PROBABILITES

Table des matières

COURS

A) Construction d'une « probabilité »

1) Rappels sur les ensembles

- Un **ensemble** est une collection d'objets clairement définis appelés **éléments** de cet ensemble. Pour *définir un ensemble* on a deux possibilités :
  - On *énumère* tous les éléments de cet ensemble en les entourant de deux accolades : c'est la définition **par énumération** ou **en extension**. Ceci n'est possible que pour un **ensemble fini** càd un ensemble qui n'a qu'un nombre fini d'éléments (et de préférence pas trop grand….)

    p.ex. $A = \{a, o, i, u, e, y\}$
  - On *décrit* les éléments en donnant une propriété qui les caractérise et les distingue de tous les éléments qui n'appartiennent pas à cet ensemble : c'est la définition **en compréhension**.

    p.ex. *A est l'ensemble des voyelles de l'alphabet*, ou de manière plus « formelle » : $A = \{x \text{ / x est une voyelle de l'alphabet}\}$
- Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E et il est noté :

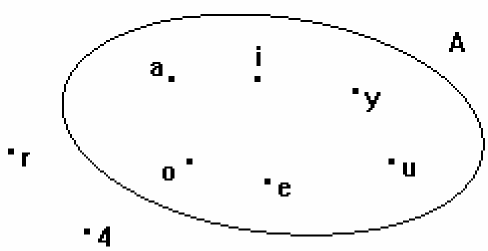
  Card E ou # E

  p.ex. Card A = 6
- Il n'existe qu'un seul ensemble de cardinal 0 : c'est **l'ensemble vide** noté $\varnothing$

  p.ex. $P = \{x \text{ / x est un triangle rectangle équilatéral}\} = \varnothing$
- Un ensemble de cardinal 1 est appelé **singleton**.

  p.ex. $L = \{x \text{ / x est un entier qui a une infinité de diviseurs}\} = \{0\}$
- Pour *représenter* un ensemble E on dessine une ligne fermée et on met les éléments de E à l'intérieur de cette ligne, les autres à l'extérieur. Un tel schéma est appelé **diagramme de Venn**.

  p.ex.



- Les symboles $\boxed{\in \quad \text{et} \quad \notin}$

Pour un <u>*ensemble* E et un *élément* x</u> :

$x \in E$ signifie que x est un élément de E

$x \notin E$ signifie que x n'est pas un élément de E

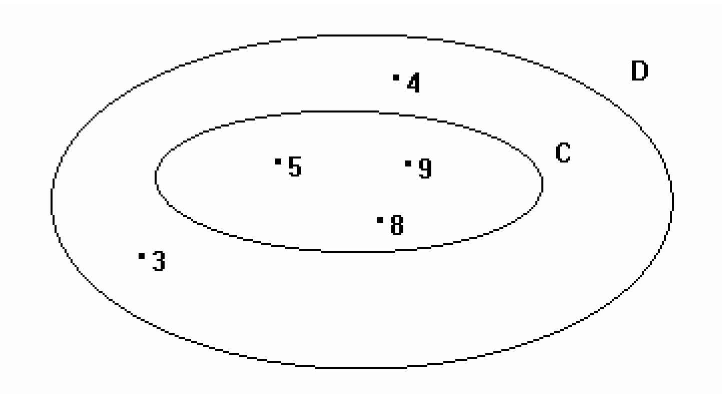
p.ex. $e \in A$, mais $4 \notin A$

- Les symboles $\boxed{\subset \quad \text{et} \quad \not\subset}$

Pour <u>*deux ensembles* E et F</u> :

$E \subset F$ signifie que *tous* les éléments de E sont aussi des éléments de F, c'est-à-dire que E est une **partie** ou un **sous-ensemble** de F

p.ex. $C = \{5,\ 8,\ 9\}$, $D = \{3, 4, 5, 8, 9\}$, $C \subset D$



$E \not\subset F$ signifie que E n'est pas un sous-ensemble de F, c'est-à-dire qu'il existe *au moins un* élément de E qui n'est pas dans F

Remarque : Pour tout ensemble E on a : $\varnothing \subset E$ (c'est la **partie vide** de E) et $E \subset E$ (c'est la **partie pleine** de E). Toute partie de E qui n'est ni vide, ni pleine est appelée **partie propre** de E

- **L'ensemble des parties** d'un ensemble E est noté **$\mathcal{P}$(E)**.

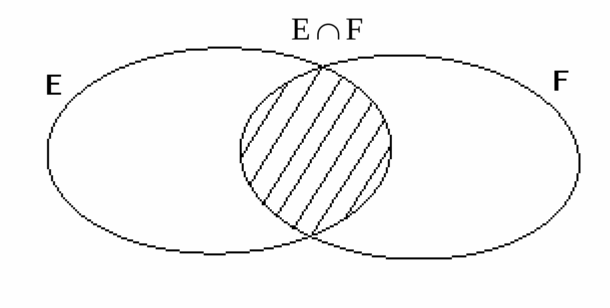
p.ex. $G = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(G) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\}, G\}$

Attention : on écrit $2 \in G$ car 2 est un *élément* de l'ensemble G, alors que $\{2\} \subset G$ car $\{2\}$ est un sous-*ensemble* de G et enfin $\{2\} \in \mathcal{P}(G)$ car $\{2\}$ est un *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(G)$!

Remarque : L'ensemble vide $\varnothing$ n'a qu'un seul sous-ensemble : lui-même ! Ainsi $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, ce qui montre en en particulier que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$!.

- On appelle **intersection** de deux ensembles E et F l'ensemble, noté $E \cap F$, des éléments qui appartiennent à E **et** à F.

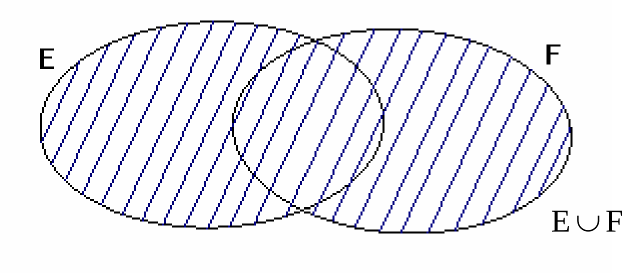
$$\boxed{E \cap F = \{x \,/\, x \in E \text{ et } x \in F\}}$$



Si $E \cap F = \varnothing$, on dit que E et F sont **disjoints**.

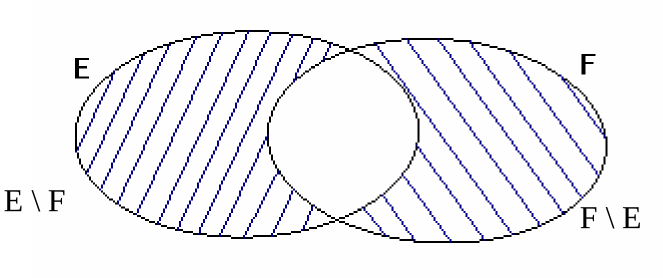
- On appelle **réunion** de deux ensembles E et F l'ensemble, noté $E \cup F$, des éléments qui appartiennent à E **ou** à F.

$$\boxed{E \cup F = \{x \,/\, x \in E \text{ ou } x \in F\}}$$



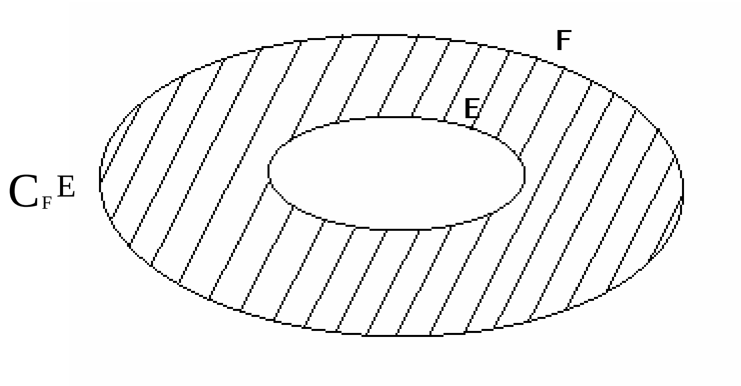
- On appelle **différence** de l'ensembles E et de l'ensemble F l'ensemble, noté $E \setminus F$, des éléments qui appartiennent à E mais pas à F.

$$\boxed{E \setminus F = \{x \,/\, x \in E \text{ et } x \notin F\}}$$



On voit que $E \setminus F$ et $F \setminus E$ sont deux ensembles disjoints !

- Si $E \subset F$ l'ensemble $F \setminus E$ est appelé **complémentaire** de E *dans* (ou *par rapport à*) F et est noté $\complement_F E$.



<u>*Remarque*</u> : Si l'ensemble de référence F est évident d'après le contexte, le complémentaire de E (dans F) est souvent noté plus simplement : $\overline{E}$

- On vérifie facilement les <u>propriétés</u> suivantes :

    - L'intersection et la réunion sont commutatives et associatives :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

    - L'ensemble vide est neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$
    - L'intersection est distributive pour la réunion et la réunion est distributive pour l'intersection :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

    - Si A, B sont des sous-ensembles de E, alors :

$$\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B \text{ et } \complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B.$$

en notations simplifiées : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

    - $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$

- <u>**Correspondances entre propositions logiques et ensembles**</u>**.**

    - La **conjonction « et » correspond à l'intersection**.

p.ex : « Pierre joue au tennis <u>**et**</u> au football » correspond à : $\text{Pierre} \in T \cap F$ où T est l'ensemble des joueurs de tennis et F l'ensemble des joueurs de football.

- **La disjonction « ou » correspond à la réunion**.

p.ex. « je ne sais pas si Pierre joue au tennis **ou** au football » correspond à : « je ne sais pas si Pierre $\in T \cup F$ »

- **L'exclusion « mais pas » correspond à la différence.**

p.ex. « Pierre joue au tennis **mais pas** au football » correspond à : : Pierre $\in T \setminus F$ où T est l'ensemble des joueurs de tennis et F l'ensemble des joueurs de football.

- **La négation correspond au complémentaire**.

p.ex. « Pierre **ne** joue **pas** au tennis » correspond à : Pierre $\in \overline{T}$, le complémentaire étant pris par rapport à un plus grand ensemble, par exemple l'ensemble des hommes.

- **Produit cartésien** de plusieurs ensembles.
  - Soient A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples dont le premier élément appartient à A et le deuxième à B.

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Attention :

Dans un couple l'ordre est essentiel, p. ex. $(3,4) \neq (4,3)$, donc $A \times B \neq B \times A$

Remarque :

Le produit cartésien d'un ensemble A par lui-même, $A \times A$, peut être noté également : A^2

  - D'une manière générale, le produit cartésien de n ensembles $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ est l'ensemble des **n-uplets** défini par :

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / x_i \in A_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n\}$$

si $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n = A$, on note $A \times A \times \cdots \times A = A^n$

  - **Cardinal d'un produit cartésien**

Si les ensembles $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ sont finis, alors :

$$\#(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n) = \# A_1 \cdot \# A_2 \cdots \# A_n = \prod_{i=1}^{n} \#(A_i)$$

Exemples : $\#(A \times B) = \# A \cdot \# B$, $\#(A^2) = (\# A)^2$, etc.

2) <u>Notion de « probabilité »</u>

- En jetant une pièce de monnaie non truquée (jeu de « pile ou face ») on sait par avance que les *résultats possibles* sont « pile » ou « face », mais on est incapable de *prédire* exactement lequel de ces résultats va « sortir » ! Pour désigner une expérience de ce genre, on parle de « hasard » ou de « **phénomène aléatoire** », deux mots qui ont la même signification puisque « hasard » vient de l'arabe « az-zar » qui veut dire « dé » et que « aléatoire » vient du latin « alea » qui veut dire la même chose ! La <u>théorie des probabilités</u> (du latin « probare », mettre à l'épreuve, essayer, mais aussi : prouver, démontrer) a pour but de construire des <u>modèles mathématiques de phénomènes aléatoires qu'on peut répéter, dans des conditions identiques, autant de fois qu'on le veut</u>. Ceci bien entendu dans le but de rendre ces phénomènes *incertains* plus « probabilis », c'est-à-dire dignes d'approbation, acceptables….

- *<u>Approche pratique (statistique descriptive)</u> :*

  On réalise l'expérience un certain nombre de fois (n fois) et on note le nombre de fois (p fois, avec $p \leq n$) qu'un certain résultat est sorti. La **fréquence** de ce résultat est alors le nombre réel positif : $f = \frac{p}{n} \in [0,1]$.

  p.ex. On lance n fois une pièce de monnaie, on note p le nombre de fois que « pile » est sorti, puis on calcule la fréquence f de « pile ». Le résultat d'une telle expérience pourrait être le suivant :

n	10	250	5700	500000
p	7	103	3024	261357
f	$\frac{7}{10}=0,7$	$\frac{103}{250}\simeq 0,41$	$\frac{3024}{5700}\simeq 0,53$	$\frac{261357}{500000}\simeq 0,52$

Parfois on multiplie la fréquence par 100 pour obtenir la fréquence en pourcentage (p.ex . $100\cdot 0,41=41\%$ de « pile »)

- *Approche théorique (probabiliste) :*

  A chaque résultat possible on donne *a priori* (c'est-à-dire sans réaliser l'expérience) une certaine fréquence appelée alors **probabilité**.

  p.ex. pour le jeu de « pile ou face » il n'y a aucune raison *a priori* de penser que « pile » (P) sorte plus ou moins souvent que « face » (F), donc chacun des deux résultats a autant de « *chances* » de sortir que l'autre, c'est-à-dire « 1 chance sur 2 ». On dit alors que « pile » (P) et « face » (F) on chacun une probabilité de $\frac{1}{2}$ et on note : $p(P)=p(F)=\frac{1}{2}$.

- Le *lien* entre les deux approches est alors assuré par la **loi des grands nombres** qui affirme que plus le nombre n de fois que l'expérience est réalisée est grand, plus la fréquence (réelle) d'un certain résultat est proche de sa probabilité. *La probabilité d'un résultat serait en quelque sorte sa fréquence si on réalisait l'expérience une infinité de fois !* Cette affirmation de bon sens n'a jamais été contredite par la réalité, même s'il est bien sûr impossible de la vérifier en pratique…

3) Construction du modèle mathématique

- La première étape consiste à déterminer *de façon claire et précise* les résultats possibles de l'expérience aléatoire et de les compter !

  L'ensemble ou *univers* des **résultats possibles** ou ***éventualité*s** ou encore ***évènements élémentaires*** sera noté Ω. Nous ne verrons que des exemples où Ω est un *ensemble fini* !

  Exemples

  (a) On joue à « pile ou face » : $\Omega=\{P, F\}$ et $\#\Omega=2$

  (b) On lance un dé normal et on note le nombre indiqué par la face supérieure du dé : $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\#\Omega=6$

(c) On lance un dé deux fois de suite et on note la suite des deux nombres obtenus ou, ce qui revient au même, on lance deux dés de couleurs différentes : $\Omega=\{(x, y)/\,x \text{ est le résultat du } 1^{er} \text{ dé et } y \text{ celui du } 2^{e} \text{ dé}\}$ et $\#\Omega=6^2=36$

- <u>La deuxième étape consiste à attribuer à toute éventualité (c'est-à-dire à tout élément de Ω) sa probabilité</u> c'est-à-dire de définir une application : $p:\Omega\to[0,1]$ qui à tout $x\in\Omega$ associe sa « probabilité » $p(x)$ avec $\sum_{x\in\Omega}p(x)=1$.

  <u>Cas particulier important</u> : **équiprobabilité**

  Si $\#\Omega=n$ et si toutes les éventualités ont a priori la même chance de se réaliser, on posera : $\boxed{\forall x\in\Omega \quad p(x)=\frac{1}{n}}$

  <u>Exemples</u>

  (a) On a équiprobabilité : $p(P)=p(F)=\frac{1}{2}$

  (b) On a équiprobabilité : $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)=\frac{1}{6}$

  (c) On a équiprobabilité : $\forall(x,y)\in\Omega \quad p((x,y))=\frac{1}{36}$

  (d) On lance un dé dont trois faces portent le 1, deux faces le 3 et une face le 2. Alors $\Omega=\{1, 2, 3\}$ et $\#\Omega=3$, mais il serait très peu raisonnable de donner la même probabilité à chaque éventualité si on veut que le modèle mathématique représente correctement la réalité ! On pose donc : $p(1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(2)=\frac{1}{6}$ et $p(3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (on a bien : $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$!).

- On appelle **évènement** tout sous-ensemble de Ω et on dit qu'un évènement A *se produit* ou *se réalise* si le résultat de l'expérience appartient à A. La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités de ses éléments :

$$\boxed{\forall A\subset\Omega \quad p(A)=\sum_{x\in A}p(x)}$$

Dans <u>le cas de l'équiprobabilité</u> on obtient la fameuse **formule de Laplace** :

$$\boxed{\forall A\subset\Omega \quad p(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Il y a <u>deux évènements « extrêmes »</u> :

- L'évènement **certain :** Ω avec $p(\Omega)=1$

  p.ex. il est certain qu'en jetant un dé on va obtenir un entier entre 1 et 6

- L'évènement **impossible :** $\varnothing$ avec $p(\varnothing)=0$

  p.ex. il est impossible qu'en jetant un dé normal on va obtenir 8

Un évènement peut être présenté soit par énumération (p.ex. $A=\{2, 4, 6\}$), soit en compréhension par une phrase (p.ex. A : « obtenir un nombre pair »)

<u>Exemples</u>

(a) A part l'évènement certain et l'évènement impossible il n'y a que deux évènements qui correspondent aux deux éventualités : $\{P\}$ et $\{F\}$.

(b) $A=\{2, 4, 6\}$ et $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

B : « obtenir un nombre premier impair », $B=\{3, 5\}$ et $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

C : « obtenir un nombre inférieur à 6 », $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $p(C)=\frac{5}{6}$

(c) A : « obtenir deux fois le même résultat », $p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

B : « obtenir un nombre plus grand au deuxième jet qu'au premier » $p(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

(d) A : « obtenir un nombre impair », $p(A)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

- **Propriétés des évènements :**

Soients A et B deux évènements, alors :

- L'évènement $A\cap B$ se produit si A **et** B se produisent
- L'évènement $A\cup B$ se produit si A **ou** B se produisent
- $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$
- si $A\cap B=\varnothing$ on dit que A et B sont **incompatibles** et on a :

$$\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$$

- L'évènement $\overline{A}=\complement_{\Omega}A=\Omega\setminus A$ est appelé évènement **contraire** de A et :

$$\boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$$

Cette formule est très utile quand l'évènement contraire est beaucoup plus simple à calculer que l'évènement lui-même, ce qui arrive souvent !

Exercices 1-10

4) <u>Evènements indépendants et probabilité conditionnelle</u>

- <u>*Exemple 1*</u>

  Une urne contient une boule noire (N), une jaune (J) et une rouge (R). On tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule. Alors $\Omega = U \times U = U^2$ avec $U = \{N, J, R\}$ ou plus simplement en notant p.ex ; NR au lieu de (N, R) : $\Omega = \{NN, NJ, NR, JN, JJ, JR, RN, RJ, RR\}$, donc $\#\Omega = 3^2 = 9$ et toutes les éventualités sont équiprobables. Considérons les évènements suivants :

  A : « obtenir une boule noire N au 1er tirage » càd $A = \{NN, NJ, NR\}$

  B : « obtenir une boule jaune J au 2e tirage », càd $B = \{NJ, JJ, RJ\}$

  $A \cap B$: « obtenir N au 1er tirage **et** J au 2e tirage », càd $A \cap B = \{NJ\}$

  Alors : $p(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, $p(B) = \dfrac{\#B}{\#\Omega} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{1}{9}$

- <u>*Exemple 2*</u>

  Reprenons la situation de l'exemple 1, mais <u>sans remettre la première boule dans l'urne</u> avant de tirer la deuxième. Dans ce cas $\Omega = \{NJ, NR, JN, JR, RN, RJ\}$,

  $\#\Omega = 6$, $A = \{NJ, NR\}$, $p(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $B = \{NJ, RJ\}$, $p(B) = \cdots = \dfrac{1}{3}$,

  $A \cap B = \{NJ\}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#\Omega} = \dfrac{1}{6}$.

- *Commentaire*
  - Dans le premier exemple les évènements A et B sont *indépendants* dans le sens où le résultat du premier tirage n'influe en aucune manière sur le déroulement ou le résultat du deuxième tirage : il y a « 1 chance sur 3 » de tirer N au 1er et de tirer J au 2e tirage ! On constate que $p(A) \cdot p(B) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} = p(A \cap B)$.
  - Dans le deuxième exemple par contre, si on tire J au 1er tirage, la probabilité de tirer J au 2e est nulle, alors que si on tire N ou R au 1er tirage, on a 1

chance sur 2 de tirer J au 2^{e} tirage, par conséquent les deux évènements A et B ne sont pas indépendants et de plus : $p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\neq p(A\cap B)$

- *<u>Définition</u>*

On dit que A et B sont deux **évènements indépendants** si et seulement si

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)}$$

- *Problème*

Supposons que N est le résultat du 1er tirage : quelle est alors la probabilité de tirer J au 2^{e} tirage ? En d'autres termes : quelle est <u>la probabilité de B sachant que A est déjà réalisé</u> ? Nous noterons cette probabilité : $p(B/A)$.

Dans la situation de l'exemple 1 : $p(B/A)=p(B)=\frac{1}{3}$.

Dans la situation de l'exemple 2 : $p(B/A)=\frac{1}{2}\neq p(B)$.

De plus on a :

- dans l'exemple 1 : $p(B/A)\cdot p(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=p(A\cap B)$
- dans l'exemple 2 : $p(B/A)\cdot p(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$

Que A et B soient donc indépendants ou non, on a $p(B/A)\cdot p(A)=p(A\cap B)$, ce qui amène à poser la définition suivante :

- *<u>Définition</u>*

Si A et B sont deux évènements avec $p(A)\neq 0$, alors on appelle **probabilité conditionnelle de B en A** ou **probabilité de B sachant A,** la probabilité, notée $p(B/A)$, définie par :

$$\boxed{p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

Remarque : si $p(A)\neq 0$ alors A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(B/A)=p(B)$

Exercices 11-17

B) Analyse combinatoire

Ce terme désigne un ensemble de techniques de « dénombrement » qui permettent de compter le nombre d'éléments d'un ensemble. D'après ce qui précède on comprend aisément que ce genre de technique est essentiel pour le calcul des probabilités.

1) Les tirages au sort

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages au sort de p boules d'une urne qui en contient n.

  Exemple

  La question : « Dans une course de chevaux avec 10 participants, de combien de façons peut-on parier sur les trois premiers ? » peut être reformulée de la manière suivante : « De combien de façons peut-on tirer, dans l'ordre, 3 boules d'une urne qui en contient 10 ? »

- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages au sort :
  - **L'ordre**

    si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
  - **La répétition**

    si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans la cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

- Il y a donc *quatre sortes de tirages au sort* :
  - Tirages *avec ordre et avec répétition* (OR)
  - Tirages *avec ordre et sans répétition* ($O\overline{R}$)
  - Tirages *sans ordre et sans répétition* ($\overline{O}\overline{R}$)
  - Tirages *sans ordre et avec répétition* ($\overline{O}R$)

2) Tirages avec ordre et avec répétition

- *Exemple :*

  Combien de nombres à deux chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?

<u>En d'autres termes</u> : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient trois numérotées de 1 à 3, <u>avec ordre</u> : 1re boule tirée = chiffre des dizaines, 2^{e} boule tirée = chiffre des unités, et <u>avec répétition</u>, le chiffre des dizaines et des unités pouvant être le même ?

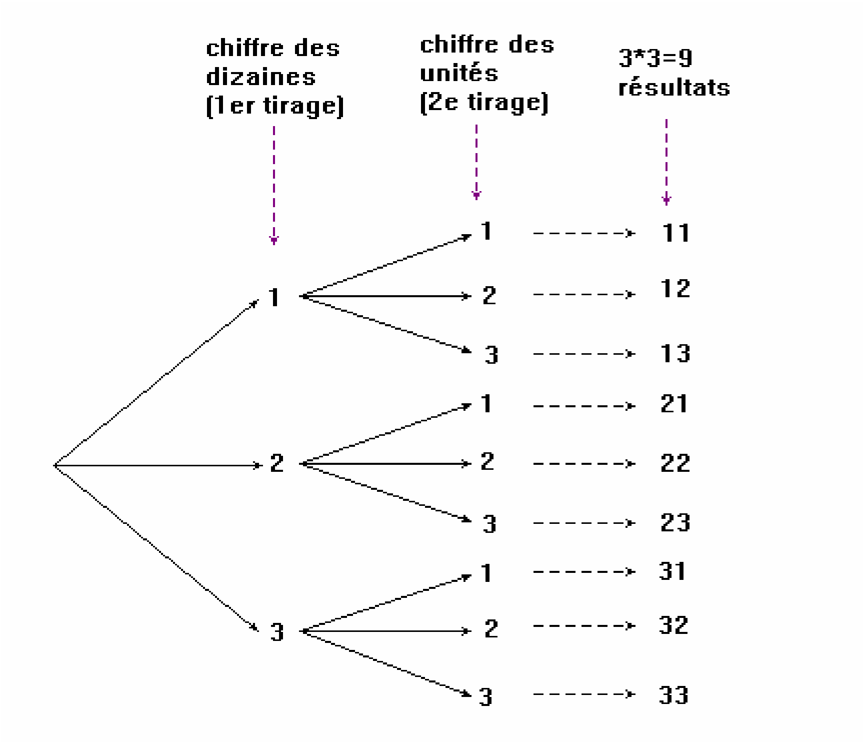
<u>Réponse</u> : 9 nombres : 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33

<u>Raisonnement</u> :

- pour le chiffre des dizaines on a 3 possibilités : 1, 2 ou 3
- pour le chiffre des unités on a également 3 possibilités : 1, 2 ou 3
- au total on a donc $3 \cdot 3 = 9$ possibilités

<u>Justification</u> :

Pourquoi y a-t-il $3 \cdot 3 = 9$ et non pas $3 + 3 = 6$ possibilités ? Pour bien comprendre pourquoi dans ce genre de situation il faut <u>multiplier</u> et non pas additionner pour obtenir le total, il faut considérer le **diagramme en arbre** suivant :



- *<u>Cas général</u>*

On fait un tirage OR de p boules d'une urne qui en contient n :

- Nombre de possibilités pour la 1re boule : n
- Nombre de possibilités pour la 2^{e} boule : n (car remise !)

⋮

- Nombre de possibilités pour la p^{e} boule : n
- Total : $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^p$ (diagramme en arbre !)

- *Définition*

  Un tirage avec ordre et avec remise OR de p objets parmi n est appelé **arrangement à répétition de n objets pris p à p**.

  Le nombre de ces tirages est noté B_n^p

- Nous venons de montrer que : $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad B_n^p = n^p}$

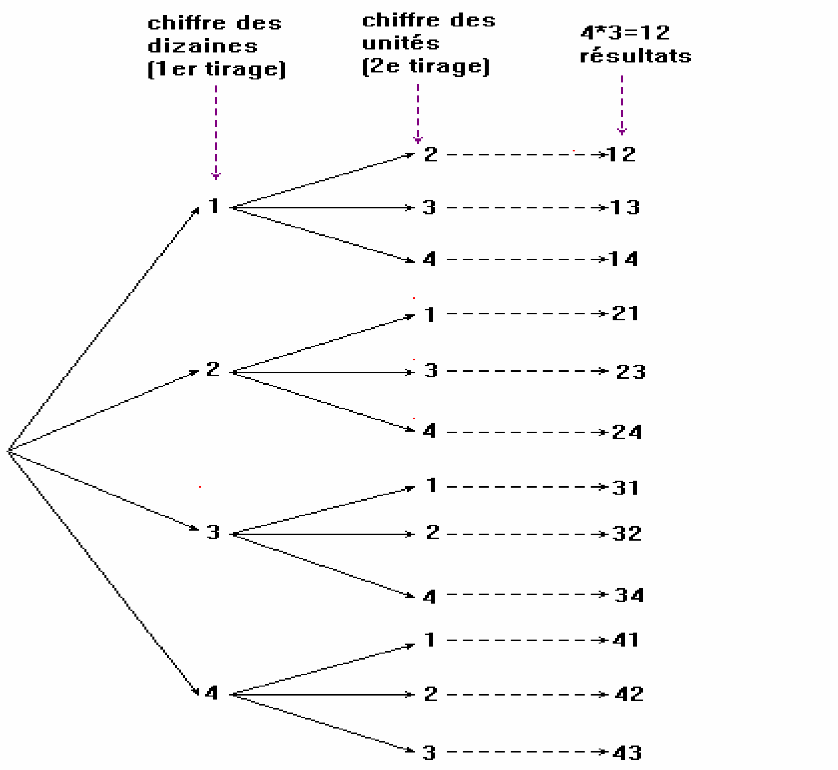
3) Tirages avec ordre et sans répétition

- *Exemple :*

  Combien de nombres à deux chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?

  En d'autres termes : de combien de façons peut-on tirer deux boules d'une urne qui en contient quatre numérotées de 1 à 4, avec ordre : 1^re boule tirée = chiffre des dizaines, 2^e boule tirée = chiffre des unités, et sans répétition, les chiffres des dizaines et des unités devant être différents ?

  Ici le **diagramme en arbre** compte 4 branches au premier niveau et $4-1=3$ branches au deuxième niveau :



Raisonnement :

- pour le chiffre des dizaines on a 4 possibilités : 1, 2, 3 ou 4

- pour le chiffre des unités on n'a plus que $4-1=3$ possibilités puisqu'on ne peut plus tirer la boule qui vient de sortir !
- au total on a donc $4\cdot 3=12$ possibilités

- *Cas général*

On fait un tirage $O\overline{R}$ de p boules d'une urne qui en contient n. Il est évident que pour qu'un tel tirage existe, il faut que $p\le n$.

- Nombre de possibilités pour la 1re boule : n
- Nombre de possibilités pour la 2e boule : $n-1$ (car pas de remise !)
- Nombre de possibilités pour la 3e boule : $(n-1)-1=n-2$

$\vdots$

- Nombre de possibilités pour la pe boule : $n-(p-1)=n-p+1$
- Total : $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)$ (diagramme en arbre !)

- *Définition*

Un tirage avec ordre et sans remise $O\overline{R}$ de p objets parmi n est appelé **arrangement de n objets pris p à p**.

Le nombre de ces tirages est noté A_n^p

- Nous venons de montrer que :

$$\boxed{\forall n,p\in\mathbb{N}^* \quad A_n^p=\begin{cases}0 & \text{si } p>n\\ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-p+1) & \text{si } p\le n\end{cases}}$$

- ***Cas particulier important : p = n***

Un tel tirage (on tire toutes les boules de l'urne dans un certain ordre) revient à *ranger les n boules de l'urne dans un certain ordre* : on dit qu'on a fait une **permutation** des n objets de l'urne et $A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

- *Notation*

Le nombre $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ $(\text{pour } n\ge 2)$ est appelé **factorielle n** et est noté **n !**.Pour des raisons exposées plus bas on pose : 0 ! = 1 ! = 1, d'où :

$$\boxed{n!=\begin{cases}1 & \text{si } n\le 1\\ n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=\prod_{i=1}^{n} i & \text{si } n>1\end{cases}}$$

- *Exemples*

  - $5!=120$; $10!=3\,628\,800$; $50!\approx 3,041409\cdot 10^{64}$; $100!\approx 9,332622\cdot 10^{157}$
  - Il y a 25 ! possibilités pour placer 25 personnes sur 25 chaises. En supposant qu'un ordinateur très puissant « réalise » 100 milliards $\left(10^{11}\right)$ de tels placements *par seconde*, il aurait besoin pour finir son travail de :

$$\frac{25!}{3600\cdot 24\cdot 365,25\cdot 10^{11}}\approx 4\,915\,206 \ \underline{\text{années}} \ !$$

- *Autre notation pour* A_n^p *:*

  - pour $p<n-1$: $A_n^p=\dfrac{n\cdot\cdots\cdot(n-p+1)\cdot(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{(n-p)\cdot(n-p-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ (*)
  - $A_n^{n-1}=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-(n-1)+1)=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$

    Donc la formule (*) marche pour $p=n-1$ si et seulement si :

$$(n-p)!=1\Leftrightarrow (n-(n-1))!=1\Leftrightarrow 1!=1$$

  - $A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-n+1)=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 1=n!$

    Donc la formule (*) marche pour $p=n$ si et seulement si :

$$(n-p)!=1\Leftrightarrow (n-n)!=1\Leftrightarrow 0!=1$$

  - Or dans la définition de n ! on a bien posé $0!=1!=1$, d'où:

$$\boxed{\forall p\le n \quad A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}}$$

4) Tirages sans ordre et sans répétition

- *Exemple : le loto*

  On tire 6 boules d'une urne qui en contient 49 (numérotées de 1 à 49) sans considérer l'ordre dans lequel elles ont été tirées et sans remise.

  Soit x le nombre de tirages possibles : à chacun de ces tirages (p.ex. 5 – 43 – 17 – 28 – 31 – 35) on peut associer 6 ! tirages *avec ordre* (en permutant ces 6 éléments), donc $x\cdot 6!=A_{49}^6\Leftrightarrow x=\dfrac{A_{49}^6}{6!}\Leftrightarrow x=\dfrac{49!}{43!6!}$. Ainsi il y a $13\,983\,816$ façons de remplir une grille de loto !

- *Cas général*

  Soit x le nombre de tirages $\overline{\overline{OR}}$ de p boules d'une urne qui en contient n (avec $p \leq n$). En permutant les p boules d'un tel tirage, on obtient p ! tirages $O\overline{R}$. D'où :

$$x \cdot p! = A_n^p \Leftrightarrow x = \frac{A_n^p}{p!} \Leftrightarrow x = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

- *Définition*

  Un tirage sans ordre et sans remise $\overline{\overline{OR}}$ de p objets parmi n (avec $p \leq n$) est appelé **combinaison (sans répétition) de n objets pris p à p**. Le nombre de ces tirages est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

- Nous venons de montrer que : $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$

- Si p>n il n' y a aucune possibilité de tirer p objets parmi n sans répétition, donc on pose : $\forall p > n \quad C_n^p = 0$.

- Dans l'énumération des éléments d'un ensemble l'ordre ne joue pas de rôle donc un tirage $\overline{\overline{OR}}$ peut être considéré comme un sous-ensemble de p éléments d'un ensemble de cardinal n. Par conséquent :

$$\boxed{C_n^p = \text{nombre de sous-ensembles de p éléments d'un ensemble à n éléments}}$$

- *Exemples :*

  $C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$, $C_9^4 = \frac{9!}{5!4!} = 126$, $C_{17}^1 = \frac{17!}{16!1!} = 17$, $C_{39}^0 = \frac{39!}{39!0!} = 1$, etc.

5) *Tirages sans ordre et avec répétition (hors programme)*

- *Exemple*

  On choisit 6 entiers parmi 4 entiers a, b, c et d et on fait leur somme. Combien de résultats *différents* peut-on ainsi obtenir *au plus* (si on choisit p.ex. $a = 1$, $b = 10$, $c = 100$ et $d = 1000$ toutes les sommes calculées sont différentes, mais on vérifie facilement que pour d'autres choix, p.ex. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ et $d = 4$, certaines sommes sont égales !) ?

Comme l'ordre des termes d'une somme ne joue aucun rôle, ceci revient à compter le nombre de tirages $\overline{\text{O}}$R de 6 nombres parmi les entiers a, b, c et d. Dans un tel tirage, la seule chose qui importe est le nombre de fois que chacun de ces entiers a été tiré. On peut donc représenter ces tirages de la manière suivante :

$$u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid u_4$$

où u_1 (respectivement u_2, u_3 et u_4) est le nombre de fois que l'entier a (respectivement b, c et d) est tiré, avec $\sum_{i=1}^{4} u_i = 6$.

Ou encore : $\underbrace{00\cdots0}_{u_1\,"0"} \mid \underbrace{00\cdots0}_{u_2\,"0"} \mid \underbrace{00\cdots0}_{u_3\,"0"} \mid \underbrace{00\cdots0}_{u_4\,"0"}$, autrement dit un tirage peut être représenté par une suite dans un certain ordre de 6 « 0 » et de $4-1=3$ « | ». Par exemple $000 \| 0 \mid 00$ signifie qu'on a tiré 3 fois le a, aucune fois le b, 1 fois le c et 2 fois le d. Dans une telle suite de $6+3=9$ symboles il faut choisir 6 places pour mettre les « 0 » (les 3 places restantes sont occupées par des « | »), c'est-à-dire dans l'ensemble des 9 places disponibles il faut choisir un <u>sous-ensemble</u> de 6 places pour mettre les « 0 », ce qui peut se faire de $C_9^6 = \frac{9!}{3!6!} = 84$ manières différentes.

- <u>*Cas général*</u>

Désignons par D_n^p le nombre de tirages $\overline{\text{O}}$R de p objets parmi n. D'après ce qui précède, un tel tirage peut être représenté par une suite de p « 0 » et de $n-1$ « | », donc D_n^p est égal au nombre de sous-ensembles de p éléments (les p places pour les « 0 ») d'un ensemble de $n-1+p$ éléments (puisqu'en tout il y a $n-1+p$ symboles dans une suite), d'où :

$$\boxed{D_n^p = C_{n+p-1}^p}$$

Exercices 18 - 42

6) <u>Propriétés du nombre</u> C_n^p

a) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^0 = C_n^n = 1}$

En effet $C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1$ et $C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{1}{0!\cdot 1} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$.

On aurait pu dire aussi qu'un ensemble de n éléments a 1 sous-ensemble de 0 élément (l'ensemble vide) et 1 sous-ensemble de n éléments (l'ensemble lui-même !).

b) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

En effet $C_n^1 = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{(n-1)!n}{(n-1)!1} = n$ et $C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

c) $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \le n) \quad C_n^p = C_n^{n-p}}$

En effet $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = C_n^{n-p}$

p.ex. $C_5^3 = C_5^2$, $C_{17}^6 = C_{17}^{11}$, etc.

d) **Triangle de Pascal**

(Blaise Pascal, mathématicien, physicien, philosophe et théologien, 1623-1662, un des initiateurs du calcul des probabilités)

- $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N} \quad (\text{avec } p \le n) \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p}$ (*)

  démonstration :

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot p}{(n-p)!(p-1)!\cdot p} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)(n-1-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot p}{(n-p)!p!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot p + (n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!\left[p + (n-p)\right]}{(n-p)!p!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p
\end{aligned}$$

- Dressons un tableau avec les valeurs des C_n^p :
  - Les lignes et les colonnes sont numérotées :0, 1, 2, 3, etc.
  - C_n^p se trouve à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne
  - d'après la propriété a) la première colonne et la diagonale du tableau seront remplies de « 1 »

- au-dessus de la diagonale il n'y a que des 0 car si $p > n$ $C_n^p = 0$, ce qui donne une forme « triangulaire » à ce tableau
- pour les autres valeurs on utilise la formule (*) pour calculer progressivement :

  $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$, $C_3^1 = 1 + 2 = 3$, $C_3^2 = 2 + 1 = 3$, $C_4^1 = 1 + 3 = 4$,

  $C_4^2 = 3 + 3 = 6$, $C_4^3 = 3 + 1 = 4$, $C_5^1 = 1 + 4 = 5$, $C_5^2 = 4 + 6 = 10$, etc

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	**1**	**2**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**1**	**3**	**3**	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	0	0	0	0	0	0
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	0	0	0	0	0
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	0	0	0	0
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**	0	0	0
8	**1**	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**	0	0
9	**1**	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**	0
10	**1**	**10**	**45**	**120**	**210**	**252**	**210**	**120**	**45**	**10**	**1**

Exercices 43 - 44

e) Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors nous savons que :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

et nous constatons que les coefficients des expressions des membres droits de ces égalités sont les nombres des 3^e et 4^e lignes du triangle de Pascal :

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$ et $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$

Formulons l'hypothèse que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^i a^{n-i} b^i + \cdots + C_n^n a^0 b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i\end{aligned}} \quad (*)$$

et démontrons-la par récurrence :

pour $n=1$: $(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$ donc (*) est bien vérifiée !

supposons que (*) est vérifiée pour n et montrons qu'alors elle l'est aussi pour $n+1$:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} \\
&= (a+b)^n (a+b) \\
&= \left(C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^i a^{n-i} b^i + \cdots + C_n^n a^0 b^n\right)(a+b) \\
&= C_n^0 a^{n+1} b^0 + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^n a^1 b^n + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} ab^n + C_n^n a^0 b^{n+1} \\
&= C_n^0 a^{n+1} b^0 + \left(C_n^1 + C_n^0\right) a^n b + \left(C_n^2 + C_n^1\right) a^{n-1} b^2 + \cdots + \left(C_n^n + C_n^{n-1}\right) ab^n + C_n^n a^0 b^{n+1} \\
&\overset{!}{=} C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1}
\end{aligned}$$

La formule (*) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous les réels a et b : elle est appelée **formule du binôme de Newton**.

Exercices 45 - 51

EXERCICES

1) Pour chacune des expériences suivantes, déterminez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal, une probabilité p et calculez la probabilité $p(A)$ de l'évènement A proposé :

a) Jeter une pièce de monnaie et observer la face visible. A : « le côté visible est pile ».

b) Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes et observer la ***couleur*** : trèfle, pique, cœur, carreau. A : « la couleur tirée est trèfle ».

c) Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes et observer la ***valeur*** : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. A : « la carte tirée est une image ».

d) Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes et observer la teinte : rouge, noir. A : « la carte tirée est jaune ».

e) Tirer une boule d'une urne contenant 31 boules numérotées de 1 à 31. A : « tirer une boule impaire ».

f) Tirer une boule d'une urne contenant 5 boules rouges, 2 vertes, 9 bleues, 7 blanches et 3 noires. A : « la boule tirée n'est pas blanche ».

2) François a un dé assez irrégulier qui ne donne pas les 6 chiffres avec la même fréquence. Pour établir la probabilité de chaque résultat il a lancé son dé 100000 fois en notant les résultats obtenus. Voici le tableau des probabilités (fréquences) qu'il a obtenues :

x	1	2	3	4	5	6
p({x})	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$

Qu'en pensez-vous ?

3) On jette un dé non pipé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre :

a) strictement inférieur à 5 ?

b) strictement supérieur à 4 ?

c) pair ?

d) premier ?

e) impair supérieur à 2 ?

4) On fait 3 parties consécutives de « pile ou face » avec une pièce non truquée. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) plus de « face » que de « pile » ?

b) exactement deux fois « pile » ?

c) « pile » au troisième jet ?

d) trois fois le même côté ?

5) On jette un dé deux fois de suite et on fait la somme des deux résultats obtenus.

a) Déterminez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal et une probabilité p.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 8 ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 9 ?

6) D'un jeu de 52 cartes on tire 1 carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) Un 10 ou un roi ?

b) un valet ou un trèfle ?

7) Une urne contient une boule noire, une blanche et une rouge. On effectue successivement 2 tirages d'une boule, la boule tirée en premier étant replacée dans l'urne avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité de tirer :

a) deux fois la boule rouge ?

b) exactement une fois la boule blanche ?

c) au moins une fois la boule noire ?

8) Un jeu de 32 cartes est distribué carte par carte. Quelle est la probabilité pour que la troisième carte soit la dame de cœur ?

9) On lance trois fois de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

10) Un dé est pipé de telle façon que la probabilité d'apparaître pour chacune des faces soit proportionnelle au chiffre de cette face (p.ex. le 3 a trois fois plus de chances de sortir que le 1).

a) Définissez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal et la probabilité p qui convient.

b) En jetant ce dé une fois, est-il plus probable d'obtenir un chiffre pair ou impair ?

11) On joue au jeu suivant : on lance une pièce et si on obtient « pile » on a gagné, sinon on peut lancer la pièce une deuxième fois pour essayer d'obtenir « pile ».

a) Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Dans ce jeu il y a trois résultats possibles :

- on obtient « pile » au premier jet et on a gagné
- on obtient « face » au premier jet et « pile » au deuxième et on a encore gagné
- on obtient deux fois « face » et on a perdu

Par conséquent la probabilité de gagner vaut $^2/_3$! »

b) Quelle est la bonne solution ?

c) En supposant qu'on peut lancer la pièce jusqu'à ce qu'on obtienne « pile », quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au 10^e lancer ? au nième lancer ?

12) Un sac contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement 2 boules avec remise de la première avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ?

13) Même question qu'à l'exercice précédent mais sans remettre la première boule dans le sac avant de tirer la deuxième.

14) D'une urne contenant 4 boules vertes, 3 noires et 3 rouges, on tire successivement 4 boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre :

a) 4 boules vertes ?

b) 3 vertes, puis 1 rouge ?

c) 1 verte, 1 rouge puis 2 noires ?

15) Mêmes questions qu'à l'exercice précédent mais sans remise.

16) On tire successivement et au hasard 4 lettres du mot PROFITABLES. Quelle est la probabilité pour que, dans l'ordre du tirage, ces lettres forment le mot RATE ?

17) Dans une pièce se trouvent 50 personnes. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour (en ne comptant pas le 29 février) ?

18) Avec les chiffres de 0 à 9, combien peut-on former de nombres à 6 chiffres (le premier chiffre étant bien sûr différent de 0) :

a) si on admet que ces nombres peuvent contenir plusieurs fois le même chiffre ?

b) si on veut que les 6 chiffres d'un de ces nombres soient deux à deux différents ?

19) Combien de plaques d'immatriculation pour les voitures a-t-on si chaque plaque

a) est constituée de 2 lettres suivies de 3 chiffres ?

b) est constituée de 2 lettres suivies de 4 chiffres ?

c) est constituée de 2 lettres et de 3 chiffres dans un ordre quelconque ?

20) Combien y a-t-il de nombres à 4 chiffres tel que le chiffre des milliers soit impair, le chiffre des centaines strictement inférieur à 7, le chiffre des dizaines pair et le chiffre des unités supérieur ou égal à 4 ?

21) Un lycée de 1200 élèves (640 filles et 560 garçons) et de 180 professeurs (72 femmes et 108 hommes) veut se doter d'un conseil de 10 membres, 5 élèves et 5 professeurs. De combien de façons peut-on procéder si

a) on n'impose pas de condition particulière ?

b) on veut que la commission ait autant de membres masculins que féminins ?

c) on veut que la commission ait au moins 4 filles et au moins 4 membres masculins ?

22) De combien de façons peut-on tirer une main de 4 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant

a) 1 roi, 1 dame et 2 valets?

b) 3 cartes noires ?

c) au moins 1 trèfle?

d) 2 dames et 2 cœurs ?

e) une carte de chaque couleur ?

f) 4 cartes de même valeur ?

g) au moins 1 roi et au plus 3 as ?

h) au moins 1 roi et au plus 2 as ?

i) des cartes de deux couleurs différentes ?

j) des cartes de trois valeurs différentes ?

23) De combien de manières peut-on choisir 2 délégués de nationalités différentes parmi 4 belges, 6 français et 8 anglais ?

24) De combien de manières une société de 10 membres peut-elle choisir un groupe de 3 personnes pour effectuer un voyage culturel …..

a) si Madame Gamma refuse de partir avec Monsieur Zète ?

b) si Mlle Alpha et M. Bêta n'acceptent de participer au voyage que s'ils sont ensemble ?

c) si on est soumis aux deux contraintes précédentes à la fois ?

25) De combien de façons peut-on dédoubler une classe de 30 élèves …

a) en deux classes de 15 élèves ?

b) en deux classes de 15 élèves sachant que l'une aura M. Hicks comme titulaire tandis que la titulaire de l'autre sera Mme Ygraic ?

26) Anatole a 5 livres d'algèbre, 3 livres de géométrie et 4 livres d'analyse.

a) De combien de manières peut-il les ranger sur une étagère de sa bibliothèque ?

b) Même question en les regroupant par sujet.

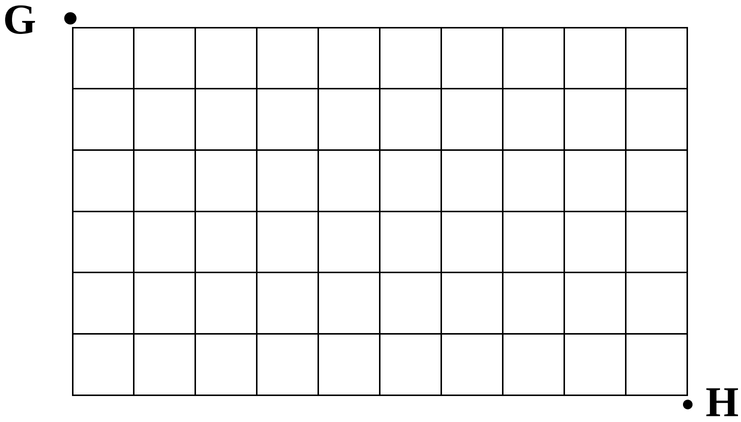
27) De combien de façons peut-on ranger 5 boules dans 7 cases …

a) si les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?

b) si les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?

c) si les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?

28) Voici le plan d'une ville américaine, G étant la gare et H un hôtel :



Chaque bloc est un carré de 100 m sur 100 m. Quelle est la longueur minimale d'un trajet qui va de la gare à l'hôtel indiqué ? Comment faut-il se déplacer sur ce quadrillage si on ne veut pas dépasser cette longueur minimale ? Combien de trajets différents y a-t-il pour aller de la gare à l'hôtel sans faire de détour ?

29) Avec les 9 chiffres distincts de 0, combien peut-on écrire de nombres de 5 chiffres différents

a) qui se terminent par 7 ?

b) qui se terminent par 23 ?

c) qui comprennent 4 ?

d) qui ne comprennent pas 9 ?

e) qui ne comprennent que des chiffres impairs ?

f) qui comprennent 5 mais pas 6 ?

g) qui comprennent 2 et 5 sous la forme 25 ? *(p,ex. 7**25**18, mais pas 7**2**1**5**8)*

h) qui comprennent 2 et 5 dans cet ordre ? *(p.ex. 9**2**47**5**1, mais pas 9**5**47**2**1)*

i) qui comprennent 2 et 5 dans un ordre quelconque ?

j) dont deux sont pairs et trois impairs ?

30) Au poker on dispose d'un jeu de 32 cartes (4 **couleurs** : cœurs, carreaux, trèfles et piques et 8 **valeurs** : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7). Calculez la probabilité d'obtenir une main de 5 cartes formant :

a) un *full* (3 cartes d'une valeur et 2 autres d'une autre valeur, *p.ex. 3 as et 2 valets*)

b) une *quinte floche* (5 cartes consécutives d'une même couleur, *p.ex. 8, 9, 10, valet, dame, tous carreaux*)

c) une *couleur* (5 cartes non consécutives d'une même couleur, *p.ex. 7, 9, 10, valet, as, tous carreaux*)

d) une *quinte* (5 cartes consécutives qui ne sont pas d'une même couleur, *p.ex. 8 de trèfle, 9 de carreau, 10 de pique, valet de pique, dame de cœur)*

e) un *carré* (4 cartes d'une même valeur et une autre, *p.ex. 4 as et un 10*)

31) D'un jeu de 32 cartes on tire simultanément 2 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) 2 cartes rouges ?

b) 2 piques ?

c) 2 cartes de même couleur (parmi les 4 couleurs) ?

d) 1 roi et 1 neuf ?

e) 2 cartes de valeurs différentes ?

f) 1 valet et 1 trèfle exactement ?

g) 1 roi ou 1 pique ?

32) Reprenez les questions de l'exercice précédent si on tire successivement 2 cartes en tenant compte de l'ordre du tirage,

a) sans remise.

b) avec remise de la première carte avant de tirer la deuxième.

33) On distribue à un joueur 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculez la probabilité qu'il ait dans sa main :

a) 5 piques, 3 trèfles, 4 carreaux et 1 cœur.

b) Au moins 2 cœurs ?

c) Au plus 3 rois ?

d) Au moins 1as et 1 sept?

34) Une commission européenne est formée de 20 membres : 12 allemands, 6 polonais et 2 hongrois. En en choisissant 2 au hasard, quelle est la probabilité qu'ils aient la même nationalité ?

35) Dans un village il y a 6 bistrots. Six villageois ont décidé de se rencontrer dans un de ces établissements et chacun d'eux en choisit un au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour que les six personnes aient choisit le même bistrot ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes aient choisi le même établissement ?

36) Pour l'examen oral de géographie, le professeur a réalisé 60 fiches proposant chacune un paragraphe de la matière à réviser. Chaque élève doit en tirer 4 au hasard. Sachant que P. n'a révisé qu'un tiers du programme, quelle est la probabilité pour qu'il :

a) connaisse les 4 sujets tirés ?

b) ne connaisse aucun des 4 sujets tirés ?

c) connaisse 3 des 4 sujets tirés ?

d) rate son examen ?

37) On lance 5 fois la même pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) exactement 3 faces ?

b) au moins 3 faces ?

38) On tire simultanément 3 boules d'une urne qui contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 7 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 1 boule de chaque couleur ?

b) 3 boules de même couleur ?

c) 2 boules rouges et 1 boule d'une autre couleur ?

d) au moins 2 boules noires ?

39) Jouer au loto consiste à choisir 6 numéros parmi 49. Calculez la probabilité d'avoir :

a) les 6 bons numéros.

b) 5 bons numéros et le numéro complémentaire.

c) 5 bons numéros.

d) 4 bons numéros.

e) 3 bons numéros.

40) Une tombola comprend 1000 billets pour 2 lots gagnants. Quel est le nombre minimal de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité de gagner soit supérieure à 0,5 ?

41) D'un sac contenant 9 boules numérotées de 1 à 9 on tire <u>simultanément</u> 2 boules. Calculez la probabilité de tirer

a) deux boules impaires

b) une paire et une impaire

42) Mêmes question qu'à l'exercice précédent en tirant <u>successivement</u> 2 boules.

43) Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq m \leq n$. Comparez $\dfrac{C_m^p}{C_n^p}$ et $\dfrac{A_m^p}{A_n^p}$

44) Ecrivez plus simplement :

a) $71! \cdot 72$

b) $\dfrac{84!}{84}$

c) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)(n+2)}$

d) $(n+1)n!$

e) $\dfrac{100!}{99!}$

f) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

g) $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

45) Développez les binômes suivants :

a) $(a+b)^7$

b) $(2x+3y)^4$

c) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^3$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{x}-\frac{x^2}{2}\right)^6$

e) $(a-2b)^5$

f) $\left(x^3\sqrt{2}-\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)^4$

46) Calculez sans calculatrice :

$$0,34^5+5\cdot 0,34^4\cdot 0,66+10\cdot 0,34^3\cdot 0,66^2+10\cdot 0,34^2\cdot 0,66^3+5\cdot 0,34\cdot 0,66^4+0,66^5$$

47) Quelle est la somme des coefficients des développements de $(x+y)^n$, où $n\in\mathbb{N}^*$?

48) Calculez : $C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3\cdots+(-1)^n C_n^n$

49) Soit E un ensemble de n éléments, où $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E à 0, 1, 2, 3, p éléments ?

b) Notons $\wp(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Calculez le cardinal de cet ensemble.

c) Retrouvez ce résultat en utilisant un tirage au sort bien choisi.

50) Calculez le terme en

a) x^6 dans $(3x^2-2)^{10}$

b) x dans $\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5$

c) x^{16} dans $x^{10}(x+7)^8$

d) t^3 dans $\left(3t+\frac{1}{t^2}\right)^{12}$

51) Calculez le(s) terme(s) milieu(x) dans le développement de :

a) $(3x+2)^{12}$

b) $\left(4k^2-\frac{3}{k}\right)^{11}$

c) $\left(y\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^7$