? Combien devrait-il gagner en obtenant le 6 pour que le jeu soit équilibré ?

39) On jette un dé et si le nombre qui sort est premier, on gagne autant d'euros, sinon on perd le nombre d'euros indiqué par le dé. Choisissez une variable aléatoire X et calculez E(X), V(X) et $\sigma(X)$. Aimeriez-vous jouer à ce jeu ? Faites une proposition pour changer (aussi peu que possible !) la règle de ce jeu afin qu'il soit bien équilibré !

40) On tire au hasard un échantillon de 3 articles d'une boîte qui contient 30 articles, dont 7 sont défectueux. Calculez l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux auquel on peut s'attendre.

41) Un joueur lance une pièce non truquée n fois de suite. Il gagne s'il obtient pile p fois. Quelle est la probabilité qu'il gagne

a) si $n = 4$ et $p = 1$?

b) si $n = 8$ et $p = 2$?

c) si $n = 12$ et $p = 3$?

42) Une urne contient 7 boules blanches et 5 boules noires.

a) On tire deux boules avec remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?

b) On tire 20 boules avec remise

i) Quelle est la probabilité de tirer autant de noires que de blanches ?

ii) Quelle est la probabilité de tirer 7 boules noires ?

iii) Quelle est la probabilité de tirer au plus 5 boules blanches ?

43) Lors d'un examen un étudiant se voit proposer 10 questions à choix multiple : 4 réponses par question, dont une seule correcte. L'étudiant, qui ne s'est pas du tout préparé pour l'examen, choisit les réponses entièrement au hasard.

a) Quel résultat peut-il raisonnablement (mathématiquement) espérer ?

b) Quelle est sa probabilité de réussite (au moins 5 sur 10) ?

44) Une pièce est lancée 6 fois de suite et on choisit la variable aléatoire X : nombre de « face ».

a) Déterminez la loi de probabilités de X.

b) Calculez $p(X < 3)$.

c) Quel est le nombre de « pile » espéré ?

d) Calculez $v(X)$ et $\sigma(X)$.

45) Un tireur atteint une cible avec une probabilité de 1/3.

a) S'il tire 6 fois, quelle est la probabilité qu'il atteigne la cible au moins 3 fois ?

b) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois soit supérieure à 0,999 999 ?

46) La probabilité d'obtenir « pile » avec une certaine pièce mal équilibrée est de 1/3. On jette cette pièce 4 fois et on considère la variable aléatoire X : plus grand nombre de « pile » successifs. Calculez l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

47) Deux dés sont jetés simultanément. La variable aléatoire X est la différence positive des chiffres obtenus par les deux dés.

a) Déterminez la loi de probabilités de X.

b) Tracez le polygone de probabilités.

48) On considère un lot de pièces dont 10% sont défectueuses. On choisit un échantillon de 100 pièces. Quelle est la probabilité de trouver dans cet échantillon au plus 10 pièces défectueuses ?

49) On suppose qu'il y a équiprobabilité d'obtenir une fille ou un garçon.

a) Quel est le nombre moyen de filles dans une famille de 10 enfants ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'une famille de 10 enfants ait :

- un nombre de filles égal à cette moyenne ?
- exactement 3 garçons ?
- au moins 2 filles ?

50) Un aquarium contient 6 poissons rouges à 1,5 € la pièce et 4 poissons jaunes à 2 € la pièce. Un client achète 3 poissons qu'il sort au hasard de cet aquarium. La variable aléatoire X désigne le prix à payer pour les 3 poissons.

a) Etablissez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculez le prix moyen E(X).

c) Calculez l'écart-type du prix payé.