GEOMETRIE ANALYTIQUE

Table des matières

A) SYSTEMES LINEAIRES

1) Définitions

- Une **équation linéaire** à 2 ou 3 inconnues est une équation de la forme :

  $(1)\ ax+by=c$ où x, y sont deux inconnues et a, b, c des coefficients réels

  $(2)\ ax+by+cz=d$ où x, y, z sont trois inconnues et a, b, c, d des coefficients réels

  Exemples

  $$\left.\begin{matrix} 2x-3y=15 \\ 8x-\frac{4}{7}y+3,7z=-65 \end{matrix}\right\}\text{équations linéaires}$$

  $$\left.\begin{matrix} x^2-3y=1 \\ 3x-8xy+z^3=23 \end{matrix}\right\}\text{équations non linéaires}$$

- Une **solution** de l'équation (1) est un couple de deux nombres $(x;y)$ tel que $ax+by=c$ et une solution de l'équation (2) est un triplet de trois nombres $(x;y;z)$ tel que $ax+by+cz=d$. Par exemple $(18;7)$ est une solution de $2x-3y=15$ et $(-3;7;-10)$ est une solution de $8x-\frac{4}{7}y+3,7z=-65$.

- Un **système linéaire** est un ensemble de plusieurs équations linéaires. Les solutions d'un système d'équations sont les solutions communes à toutes les équations du système.

  Exemple

  $$\begin{cases} x-5y=17 & (1) \\ -3x+2y=-12 & (2) \end{cases}$$

  $(17;0)$ est une solution de (1), mais pas de (2) donc ce n'est pas une solution du système ! Par contre $(2;-3)$ est une solution du système car c'est une solution commune aux deux équations.

2) Résolution d'un système linéaire « par substitution »

C'est la méthode la plus générale qui marche avec tout système. Elle consiste à choisir une équation du système et à exprimer à l'aide de celle-ci une des inconnues en fonctions des autres (le choix le plus judicieux consiste à prendre, si possible, une inconnue dont le coefficient vaut 1, ce qui permet d'éviter les calculs avec des fractions !). On remplace

ensuite cette inconnue dans toutes les autres équations du système par cette expression : on obtient alors un système avec une équation et une inconnue en moins que le système initial. On répète ceci jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule équation qu'on peut alors résoudre.

Exemples

- $\begin{cases} 5x+17y=1 & (1) \\ x-2y=11 & (2) \end{cases}$

  $(2) \Leftrightarrow x=11+2y$

  dans (1) : $5(11+2y)-2y=11 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow y=-2$

  donc $x=11+2(-2)=7$

  $S=\{(7;-2)\}$ (le système a donc une seule solution !)

- $\begin{cases} 3x-5y=-4 & (1) \\ -6x+10y=8 & (2) \end{cases}$

  $(1) \Leftrightarrow 3x=5y-4 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}y-\frac{4}{3}$

  dans (2) : $-6\left(\frac{5}{3}y-\frac{4}{3}\right)+10y=8 \Leftrightarrow -10y+8+10y=8 \Leftrightarrow 0y=0$, ce qui est vrai pour tout réel y donc ce système admet une infinité de solutions :

  $S=\left\{\left(\frac{5}{3}y-\frac{4}{3};y\right) / y \in \mathbb{R}\right\}$

- $\begin{cases} x+3y=-7 & (1) \\ 2x-y=14 & (2) \\ -x+2y=-13 & (3) \end{cases}$

  $(2) \Leftrightarrow y=2x-14$

  dans (1) : $x+3(2x-14)=-7 \Leftrightarrow 7x=35 \Leftrightarrow x=5$

  donc $y=2\cdot 5-14=-4$

  vérifions (3) : $-5+2(-4)\overset{!}{=}-13$, d'où $S=\{(5;-4)\}$

- $\begin{cases} x+3y=-7 & (1) \\ 2x-y=14 & (2) \\ 8x-7y=3 & (3) \end{cases}$

en utilisant (1) et (2) on obtient $x = 5$ et $y = -4$ (voir exemple ci-dessus)

vérifions (3) : $8 \cdot 5 - 7(-4) = 68 \neq 3$, d'où $S = \varnothing$!

- $$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x - 3y - z = -7 & (2) \\ 5x - 2y + 3z = 10 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow z = 6 - x - y$

dans (2) : $2x - 3y - (6 - x - y) = -7 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 3x - 2y = -1\ (4)$

dans (3) : $5x - 2y + 3(6 - x - y) = 10 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 2x - 5y = -8\ (5)$

(4) et (5) constituent alors un système de 2 équations à 2 inconnues :

$(5) \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}y - 4$

dans (4) : $\frac{15}{2}y - 12 - 2y = -1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow y = 2$, donc $x = \frac{5}{2} \cdot 2 - 4 = 1$

dans (1) : $z = 6 - 1 - 2 = 3$, d'où $S = \{(1;2;3)\}$

- $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 15 & (1) \\ -x + 5y + z = -18 & (2) \\ -6x + 3y - 9z = 7 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow y = 2x + 3z - 15$

dans (2) : $-x + 5(2x + 3z - 15) + z = -18 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 9x + 16z = 57\ (4)$

dans (3) : $-6x + 3(2x + 3z - 15) - 9z = 7 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 0x + 0z = 52\ (5)$

or (5) est impossible donc $S = \varnothing$.

- $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 15 & (1) \\ -x + 5y + z = -18 & (2) \\ -6x + 3y - 9z = -45 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow y = 2x + 3z - 15$

dans (2) : $-x + 5(2x + 3z - 15) + z = -18 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 9x + 16z = 57\ (4)$

dans (3) : $-6x + 3(2x + 3z - 15) - 9z = -45 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 0x + 0z = 0\ (5)$

or (5) est vrai pour tous x, z réels, donc il y a une infinité de solutions :

$(4) \Leftrightarrow z = -\frac{9}{16}x + \frac{57}{16}$, dans (1) : $y = 2x + 3\left(-\frac{9}{16}x + \frac{57}{16}\right) - 15 = \frac{5}{16}x - \frac{69}{16}$

donc $S=\left\{\left(x;\frac{5}{16}x-\frac{69}{16};-\frac{9}{16}x+\frac{57}{16}\right)/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

3) Règle de Cramer

Cette règle s'applique aux systèmes linéaires ayant même nombre d'équations que d'inconnues (nous nous limiterons à deux cas : systèmes de **2 équations à 2 inconnues** et systèmes de **3 équations à 3 inconnues**.

a) Déterminants d'ordre 2 et 3

- Un **déterminant d'ordre 2** est un « tableau carré » de $2\cdot 2=4$ nombres a, b, c, d noté $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. La valeur de ce déterminant est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc}$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=7\cdot 3-5\cdot 11=21-55=-34$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 9 \\ -8 & -12 \end{vmatrix}=(-4)(-12)-9(-8)=48+72=120$$

- Un **déterminant d'ordre 3** est un « tableau carré » de $3\cdot 3=9$ nombres a, b, c, d, e, f, g, h, i noté $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$. La valeur de ce déterminant est donnée par la formule suivante appelée **règle de Sarrus** :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix}=aei+dhc+gbf-gec-ahf-dbi}$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{matrix}=-56+0+15-4+12-0=-33$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ -1 & 3 & 9 \\ 7 & -21 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & -10 \\ -1 & 3 \\ 7 & -21 \end{matrix}=-30-630+0-0+945+20=305$$

b) Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Soit un système de deux équations à deux inconnues écrit sous forme standard :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

On commence par calculer le déterminant principal du système :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1er cas : $\Delta \neq 0$

Le système admet une solution unique qu'on obtient en calculant les déterminants :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Alors $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ d'où : $S=\left\{\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta};\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$

2e cas : $\Delta=0$

Le système a alors une infinité ou pas de solutions (à préciser à l'aide de la méthode par substitution.

Exemples

Reprenons les exemples du paragraphe 2.

- $$\begin{cases} 5x+17y=1 & (1) \\ x-2y=11 & (2) \end{cases}$$

  $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-10-17=-27\neq 0$ donc une seule solution

  $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 11 & -2 \end{vmatrix}=-2-187=-189$ donc $x=\dfrac{-189}{-27}=7$

  $\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}=55-1=54$ donc $y=\dfrac{54}{-27}=-2$

  $S=\{(7;-2)\}$

- $$\begin{cases} 7x-8y=11 & (1) \\ -21x+24y=-5 & (2) \end{cases}$$

  $\Delta=\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ -21 & 24 \end{vmatrix}=168-168=0$ donc pas ou une infinité de solutions

$(1)\big|\cdot(-3) \Leftrightarrow -21x+24y=-33$ ce qui est incompatible avec (2), donc $S=\varnothing$.

- $\begin{cases} 3x-5y=-4 & (1) \\ -6x+10y=8 & (2) \end{cases}$

  $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}=30-30=0$ donc pas ou une infinité de solutions

  Par substitution on trouve (voir p. 3) : $S=\left\{\left(\frac{5}{3}y-\frac{4}{3};y\right)/\, y\in\mathbb{R}\right\}$

c) Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Soit un système de trois équations à trois inconnues écrit sous forme standard :

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

On commence par calculer le déterminant principal du système :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1er cas : $\Delta\neq 0$

Le système admet une solution unique qu'on obtient en calculant les déterminants :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

Alors $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$ et $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ d'où : $S=\left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta};\frac{\Delta_y}{\Delta};\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)\right\}$

2e cas : $\Delta=0$

Le système a alors une infinité ou pas de solutions à préciser à l'aide de la méthode par substitution.

Exemples

Reprenons les exemples du paragraphe 2.

- $\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ 2x-3y-z=-7 & (2) \\ 5x-2y+3z=10 & (3) \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9-5-4+15-2-6 = -11 \neq 0 \text{ donc une seule solution}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -54-10+14+30-12+21 = -11 \text{ donc } x = \frac{-11}{-11} = 1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -21-30+20+35+10-36 = -22 \text{ donc } y = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -7 \\ 5 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -30-35-24+90-14-20 = -33 \text{ donc } z = \frac{-33}{-11} = 3$$

$S = \{(1;2;3)\}$

- $$\begin{cases} 2x-y+3z=15 & (1) \\ -x+5y+z=-18 & (2) \\ -6x+3y-9z=7 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix} = -90+6-9+90-6+9 = 0 \text{ donc une infinité ou pas de solutions}$$

Par substitution on trouve (voir p. 4) : $S = \varnothing$

- $$\begin{cases} 2x-y+3z=15 & (1) \\ -x+5y+z=-18 & (2) \\ -6x+3y-9z=-45 & (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix} = -90+6-9+90-6+9 = 0 \text{ donc une infinité ou pas de solutions}$$

Par substitution on trouve (voir p. 4) : $S = \left\{ \left(x; \frac{5}{16}x - \frac{69}{16}; -\frac{9}{16}x + \frac{57}{16} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

Exercices 1, 2, 3

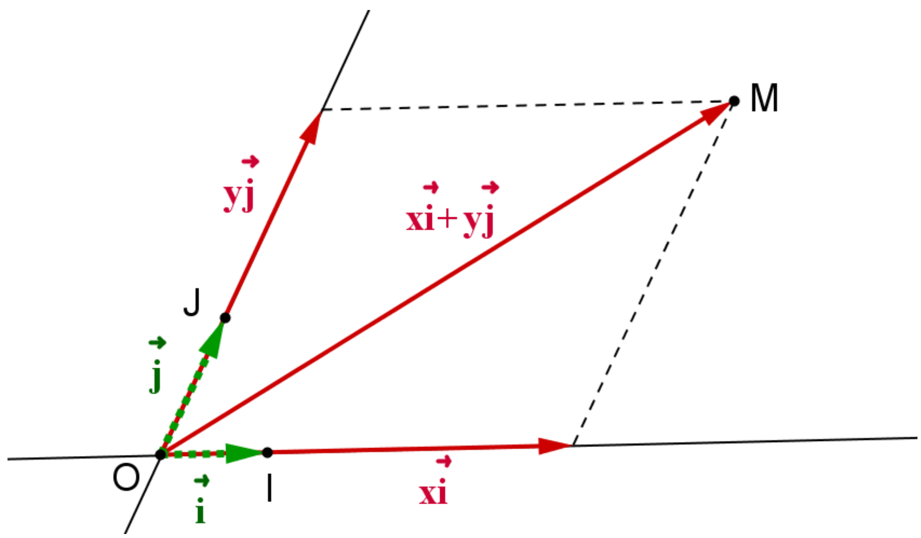
B) GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN *(Rappels)*

1) Repères du plan

- Soient O, I, J trois points non alignés du plan, alors les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires et le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère** du plan ce qui signifie que pour tout point M du plan il existe un couple unique $(x; y)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

On note $M(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, x est appelée **abscisse** de M et y **ordonnée** de M. La droite OI est appelée **axe des abscisses** et la droite OJ **axe des ordonnées**



- Si $OI \perp OJ$ et $OI = OJ = 1$ on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé (R.O.N.)**

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un point unique M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ ($\overrightarrow{OM}$ est le *représentant d'origine O* de $\vec{u}$). Si on connaît M, on connaît $\vec{u}$, il est donc naturel de dire que les coordonnées de M sont aussi les « coordonnées » de $\vec{u}$:

$$\text{si } M(x; y) \text{ et } \vec{u} = \overrightarrow{OM} \text{ alors } \vec{u}(x; y) \quad \text{ou} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2) Calcul vectoriel dans un repère du plan

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, rappelons qu'on a alors les formules suivantes :

a) Formules valables dans <u>tout repère</u>

- $\alpha \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

- on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

c'est- à dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ou s'ils sont nuls.

- $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ et sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0}$
- $A,\ B, C$ alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

b) Formules valables uniquement dans un <u>R.O.N.</u>

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$$

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3) <u>Equations d'une droite</u>

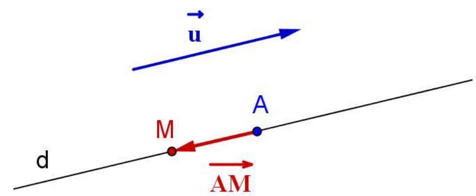
Une droite d du plan est entièrement déterminée si on connaît :

- ➢ deux points A et B de d

ou bien

- ➢ un point $A \in d$ et un **vecteur directeur** $\vec{u}$ de d (c'est-à-dire un vecteur non nul qui a même direction que d)

Remarquons que dans le premier cas on connaît également un vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}$.



$$\boxed{\forall M \quad M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0}$$

Nous allons maintenant exprimer cette dernière propriété en utilisant les coordonnées dans un repère (en principe quelconque, en pratique orthonormé) :

$$A\left(x_A; y_A\right),\ M\left(x; y\right) \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

a) Système d'équations paramétriques de d

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_u \\ k \cdot y_u \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - x_A = k \cdot x_u \\ y - y_A = k \cdot y_u \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{M(x;y) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \end{cases}}$$

Ce système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et de **paramètre k** est appelé **système d'équations paramétriques** de d.

Exemple

Soit d la droite passant par $A(5;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, alors :

$$d \equiv \begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -2 + 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

pour $k = 1$: $x = 2$ et $y = 5$ donc $B(2;5) \in d$,

pour $k = -4$: $x = 17$ et $y = -30$ donc $C(17;-30) \in d$, etc.

Pour voir si $D(8,3)\in d$ il faut voir s'il existe un réel k tel que $8=5-3k$ et $3=-2+7k$. Or la première de ces équations donne $k=-1$ et la deuxième $k=\frac{5}{7}$, donc $D\notin d$!

b) Equation cartésienne de d

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\text{ et }\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}\text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-x_A & x_u\\ y-y_A & y_u\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x-x_A)y_u-(y-y_A)x_u=0\\
&\Leftrightarrow y_ux-y_ux_A-x_uy+x_uy_A=0
\end{aligned}$$

En posant $a=y_u$, $b=-x_u$ et $c=x_uy_A-y_ux_A$, on obtient l'équation :

$$\boxed{M(x;y)\in d\Leftrightarrow ax+by+c=0\quad\text{avec }\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\neq\vec{0}\text{ v.d. de d}}$$

Cette équation linéaire à deux inconnues est appelée **équation cartésienne** de d.

Exemple

Pour $A(5;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}\text{ et }\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-5 & -3\\ y+2 & 7\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow 7(x-5)+3(y+2)=0\\
&\Leftrightarrow 7x+3y-29=0
\end{aligned}$$

donc $d\equiv 7x+3y-29=0$. Cherchons quelques points de d :

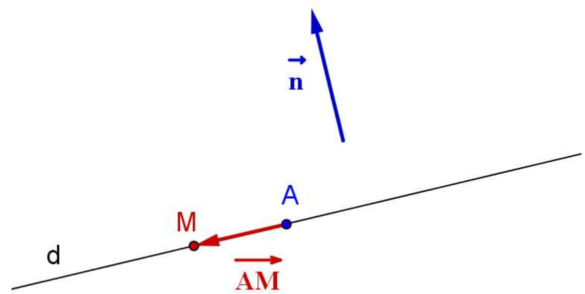
pour $x=2$, $14+3y-29=0\Leftrightarrow y=5$, donc $B(2;5)\in d$

pour $y=-30$, $7x-90-29=0\Leftrightarrow x=17$, donc $C(17;-30)\in d$, etc.

$D(8,3)\in d\Leftrightarrow 7\cdot 8+3\cdot 3-29=0$ ce qui est faux donc $D\notin d$.

4) Vecteur normal d'une droite

- On appelle **vecteur normal** d'une droite d tout vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ qui est orthogonal à tout vecteur directeur de d (on peut dire aussi : qui est un vecteur directeur de toute droite perpendiculaire à d).



- Pour connaître d il suffit de connaître un point $A \in d$ et un vecteur $\vec{n}$ normal à d car :

$$\boxed{\forall M \quad M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u}}$$

- Si $A(x_A; y_A)$, $M(x; y)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ **dans un R.O.N.** alors :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \perp \vec{n}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)x_n + (y - y_A)y_n = 0 \\ &\Leftrightarrow x_n x - x_A x_n + y_n y - y_A y_n = 0 \end{aligned}$$

En posant $a = x_n$, $b = y_n$ et $c = -x_n x_A - y_n y_A$, on obtient l'équation :

$$\boxed{M(x;y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec } \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ v.n. à d}}$$

Exemple

Pour $A(-9;5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x + 9 \\ y - 5 \end{pmatrix} \perp \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (x+9)2 + (y-5)(-13) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 13y + 83 = 0 \equiv d \end{aligned}$$

- ***Remarque :*** Si $d \equiv ax+by+c=0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

  Exemple : pour $d \equiv 4x-11y+29=0$, $\vec{u}\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix}$.

5) Intersection de deux droites

Soient deux droites $d \equiv ax+by+c=0$ et $d' \equiv a'x+b'y+c'=0$ données par leurs équations cartésiennes, alors :

$$I(x;y) \in d \cap d' \Leftrightarrow (x;y) \text{ est solution du système } \begin{cases} ax+by+c=0 & (1) \\ a'x+b'y+c'=0 & (2) \end{cases}$$

Déterminer l'intersection de d et d' et résoudre ce système revient donc au même !

On a trois possibilités :

- si $d \cap d' = \{I\}$ (d et d' sécantes), le système a une seule solution : les coordonnées de I.
- si $d \cap d' = \varnothing$ (d et d' strictement parallèles), le système n'a pas de solution.
- si $d \cap d' = d = d'$ (d et d' confondues), le système a une infinité de solutions.

Remarque : $d \parallel d' \Leftrightarrow \Delta = 0$ et d et d' sécantes $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Exemples *(pour les calculs voir pages 6-7)*

- $\begin{cases} 5x+17y=1 & (1) \\ x-2y=11 & (2) \end{cases}$, $S=\{(7;-2)\}$

  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites sécantes qui se coupent en $I(7;-2)$.

- $\begin{cases} 7x-8y=11 & (1) \\ -21x+24y=-5 & (2) \end{cases}$, $S=\varnothing$

  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites strictement parallèles (disjointes).

- $\begin{cases} 3x-5y=-4 & (1) \\ -6x+10y=8 & (2) \end{cases}$, $S=\left\{\left(\frac{5}{3}y-\frac{4}{3};y\right) / y \in \mathbb{R}\right\}$

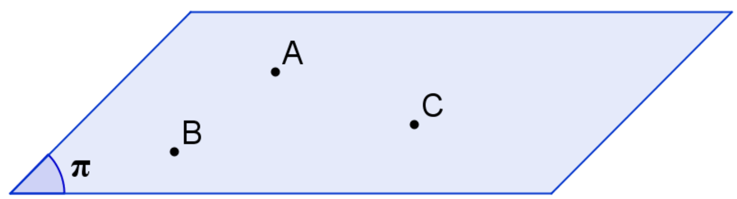
  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.

Exercice 4

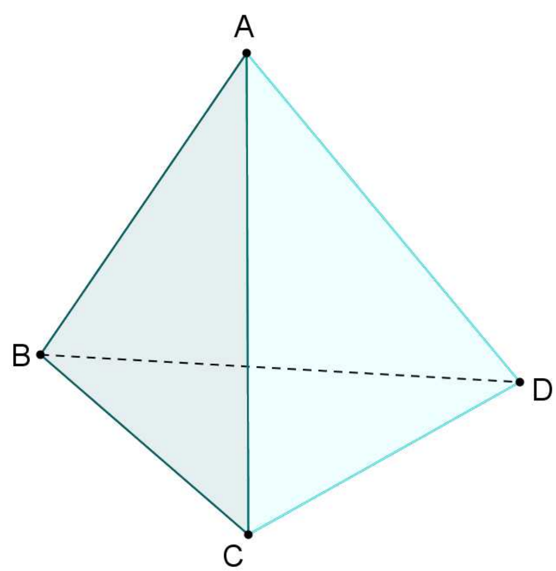
C) GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

1) Points, droites, plans et vecteurs dans l'espace

- Les notations pour les points et les droites de l'espace sont les mêmes que celles utilisées dans le plan, les plans sont souvent notés par des lettres grecques : α, β, π, …
- Par deux ponts A et B il passe exactement une droite notée (AB).
- Par trois points non alignés A, B, C de l'espace il passe exactement un plan noté parfois (ABC) ou simplement ABC :



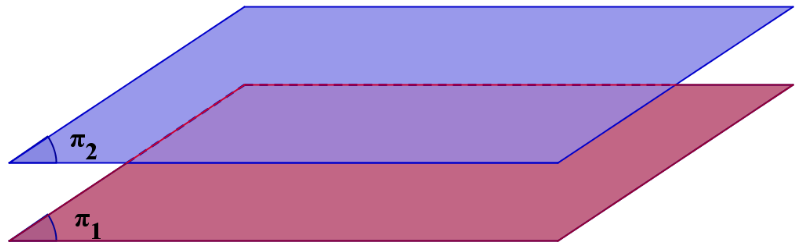
- Si quatre points appartiennent à un même plan on dit qu'ils sont **coplanaires**, sinon ils forment un **tétraèdre** (c'est-à-dire une pyramide à quatre faces triangulaires) :



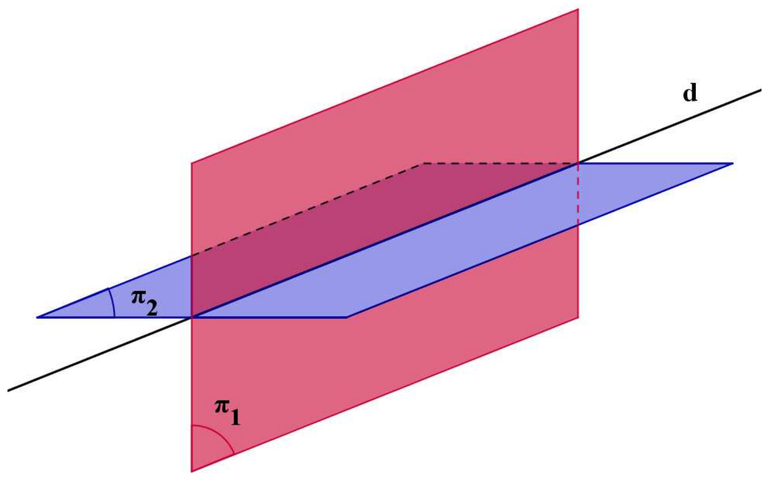
$A \notin BCD$
$B \notin ACD$
$C \notin ABD$
$D \notin ABC$

- **Deux plans** π_1 et π_2 de l'espace peuvent être :
  - **confondus** : $\pi_1 = \pi_2$

➢ **strictement parallèles** : $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$



➢ **sécants** : $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ (l'intersection de deux plans sécants est une droite !)

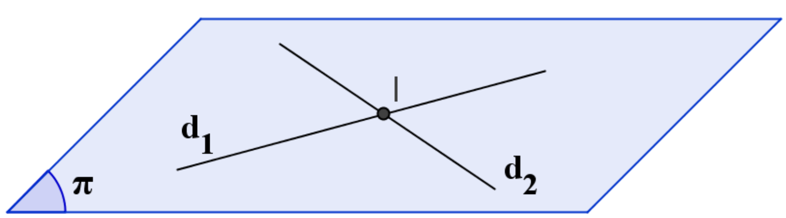


Remarques :

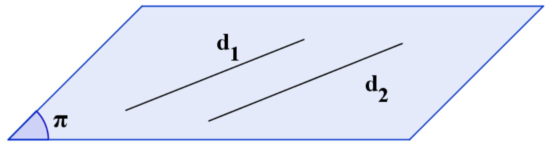
- $\pi_1 \parallel \pi_2$ (**parallèles**) signifie que $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ <u>ou</u> $\pi_1 = \pi_2$, donc deux plans sont soit parallèles, soit sécants (comme deux droites dans un plan).
- Une droite peut toujours être définie comme intersection de deux plans sécants.

- **Deux droites** d_1 et d_2 de l'espace peuvent être :

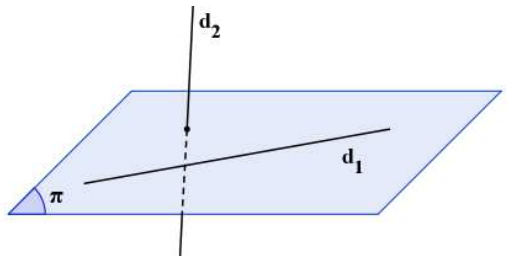
➢ **sécantes** : $d_1 \cap d_2 = \{I\}$ (deux droites sécantes sont coplanaires, c'est-à-dire quelles appartiennent à un même plan π)



- **parallèles** : $d_1 = d_2$ ou $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ (deux droites parallèles sont également coplanaires)



- **gauches** : c'est ainsi qu'on appelle deux droites qui ne sont pas coplanaires



- Les vecteurs se définissent exactement de la même manière dans l'espace que dans le plan, avec les mêmes propriétés et règles de calcul : addition des vecteurs, multiplication par un réel, vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux, relation de Chasles, etc.
- Soient A, B, C trois points non alignés qui définissent un plan $\pi = (ABC)$ de l'espace. Alors $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère de ce plan donc pour tout point $M \in \pi$ il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$: on exprime ceci en disant que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est évident que si $M \notin \pi$ alors $\overrightarrow{AM}$ n'est **pas** une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$! Ainsi :

$$\boxed{M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}}$$

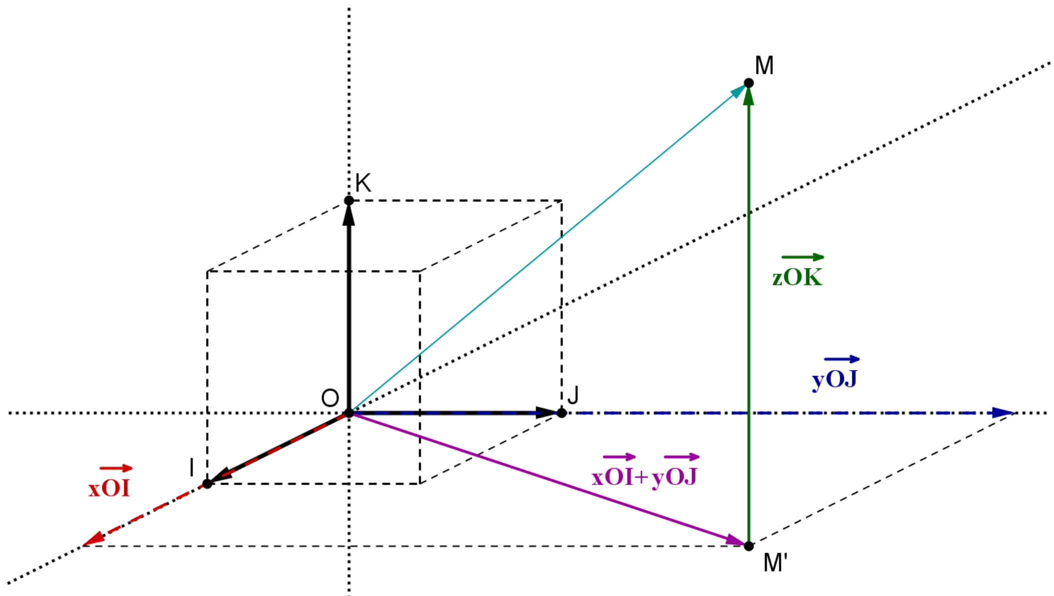
D'une manière générale $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$. Ceci revient en fait à dire qu'il existe trois représentants de ces vecteurs qui sont coplanaires !

- Deux droites sécantes dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux sont appelées **droites perpendiculaires**, alors que deux droites gauches dont les vecteurs directeurs sont orthogonaux sont appelées **droites orthogonales**, mais dans les deux cas on note : $d_1 \perp d_2$.

2) Repères de l'espace

- ***Exemple :***

Soient O, I, J, K quatre sommets adjacents d'un cube, M un point quelconque du l'espace et M' sa projection orthogonale sur le plan (OIJ). Alors il existe deux réels x et y tel que $\overrightarrow{OM'} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ}$ puisque $M' \in (OIJ)$ et il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z \cdot \overrightarrow{OK}$ puisque $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires :



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ} + z \cdot \overrightarrow{OK}$$

- Soient O, I, J, K quatre points non coplanaires de l'espace (OIJK est un tétraèdre) et notons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. Alors le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère** de l'espace ce qui signifie que pour tout point M de l'espace il existe un triplet unique $(x; y; z)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

On note $M(x; y; z)$, x est l'**abscisse** de M, y l'**ordonnée** de M et z la **cote** de M. La droite OI est appelée **axe des abscisses**, la droite OJ **axe des ordonnées** et la droite OK **axe des cotes.** Si les trois vecteurs du repère ont pour norme 1 et sont deux à deux orthogonaux, on dit que le repère est orthonormé (R.O.N.).

Par exemple $O(0,0,0)$, $I(1,0,0)$, $J(0,1,0)$, $K(0,0,1)$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Comme dans le plan on prend alors les coordonnées de M dans $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ comme coordonnées de $\vec{u}$:

$$\text{si } M(a,b,c) \text{ dans } \left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right) \text{ et } \vec{u}=\overrightarrow{OM} \text{ alors } \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

3) Calcul vectoriel dans un repère de l'espace

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x_w\\y_w\\z_w\end{pmatrix}$, $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$ et $C(x_C,y_C,z_C)$ dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, de même que dans le plan on a alors les formules suivantes :

a) Formules valables dans tout repère

- $\alpha\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_u\\\alpha\cdot y_u\\\alpha\cdot z_u\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\\z_u+z_v\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\y_u & y_v & y_w\\z_u & z_v & z_w\end{vmatrix}$$

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ssi $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$
- A, B, C, D coplanaires ssi $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc ssi $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\Leftrightarrow \exists k \quad \vec{u}=k\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \exists k \quad \begin{cases}x_u=k\cdot x_v\\y_u=k\cdot y_v\\z_u=k\cdot z_v\end{cases}$ si et seulement si

b) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$
- $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- on appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

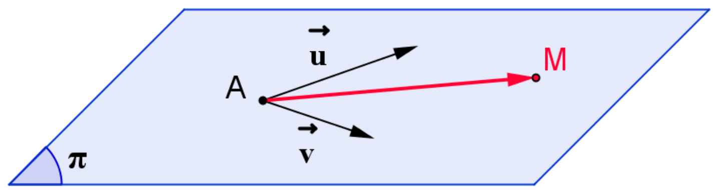
4) Equations d'un plan

a) Déterminer un plan

Il y a deux façons pour déterminer un plan π dans l'espace :

➢ **1er cas**

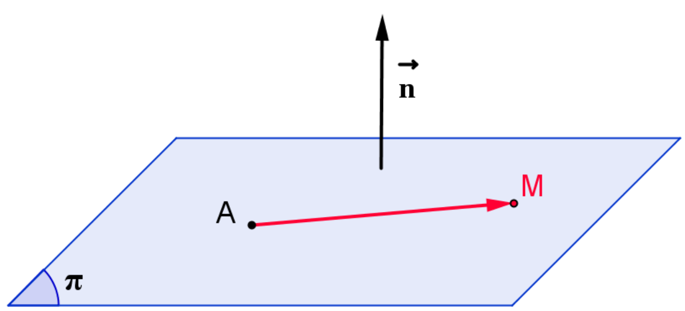
On donne un point $A \in \pi$ et **deux vecteurs directeurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de π (ou trois points non alignés $A, B, C \in \pi$ ce qui revient au même puisqu'alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont bien deux vecteurs directeurs non colinéaires de π).



$$\boxed{\forall M \quad M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v}}$$

➢ **2e cas**

On donne un point $A \in \pi$ et **un vecteur normal** $\vec{n}$ au plan c'est-à-dire un vecteur un vecteur non nul qui est orthogonal à tout vecteur directeur de π.



$$\boxed{\forall M \quad M \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$$

b) Système d'équations paramétriques d'un plan

Soit π un plan donné par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $M(x, y, z)$ un point quelconque, alors :

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in \pi &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ y = y_A + \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ z = z_A + \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{cases}}$$

Ce système de paramètres α et β est appelé système d'équations paramétriques de π.

Exemples

- $A(7;-3;2) \in \pi$ de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 7 + 4\alpha \\ y = -3 - 9\alpha + 5\beta \\ z = 2 + 11\alpha - \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- si $\pi \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\alpha - 6\beta \\ y = -1 + 8\alpha \\ z = -23\alpha + 7\beta \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ alors π est le plan passant par $A(5;-1;0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -23 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

  Autres points de π : $\alpha = 1, \beta = 3$: $B(5+3-18;-1+8;-23+21) = B(-10;7;-2)$,

  $\alpha = -2, \beta = 0$: $C(5-6;-1-16;46) = C(-1;-17;46)$, etc.

c) Equation cartésienne d'un plan

1er cas : π est défini par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & x_u & x_v \\ y-y_A & y_u & y_v \\ z-z_A & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

En calculant ce déterminant on obtient une équation de la forme :

$$\boxed{ax+by+cz+d=0 \quad \text{avec } (a,b,c) \neq (0,0,0)}$$

appelée **équation cartésienne** de π.

Exemple

π défini par : $A(3,-5,1)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\7\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix}$

$$M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 5 \\ y+5 & 7 & 1 \\ z-1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -28(x-3)-2(z-1)+45(y+5)-35(z-1)-8(y+5)-9(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow -37x+37y-37z+333=0$$

$$\Leftrightarrow -x+y-z+9=0 \equiv \pi$$

2^{e} cas : π est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$ **dans un R.O.N.**

$$M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_n(x-x_A)+y_n(y-y_A)+z_n(z-z_A)=0$$

et en posant $a = x_n$, $b = y_n$, $c = z_n$ et $d = -x_A x_n - y_A y_n - z_A z_n$ on obtient encore une équation de la forme :

$$\boxed{ax+by+cz+d=0 \quad \text{avec } \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \neq \vec{0}}$$

Exemple

π défini par : $A(-2,15,0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-21\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\pi &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-15\\z\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-21\\-3\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow 8(x+2)-21(y-15)-3z=0\\ &\Leftrightarrow 8x-21y-3z+331=0\equiv\pi \end{aligned}$$

autre méthode : $\pi\equiv 8x-21y-3z+d=0$ et comme $A(-2,15,0)\in\pi$:

$8\cdot(-2)-21\cdot 15-3\cdot 0+d=0\Leftrightarrow d=331$ d'où $\pi\equiv 8x-21y-3z+331=0$

Exercices 5 - 15

5) Systèmes d'équations d'une droite

Il y a deux façons de déterminer une droite d dans l'espace :

- d est donnée par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\quad \overrightarrow{AM}=k\cdot\vec{u}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\quad \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient un **système d'équations paramétriques** de paramètre k de d :

$$\boxed{M(x,y,z)\in d\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\quad \begin{cases}x=x_A+k\cdot x_u\\y=y_A+k\cdot y_u\\z=z_A+k\cdot z_u\end{cases}}$$

Exemple

$d\equiv\begin{cases}x=17-6k\\y=37k\\z=-5+19k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$ est la droite passant par $A(17,0,-5)$ de v.d. $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\37\\19\end{pmatrix}$.

- d est donnée comme intersection de deux plans π_1 et π_2, chaque plan étant défini par une équation cartésienne.

  La droite d est alors déterminée par un système linéaire de deux équations à trois inconnues appelé **système d'équations cartésiennes** :

$$\boxed{d \equiv \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x-y+3z=2 & (1) \\ 2x+4y-z=1 & (2) \end{cases}$$

Pour chercher des points de d il faut résoudre ce système :

$(1) \Leftrightarrow x=2+y-3z$

dans $(2): 4+2y-6z+4y-z=1 \Leftrightarrow 6y-7z=-3 \Leftrightarrow y=\frac{7}{6}z-\frac{1}{2}$

dans $(1): x=2+\frac{7}{6}z-\frac{1}{2}-3z \Leftrightarrow x=-\frac{11}{6}z+\frac{3}{2}$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R}$ $M\left(-\frac{11}{6}z+\frac{3}{2};\frac{7}{6}z-\frac{1}{2};z\right) \in d$, par exemple pour $z=0$ on obtient $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};0\right) \in d$, pour $z=-3$ on obtient $B(7;-4;-3) \in d$, etc.

Exercices 16 - 30

EXERCICES

Exercice 1

Résolvez les systèmes linéaires suivants (méthode au choix) :

1) $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x-y+2z=3 \\ 3x-2z=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+3y=4 \\ 2x+4y-z=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y-z=2 \\ 3x-6y+2z=4 \\ 2x-5y+3z=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-4y-2z=4 \\ x-2y-z=2 \\ -3x+6y+3z=6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+y=1 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ 2x+2y-z+2=0 \\ 4x-y+2z=9 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y-3z+5=0 \\ 2x+y-2z+9=0 \\ 3x-y+5z+20=0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1-4x_2-x_3=1 \\ 2x_1-5x_2+2x_3=2 \\ 6x_1-18x_2+2x_3=6 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3-8=0 \\ 4x_1+6x_2-2x_3=5 \\ x_1+x_2+4x_3-2=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 12x_1+9x_2-18x_3=3 \\ 8x_1+6x_2-12x_3=2 \\ -20x_1-15x_2+30x_3+5=0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x+y-3z=1+3x \\ x-3y+z=2-z \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x+y-3z=4 \\ -4x-2y+6z=2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x=y+4 \\ 4x+y+1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}-\dfrac{y+5}{4}=-2 \\ \dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3y-z+5=0 \\ 2x+3z=-4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x+y-2z=2 \\ 4x-y-z=3 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-6y+3z=3 \\ -\dfrac{x}{2}-y+\dfrac{z}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

19) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+5y=14 \\ x-y-2=0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=4 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{x-5y}{3}=4+z \\ \dfrac{3z-5x}{5}=z+\dfrac{x-2y}{3} \\ 1-\dfrac{x+y-z}{2}=-3 \end{cases}$

Exercice 2

Déterminez les valeurs du paramètre m pour que les systèmes suivants aient :

- **a)** une seule solution
- **b)** aucune solution
- **c)** une infinité de solutions :

1) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+mz=3 \\ x+my+3z=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x-my=3 \\ 2x+y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$

Exercice 3

Résolvez les systèmes linéaires suivants en discutant suivant les valeurs du paramètre m :

1) $\begin{cases} (m+1)x-2y=4 \\ (m-1)x-3y=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+my+z=2m \\ mx+y+z=0 \\ x+my+(m+1)z=m \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+(m-2)y-m=0 \\ 4x+my-10=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+mz=2 \\ mx+m^2y+m^3z=m \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2my+mz=0 \\ 3x+(m+2)y+(m+1)z=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} mx+y=2 \\ x+2y=m \\ 2x+my=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} mx+3y-mz=1 \\ 2x+my-z=m \end{cases}$

Exercice 4

Reprenez tous les systèmes linéaires à deux inconnues des exercices précédents (1 à 3) et donnez-en une interprétation géométrique.

Dans les exercices qui suivent où il sera question d'orthogonalité (càd de vecteurs normaux) on supposera toujours que le repère est un R.O.N.

Exercice 5

Déterminez une équation cartésienne du plan passant par le point $A(-2;3;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 6

Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan passant par le point $A(-3;1;2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 7

Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan passant par les points $P(5;-3;7)$, $Q(0;2;-9)$ et $R(5;0;0)$

Exercice 8

Soient Ox, Oy et Oz les trois axes d'un R.O.N. d'origine O, a, b et c les bissectrices des angles $\widehat{yOz}$, $\widehat{xOz}$ et $\widehat{xOy}$ respectivement. Déterminez les équations cartésiennes :

1) des plans xOy, yOz et xOz.
2) du plan π_1 contenant a et Ox.
3) du plan π_2 contenant b et Oy
4) du plan π_3 contenant c et Oz

Exercice 9

Dans un repère de l'espace on donne les points $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-3)$, $C(0;3;-1)$, $D(-7;10;13)$ et $E(4;-5;1)$.

1) Vérifiez que A, B et C ne sont pas alignés.
2) Les points D et E appartiennent-ils au plan ABC ?

Exercice 10

Les points $K(2;1;0)$, $L(1;-2;-1)$, $M(0;1;-2)$ et $P(2;-5;4)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 11

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(3;-4;1)$ et parallèle au plan π' donné par le système d'équations paramétriques : $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha-\beta \\ y = \alpha+\beta \\ z = 2+\alpha \end{cases}$

Exercice 12

1) Trouvez un système d'équations paramétriques du plan d'équation cartésienne : $\pi \equiv x-2y+z=1$

2) Trouvez une équation cartésienne du plan donné par le système d'équations paramétriques : $\pi \equiv \begin{cases} x = -3+2\alpha+\beta \\ y = 1-\alpha+3\beta \\ z = 5-3\alpha \end{cases}$

Exercice 13

Analysez si parmi les plans suivants donnés par leurs équations cartésiennes il y en a qui sont orthogonaux :

$\pi_1 \equiv 2x-7y-2z+1=0$

$\pi_2 \equiv 4x-2y+11z-5=0$

$\pi_3 \equiv x+13y+2z+37=0$

Exercice 14

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2;5;-7)$ et parallèle au plan $\pi' \equiv 3x-5y+7z-4=0$

Exercice 15

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2;5;-7)$ et parallèle au plan ABC avec $A(2;1;-3)$, $B(1;2;-4)$ et $C(1;0;1)$

Exercice 16

Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes :

1) de la droite passant par $A(5;2;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2) de la droite passant par $A(1;-4;3)$ et par $B(0;1;-2)$.

3) des axes de coordonnées Ox, Oy et Oz.

Exercice 17

Analysez si les droites d et d' sont parallèles avec :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k+1 \\ y = -k-1 \\ z = 3k+2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d' \equiv \begin{cases} x = -\frac{6}{7}k - 1 \\ y = \frac{3}{7}k \\ z = \frac{9}{7}k - 8 \end{cases}$$

Exercice 18

Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite d orthogonale au plan $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ et passant par le point $P(2;1;-1)$.

Exercice 19

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(1;-2;3)$ et contenant la droite $d \equiv \begin{cases} x = -3+k \\ y = 2-k \\ z = -1+2k \end{cases}$.

Exercice 20

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $P(3;-1;4)$ et parallèle à la droite $d' \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases}$.

Exercice 21

On donne les points $A(3;2;-1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;6;-3)$ et $D(6;8;4)$.

1) Les points C et D appartiennent-ils à la droite AB ?
2) Le point T appartient à la droite AB et son abscisse vaut -4. Calculez ses autres coordonnées.

Exercice 22

Reprenez tous les systèmes linéaires <u>à trois inconnues</u> des exercices précédents (1 à 3) et donnez une interprétation géométrique.

Exercice 23

On donne la droite $d \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$ et le plan $\pi \equiv x - y + z = 5$. La droite d perce-t-elle le plan π ? Si oui en quel point ?

Exercice 24

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x+y-z=-6 \\ 2x-y+6=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x=k-1 \\ y=2k \\ z=2 \end{cases}$$

Exercice 25

Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x=k-1 \\ y=3+2k \\ z=-k \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x=-1+\alpha+\beta \\ y=2+3\alpha \\ z=-3-\alpha-\beta \end{cases}$

Exercice 26

Discutez, en fonction du réel α, la position de la droite $d \equiv \begin{cases} x=3+\alpha k \\ y=2+2k \\ z=\alpha-k \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv 3x-2y+5z=1$.

Exercice 27

Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x=\alpha+1 \\ y=-2\alpha-3 \\ z=3\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x=3\beta-1 \\ y=-\beta-4 \\ z=\beta+2 \end{cases}$$

Exercice 28

Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ -y-3z=1 \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x=-\alpha+\beta \\ y=-2\alpha-\beta-1 \\ z=\alpha-\beta-2 \end{cases}$.

Exercice 29

Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $P(1;0;-1)$ et parallèle à la droite $d' \equiv \begin{cases} x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=4 \end{cases}$.

Exercice 30

Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2;-11;-5)$ et orthogonal à la droite $d \equiv \begin{cases} x=2\alpha-8 \\ y=3\alpha \\ z=5\alpha-2 \end{cases}$.

Exercice 1

1) $\begin{cases} 2x-3y+z=1 & (1) \\ x-y+2z=3 & (2) \\ 3x-2z=5 & (3) \end{cases}$

par substitution :

$(2) \Leftrightarrow y = x+2z-3$

$\rightarrow (1):\ 2x-3x-6z+9+z=1 \Leftrightarrow -x-5z=-8 \Leftrightarrow \underline{8-5z=x}\ (4)$

pas de y dans (3).

$(4)\rightarrow(3):\ 24-15z-2z=5 \Leftrightarrow 19=17z \Leftrightarrow \underline{z=\frac{19}{17}}$

$x = 8-\frac{95}{17} \Leftrightarrow \underline{x=\frac{41}{17}}$

$y = \frac{41}{17}+\frac{38}{17}-3 \Leftrightarrow \underline{y=\frac{28}{17}}$

$S=\left\{\left(\frac{41}{17}, \frac{28}{17}, \frac{19}{17}\right)\right\}$

2) $\begin{cases} x-y+z=1 & (1) \\ 3x+3y=4 & (2) \\ 2x+4y-z=3 & (3) \end{cases}$

règle de Cramer :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3+0+12-6-0-3=0$

$\rightarrow$ 0 ou une infinité de solutions (à trouver par substitution)

$(3):\ 2x+4y-3=z$

$\rightarrow (1):\ x-y+2x+4y-3=1 \Leftrightarrow 3x+3y=4\ (4)$

$(4)=(2)$ ($\rightarrow$ une infinité de sol.) : $3y=4-3x \ |:3 \Leftrightarrow \underline{y=\frac{4}{3}-x}$

$\rightarrow (3):\ z=2x+\frac{16}{3}-4x-3=-2x+\frac{7}{3}$

$S=\left\{\left(x, \frac{4}{3}-x, \frac{7}{3}-2x\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$

3) $\begin{cases} x-y-z=2 & (1) \\ 3x-6y+2z=4 & (2) \\ 2x-5y+3z=3 & (3) \end{cases}$

règle de Cramer :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -18-4+15-12+10+9=0$

$\rightarrow$ 0 ou une infinité de solutions

$(1):\ x=2+y+z$

$\rightarrow (2):\ 6+3y+3z-6y+2z=4 \Leftrightarrow \underline{-3y+5z=-2}\ (4)$

$\to(3)$: $4+2y+2z-5y+3z=3 \Leftrightarrow -3y+5z=-1 \quad (5)$

$(4)\to(5)$: $-1=-2$ impossible donc $S=\emptyset$

4) $\begin{cases} 2x-4y-2z=4 & (1) \\ x-2y-z=2 & (2) \\ -3x+6y+3z=6 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2)+(3)$: $0=16$ impossible donc $S=\emptyset$

5) $\begin{cases} x-2y=3 & (1) \\ 2x+y=1 & (2) \\ 3x-y=4 & (3) \end{cases}$ (3 éq. à 2 inc. $\to$ substitution)

$(2)+(3)$: $5x=5 \Leftrightarrow x=1$

$\to(2)$: $2+y=1 \Leftrightarrow y=-1$

vérif. (1): $1+2=3$ vrai!

$S=\{(1,-1)\}$

6) $\begin{cases} 3x-2y=5 & (1) \\ 2x+y=1 & (2)\ (\text{idem}) \\ 4x+3y=5 & (3) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow y=1-2x$

$\to(1)$: $3x-2+4x=5 \Leftrightarrow 7x=7 \Leftrightarrow \underline{x=1}$

$\to(2)$: $y=1-2=-1$

vérifions (3): $4-3=5$ faux donc $S=\emptyset$

7) $\begin{cases} 3x-2y+z=7 & (1) \\ 2x+2y-z=-2 & (2) \\ 4x-y+2z=9 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $5x=5 \Leftrightarrow \underline{x=1}$

$\to(2)$: $2+2y-z=-2 \Leftrightarrow z=2y+4 \quad (4)$

$\to(3)$: $4-y+2z=9 \Leftrightarrow y=2z-5 \quad (5)$

$(5)\to(4)$: $z=4z-10+4 \Leftrightarrow -3z=-6 \Leftrightarrow \underline{z=2}$

$y=4-5=-1$

$S=\{(1,-1,2)\}$

8) $\begin{cases} y-3z=-5 & (1) \\ 2x+y-2z=-9 & (2) \\ 3x-y+5z=-20 & (3) \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0-6+6+9-0-10=-1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ -9 & 1 & -2 \\ -20 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -25+40-27-60+10+45=-17 \;,\; x=\frac{-17}{-1}=17$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 2 & -9 & -2 \\ 3 & -20 & 5 \end{vmatrix} = 0+30+120-81-0+50=119 \;,\; y=\frac{119}{-1}=-119$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & -20 \end{vmatrix} = 0-27+10+15-0+40=38 \;,\; z=\frac{38}{-1}=-38$$

$S=\{(17;-119;-38)\}$

9) $\begin{cases} x_1-4x_2-x_3=1 & (1) \\ 2x_1-5x_2+2x_3=2 & (2) \\ 6x_1-18x_2+2x_3=6 & (3) \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 6 & -18 & 2 \end{vmatrix} = -10-48+36-30+36+16=0$$

$\rightarrow$ 0 ou une infinité de sol.

(1): $x_1=1+4x_2+x_3$

$\rightarrow(2)$: $2+8x_2+2x_3-5x_2+2x_3=2 \Leftrightarrow 3x_2+4x_3=0$ (4)

$\rightarrow(3)$: $6+24x_2+6x_3-18x_2+2x_3=6 \Leftrightarrow 6x_2+8x_3=0 \;|:2$

$\Leftrightarrow 3x_2+4x_3=0$ (4)

$(4) \Leftrightarrow x_2=-\frac{4}{3}x_3$

donc $x_1=1-\frac{16}{3}x_3+x_3=1-\frac{13}{3}x_3$

$S=\left\{\left(1-\frac{13}{3}x_3, -\frac{4}{3}x_3, x_3\right) \mid x_3\in\mathbb{R}\right\}$

10) $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=8 & (1) \\ 4x_1+6x_2-2x_3=5 & (2) \\ x_1+x_2+4x_3=2 & (3) \end{cases}$

(1) : $x_1 = 8 - 2x_2 + 5x_3$

$\to$(2) : $32 - 8x_2 + 20x_3 + 6x_2 - 2x_3 = 5 \iff -2x_2 + 18x_3 = -27$ (4)

$\to$(3) : $8 - 2x_2 + 5x_3 + x_2 + 4x_3 = 2 \iff -x_2 + 9x_3 = -6 \quad | \cdot 2$

$\iff -2x_2 + 18x_3 = -12$ (5)

impos.

$S = \emptyset$

11) $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 - 18x_3 = 3 & (1) \\ 8x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 2 & (2) \\ -20x_1 - 15x_2 + 30x_3 = -5 & (3) \end{cases}$

(3) $| : (-5) \iff 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \quad | \cdot 2$

$\iff 8x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 2$ donc (3) = (2)

(3) $| \cdot 3 \iff 12x_1 + 9x_2 - 18x_3 = 3$ donc (3) = (1)

Donc le système est réduit à une seule équation :

$4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \iff x_1 = -\frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4}$

$S = \left\{ \left(-\frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{4} ; x_2 ; x_3\right) / x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

12) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 + 3x & (1) \\ x - 3y + z = 2 - z & (2) \end{cases}$

(1) $\iff y = 1 + 3x - 2x + 3z \iff y = 1 + x + 3z$

$\to$(2) : $x - 3 - 3x - 9z + z = 2 - z \iff -2x - 7z = 5$

$\iff x = -\frac{7}{2}z - \frac{5}{2}$

donc $y = 1 - \frac{7}{2}z - \frac{5}{2} + 3z = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2}$

$S = \left\{ \left(-\frac{7}{2}z - \frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2} ; z\right) | z \in \mathbb{R} \right\}$

13) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 & (1) \\ -4x - 2y + 6z = 2 & (2) \end{cases}$

(1) : $y = 4 - 2x + 3z$

$\to$(2) : $\cancel{-4x} - 8 \cancel{+4x} \cancel{-6z} \cancel{+6z} = 2 \iff -8 = 2$ impos. donc $S = \emptyset$

14) $\begin{cases} 2x = y + 4 & (1) \\ 4x + y + 1 = 0 & (2) \\ 2x + y = 0 & (3) \end{cases}$

(3) $\iff y = -2x$

$\to (1): 2x = -2x + 4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$

$\underline{y = -2}$

vérifions (2): $4 - 2 + 1 \neq 0$ donc $S = \emptyset$

15) $\cancel{4}^{2}\frac{(x-3)}{\cancel{2}} - \cancel{4}\frac{(y+5)}{\cancel{4}} = -2 \cdot 4 \quad | \cdot 4$

$\Leftrightarrow 2x - 6 - y - 5 = -8$

$\Leftrightarrow 2x - y = 3 \ (1)$

$\cancel{6}^{2}\frac{(2x-5)}{\cancel{3}} - \cancel{6}^{3}\frac{(y-2)}{\cancel{2}} = \cancel{6}^{3}\frac{1}{\cancel{2}} \quad | \cdot 6$

$\Leftrightarrow 2(2x-5) - 3(y-2) = 3$

$\Leftrightarrow 4x - 10 - 3y + 6 = 3$

$\Leftrightarrow 4x - 3y = 7 \ (2)$

$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 7 = -2, \ x = \frac{-2}{-2} = 1$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2, \ y = \frac{2}{-2} = -1$

$S = \{(1; -1)\}$

16) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3y - z = -5 \\ 2x + 3z = -4 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 0 - 0 - 0 - 0 = 13 \neq 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 8 + 0 - 0 - 0 - 30 = -11, \ x = -\frac{11}{13}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 6 + 0 - 0 - 4 - 0 = -25, \ y = -\frac{25}{13}$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 20 + 0 - 18 - 0 - 0 = -10, \ z = -\frac{10}{13}$

$S = \{(-\frac{11}{13}, -\frac{25}{13}, -\frac{10}{13})\}$

17) $\begin{cases} x-2y+z=1 & (1) \\ 3x+y-2z=2 & (2) \\ 4x-y-z=3 & (3) \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+16-3-4-2-6=0$$

$\to$ 0 ou une infinité de sol.

$(1) \Leftrightarrow x = 1+2y-z$

$\to (2)$: $3+6y-3z+y-2z=2 \Leftrightarrow 7y-5z=-1$ (4)

$\to (3)$: $4+8y-4z-y-z=3 \Leftrightarrow 7y-5z=-1$ (5) $\Big] =$

$(4) \Leftrightarrow y = \dfrac{5z-1}{7}$

donc $x = 1 + \dfrac{10z-2}{7} - z = \dfrac{7+10z-2-7z}{7} = \dfrac{3z+5}{7}$

$S = \left\{ \left(\dfrac{3z+5}{7} ; \dfrac{5z-1}{7} ; z \right) \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$

18) $\begin{cases} x-2y+z=1 & (1) \\ 3x-6y+3z=3 & (2) \\ -\dfrac{x}{2}-y+\dfrac{z}{2}=-\dfrac{1}{2} & \vert\cdot(-2) \Leftrightarrow x+2y-z=1 \quad (3) \end{cases}$

$(1)+(3)$: $2x=2 \Leftrightarrow \underline{x=1}$

$\to (1)$: $1-2y+z=1 \Leftrightarrow z=2y$ (4)

$\to (3)$: $1+2y-z=1 \Leftrightarrow z=2y$ $\Big] =$

$\to (2)$: $3-6y+6y=3 \Leftrightarrow 0=0$ vrai !

$S = \{ (1; y; 2y) \mid y \in \mathbb{R} \}$

19) $\begin{cases} x-2y=1 & (1) \\ 3x+5y=14 & (2) \\ x-y-2=0 & (3) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x = 1+2y$

$\to (3)$: $1+2y-y-2=0 \Leftrightarrow \underline{y=1}$

donc $x = 1+2 = 3$

Vérif (2): $9+5 \stackrel{!}{=} 14$

$S = \{ (3; 1) \}$

20) $\begin{cases} x+2y=5 \ (1) \\ 3x-y=4 \ (2) \\ 2x-3y=2 \ (3) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x = 5-2y$

$\rightarrow (2): 15-6y-y=4 \Leftrightarrow \underline{y = \frac{11}{7}}$

$x = 5 - \frac{22}{7} \Leftrightarrow \underline{x = \frac{13}{7}}$

Verif. (3): $\frac{26}{7} - \frac{33}{7} = -\frac{7}{7} = -1 \neq 2$ donc $S = \emptyset$

21) $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \ (1) \\ x-2y+z=2 \ (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow y = 1-2x+3z$

$\rightarrow (2): x-2+4x-6z+z=2 \Leftrightarrow x = \frac{5z+4}{5} = z+\frac{4}{5}$

$y = 1-2z-\frac{8}{5}+3z = z-\frac{3}{5}$

$S = \{(z+\frac{4}{5}; z-\frac{3}{5}; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

22) $\begin{cases} 3\cdot\frac{x-5y}{3} = 3\cdot 4 + 3\cdot z \quad (1) \ \Big|\cdot 3 \\ 15\cdot\frac{3z-5x}{5} = 15\cdot z + 15\cdot\frac{x-2y}{3} \quad (2) \ \Big|\cdot 15 \\ 2\cdot 1 - 2\cdot\frac{x+y-z}{2} = -3\cdot 2 \quad (3) \ \Big|\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y = 12+3z \\ 9z-15x = 15z+5x-10y \\ 2-x-y+z = -6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-3z=12 \ (1) \\ 20x-10y+6z=0 \ (2) \ \Big| :2 \ (\Leftrightarrow 10x-5y+3z=0 \\ x+y-z=8 \ (3) \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 10 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5-15-30-15-3-50 = -108$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 60-120+0-120-36-0 = -216, \ x = \frac{-216}{-108} = 2$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & -3 \\ 10 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0+36-240-0-24+120 = -108, \ y = \frac{-108}{-108} = 1$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 12 \\ 10 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40+0+120+60+0+400 = 540, \ z = \frac{540}{-108} = -5$

$S = \{(2,1,-5)\}$

<u>Exercice 2</u>

1) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+mz=3 \\ x+my+3z=2 \end{cases}$

le nombre de solutions dépend de Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 9+m-2m+3-m^2-6 = -m^2-m+6$$

$\Delta = 0 \iff -m^2-m+6=0$, $\Delta' = 1+24=25$, $m' = \frac{1+5}{-2} = -3$, $m'' = \frac{1-5}{-2} = 2$

• pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{2;-3\}$: 1 solution (car $\Delta \neq 0$)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = \cancel{9}+2m-3m+6-m^2-\cancel{9} = -m^2-m+6$$

$$x = \frac{-m^2-m+6}{-m^2-m+6} = 1$$

pas demandé ici !

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9+m-4+3-2m-6 = -m+2$$

$$y = \frac{2-m}{\Delta} = \frac{2-m}{-(m+3)(m-2)} = \frac{\cancel{2-m}}{(m+3)(\cancel{2-m})} = \frac{1}{m+3}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 6+\cancel{3}+2m-\cancel{3}-3m-4 = 2-m$$

$$z = \frac{2-m}{(m+3)(2-m)} = \frac{1}{m+3}$$

$S = \left\{\left(1; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3}\right) \,/\, m \in \mathbb{R}\setminus\{2;-3\}\right\}$

• pour $m=2$, $\Delta = 0$ donc le système a 0 ou une infinité de solutions

$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x+3y+2z=3 & (2) \\ x+2y+3z=2 & (3) \end{cases}$

(1) : $z = x+y-1$

$\to (2)$: $2x+3y+2x+2y-2=3 \iff 4x+5y=5$ (4)

$\to (3)$: $x+2y+3x+3y-3=2 \iff 4x+5y=5$

$(4) \iff y = \frac{5-4x}{5} = 1-\frac{4}{5}x$

$z = x+1-\frac{4}{5}x-1 = \frac{1}{5}x$

$S = \left\{\left(x, 1-\frac{4}{5}x, \frac{1}{5}x\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ (une inf. de sol.)

• pour $m=-3$, $\Delta=0$ donc on a une inf. ou pas de sol.

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x+3y-3z=3 & (2) \\ x-3y+3z=2 & (3) \end{cases}$$

$(2)+(3)$: $3x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

$\rightarrow (1)$: $\frac{5}{3}+y-z=1 \Leftrightarrow y-z=-\frac{2}{3}$ $|\cdot 3 \Leftrightarrow 3y-3z=-2$] impossible.

$\rightarrow (2)$: $\frac{10}{3}+3y-3z=3 \Leftrightarrow 3y-3z=-\frac{1}{3}$

donc $S=\emptyset$

Conclusion :

Le système a : – 1 sol. pour $m\in\mathbb{R}\setminus\{2;-3\}$

– une inf. de sol. pour $m=2$

– pas de sol. pour $m=-3$

2) $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1 \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^3\cancel{+1}\cancel{-1}-\cancel{m}+\cancel{m}-m=m(m^2-1)=m(m-1)(m+1)$$

$\Delta=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=1$ ou $m=-1$

• pour $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;1;-1\}$: $\Delta\neq 0$ donc 1 solution

pas demandé !

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1\cancel{-1}+\cancel{m}\cancel{+1}-\cancel{m}=(m-1)(m+1)$$

$x=\frac{1}{m}$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^2\cancel{+1}\cancel{-1}-1+\cancel{m}-\cancel{m}=m^2-1$$

$y=\frac{1}{m}$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m^2\cancel{-1}\cancel{+1}+\cancel{m}-\cancel{m}-1=m^2-1$$

$y=\frac{1}{m}$

$S=\left\{\left(\frac{1}{m};\frac{1}{m};\frac{1}{m}\right) \mid m\in\mathbb{R}^*\setminus\{1;-1\}\right\}$

• pour $m=0$, $\Delta=0$ donc on une inf. de sol.

$$\begin{cases} y-z=1 & (1) \\ x-z=1 & (2) \\ -x+y=1 & (3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (2)+(3)$: $y-z=2$

impossible.

$S=\emptyset$

• pour $m=1$, $\Delta=0$ donc 0 ou une inf. de sol.

$$\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ x+y-z=1 & (2) \\ -x+y+z=1 & (3) \end{cases}$$

(1) = (2)

$(2)+(3)$: $2y=2 \Leftrightarrow \underline{y=1}$

$\rightarrow (1)$: $x+1-z=1 \Leftrightarrow x=z$

$\rightarrow (3)$: $-x+1+z=1 \Leftrightarrow x=z$

$S=\{(x,1,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

• pour $m=-1$, $\Delta=0$ donc 0 ou une inf. de sol.

$$\begin{cases} -x+y-z=1 & (1) \\ x-y-z=1 & (2) \\ -x+y-z=1 & (3) \end{cases}$$

(1) = (3)

$(1)+(2)$: $-2z=2 \Leftrightarrow \underline{z=-1}$

$\rightarrow (1)$: $-x+y+1=1 \Leftrightarrow x=y$

$\rightarrow (2)$: $x-y+1=1 \Leftrightarrow x=y$

$S=\{(x,x,-1) \mid x\in\mathbb{R}\}$

<u>Conclusion :</u>

Le système a : – 1 sol. pour $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;1;-1\}$

– 0 sol. pour $m=0$

– une infinité de sol. pour $m\in\{1;-1\}$

3) $$\begin{cases} 4x-my=3 & (1) \\ 2x+y=2 & (2) \\ x+y=5 & (3) \end{cases}$$ (3 éq. à 2 inconnues → pas de déterminant !)

$(2) \Leftrightarrow y=2-2x$

$\rightarrow (3)$: $x+2-2x=5 \Leftrightarrow -x=3 \Leftrightarrow x=-3$

$y=8$

Vérifions (1) : $-12-8m=3 \Leftrightarrow 8m=-15 \Leftrightarrow m=-\frac{15}{8}$

<u>Conclusion :</u>

Le système a : – 1 sol. $(S=\{(-3;8)\})$ pour $m=-\frac{15}{8}$

– 0 sol. pour $m\neq-\frac{15}{8}$

Exercice 3

1) $\begin{cases} (m+1)x - 2y = 4 & (1) \\ (m-1)x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m-1 & -3 \end{vmatrix} = -3m-3+2m-2 = -m-5$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -5$

1er cas : $m \neq -5$ ($\Delta \neq 0 \rightarrow 1$ sol)

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -12+10 = -2$, $x = \frac{-2}{-m-5} = \frac{2}{m+5}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} m+1 & 4 \\ m-1 & 5 \end{vmatrix} = 5m+5-4m+4 = m+9$, $y = \frac{m+9}{-m-5}$

$S = \left\{ \left(\frac{2}{m+5} ; -\frac{m+9}{m+5} \right) \right\}$

2e cas : $m = -5$ ($\Delta = 0 \rightarrow 0$ ou une inf. de sol.)

$\begin{cases} -4x-2y=4 & |:(-2) \\ -6x-3y=5 & |:(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ 2x+y=-\frac{5}{3} \end{cases}$ impossible. $S = \emptyset$

Résumé

- pour $m \neq -5$: $S = \left\{ \left(\frac{2}{m+5} ; -\frac{m+9}{m+5} \right) \right\}$
- pour $m = -5$: $S = \emptyset$

2) $\begin{cases} x+my+z = 2m \\ mx+y+z = 0 \\ x+my+(m+1)z = m \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = m+\cancel{1} + \cancel{m} + m^2 - \cancel{1} - \cancel{m} - m^2(m+1)$
$= \cancel{m^2} + m - m^3 - \cancel{m^2}$
$= m(1-m^2)$
$= m(1-m)(1+m)$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = -1$

1er cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; -1 ; 1\}$ ($\Delta \neq 0 \rightarrow$ sol. unique)

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & m & m+1 \end{vmatrix} = \cancel{2m^2} + 2m + m^2 + 0 - m - \cancel{2m^2} - 0$
$= m^2 + m = m(m+1)$, $x = \frac{1}{1-m}$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & 1 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = 0 + 2m + m^2 - 0 - m - 2m^3 - 2m^2 = -2m^3 - m^2 + m$$

$$= -m\underbrace{(2m^2 + m - 1)}_{\substack{\Delta = 1+8=9 \\ m' = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \\ m'' = \frac{-1-3}{4} = -1}}$$

$$= -m \cdot 2\left(m - \tfrac{1}{2}\right)(m+1)$$

$$= -m(2m-1)(m+1)$$

$$y = \frac{-(2m-1)}{1-m} = \frac{2m-1}{m-1}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & m & 2m \\ m & 1 & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m + 0 + 2m^3 - 2m - 0 - m^3 = m^3 - m = -\Delta$$

$$z = \frac{-\Delta}{\Delta} = -1$$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{1-m}, \frac{2m-1}{m-1}, -1\right)\right\}$$

<u>2^e cas</u> : $m = 0$

$$\begin{cases} x + z = 0 & (1) \\ y + z = 0 & (2) \\ x + z = 0 & (3) \end{cases} \quad (1) = (3)$$

(1) : $x = -z$

(2) : $y = -z$

$$S = \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

<u>3^e cas</u> : $m = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ \ldots \end{cases} \quad \text{impos.} \qquad S = \emptyset$$

<u>4^e cas</u> : $m = -1$

$$\begin{cases} x - y + z = -2 & (1) \\ -x + y + z = 0 & (2) \\ x - y = -1 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $2z = -2 \Leftrightarrow z = -1$

$\rightarrow (1)$: $x - y - 1 = -2 \Leftrightarrow x - y = -1$

$\rightarrow (2)$: $-x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x - y = -1$

$\rightarrow (3)$: $x - y = -1$

d'où $(1) = (2) = (3) \Leftrightarrow x = y - 1$

$$S = \{(y-1, y, -1) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

Résumé :

- pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{0;1;-1\}$: $S=\left\{\left(\frac{1}{m^2-m}, \frac{2m-1}{m-1}, -1\right)\right\}$
- pour $m=0$: $S=\{(-z,-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$
- pour $m=1$: $S=\emptyset$
- pour $m=-1$: $S=\{(y-1,y,-1) \mid y\in\mathbb{R}\}$

3) $\begin{cases} 2x+(m-2)y=m \\ 4x+my=10 \end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & m-2 \\ 4 & m \end{vmatrix}=2m-4m+8=-2m+8$

$\Delta=0 \Leftrightarrow m=4$

1^{er} cas : $m\neq 4$ ($\Delta\neq 0 \rightarrow 1$ sol.)

$\Delta_x=\begin{vmatrix} m & m-2 \\ 10 & m \end{vmatrix}=m^2-10m+20$ $\left(\Delta'=100-80=20,\ m'=\frac{10+\sqrt{20}}{2}\right.$
$\left. m''=\frac{10-\sqrt{20}}{2}\right)$

$x=\frac{m^2-10m+20}{8-2m}$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & m \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=20-4m$, $y=\frac{2(10-2m)}{2(4-m)}=\frac{2m-10}{m-4}$

2^e cas : $m=4$ ($\Delta=0$, 0 ou ∞ de sol.)

$\begin{cases} 2x+2y=4 & (1) \\ 4x+4y=10 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 2x=4-2y \Leftrightarrow x=2-y$

$\rightarrow (2)$ $8\cancel{-4y}\cancel{+4y}=10$ imposs. donc $S=\emptyset$

Résumé

- pour $m\neq 4$: $S=\left\{\left(\frac{m^2-10m+20}{8-2m}, \frac{2m-10}{m-4}\right)\right\}$
- pour $m=4$: $S=\emptyset$

4) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=m \end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^3+1+1-m-m-m=m^3-3m+2$

racine évid. : $m=1$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$\Delta=(m-1)(m^2+m-2)$
$=(m-1)^2(m+2)$

$\Delta=0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=-2$

1^er cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{1;-2\}$ $(\Delta \neq 0 \to 1 \text{ sol.})$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + m + 1 - m^2 - 1 - m = 0 \text{ , } \underline{x = 0}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 + m - 1 - m^2 - m = 0 \text{ , } \underline{y = 0}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 = \Delta$$

$$z = 1$$

$S = \{(0,0,1)\}$ (solution indépendante de m, très rare !)

2^e cas : $m = 1$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=1 \Leftrightarrow z=1-x-y$$

$S = \{(x, y, 1-x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (système doublement indéterminé)

3^e cas : $m = -2$

$$\begin{cases} -2x+y+z=1 & (1) \\ x-2y+z=1 & (2) \\ x+y-2z=-2 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow z = 1 + 2x - y$

$\to (2) : x - 2y + 1 + 2x - y = 1 \Leftrightarrow 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\to (3) : x + y - 2 - 4x + 2y = -2 \Leftrightarrow -3x + 3y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$z = 1 + 2x - x = 1 + x$

$S = \{(x, x, 1+x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

5) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+mz=2 \\ mx+m^2y+m^3z=m \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = \cancel{m^3} + m^2 + m^2 - m - \cancel{m^3} - m^3 = -m^3 + 2m^2 - m$$

$$= -m(m^2 - 2m + 1) = -m(m-1)^2$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$

1^er^ cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ $(\Delta \neq 0 \to 1$ sol.$)$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ m & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = \cancel{m^3} + m^2 + 2m^2 - m - \cancel{m^3} - 2m^3 = -2m^3 + 3m^2 - m$$

$$= -m(2m^2 - 3m + 1)$$

rac. év. : 1

	2	−3	1
1		2	−1
	2	−1	0

$$= -m(m-1)(2m-1)$$

$$x = \frac{\cancel{-m}\cancel{(m-1)}(2m-1)}{\cancel{-m}(m-1)^{\cancel{2}}} = \frac{2m-1}{m-1}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ m & m & m^3 \end{vmatrix} = 2m^3 \cancel{+ m^2} + m - 2m - \cancel{m^2} - m^3$$

$$= m^3 - m$$

$$= m(m^2 - 1)$$

$$= m(m-1)(m+1)$$

$$y = \frac{\cancel{m}\cancel{(m-1)}(m+1)}{-\cancel{m}(m-1)^{\cancel{2}}} = \frac{m+1}{1-m}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & m^2 & m \end{vmatrix} = m + \cancel{2}m + m^2 - \cancel{m} - 2m^2 - \cancel{m} = -m^2 + m$$

$$= -m(m-1)$$

$$z = \frac{\cancel{-m}\cancel{(m-1)}}{\cancel{-m}(m-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{m-1}$$

2^e^ cas : $m = 0$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow y = 2 - x$

$\to (1) : x + 2 - x + z = 1 \Leftrightarrow z = -1$

$S = \{(x, 2-x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

3^e^ cas : $m = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ \ldots \end{cases}$$ impossible donc $S = \emptyset$

Résumé : – pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ $S = \left\{\left(\frac{2m-1}{m-1}, \frac{1+m}{1-m}, \frac{1}{m-1}\right)\right\}$

– pour $m = 0$ $S = \{(x, 2-x, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

– pour $m = 1$ $S = \emptyset$

6) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2my+mz=0 \\ 3x+(m+2)y+(m+1)z=0 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2m & m \\ 3 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = 2m^2+\cancel{2m}+3m+\cancel{2m}+4-6m-m^2-\cancel{2m}-\cancel{2m}-2$$
$$= m^2-3m+2 \quad \left(\Delta'=9-8=1,\ m'=\frac{3+1}{2}=2,\ m''=\frac{3-1}{2}=1\right)$$
$$=(m-1)(m-2)$$

$\Delta=0 \Leftrightarrow m=1$ ou $m=2$

1er cas : $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ ($\Delta\neq0 \to 1$ sol)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2m & m \\ 0 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = 0,\ x=0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & m \\ 3 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = 0,\ y=0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2m & 0 \\ 3 & m+2 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ z=0$$

2e cas : $m=1$

$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ 2x+2y+z=0 & (2) \\ 3x+3y+2z=0 & (3) \end{cases}$

$(1): z=-x-y$

$\to(2): 2x+2y-x-y=0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

$\to(3): 3x+3y-2x-2y=0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

$z=-x+x=0$

$S=\{(x,-x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$

3e cas : $m=2$

$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ 2x+4y+2z=0 & (2) \\ 3x+4y+3z=0 & (3) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow z=-x-y$

$\to(2): 2x+4y-2x-2y=0 \Leftrightarrow 2y=0 \Leftrightarrow y=0$

$\to (3) : \cancel{3x} + 4y - \cancel{3x} - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$z = -x$

$S = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Résumé : – pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1 ; 2\}$: $S = \{(0,0,0)\}$

– pour $m = 1$: $S = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

– pour $m = 2$: $S = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

7) $\begin{cases} mx + y = 2 & (1) \\ x + 2y = m & (2) \\ 2x + my = 1 & (3) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow y = 2 - mx$

$\to (2) : x + 4 - 2mx = m \Leftrightarrow (1 - 2m)x = m - 4$

1er cas : $1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

$0 \cdot x = \frac{1}{2} - 4$ impossible donc $S = \emptyset$

2e cas : $m \neq \frac{1}{2}$

$x = \dfrac{m-4}{1-2m}$

$y = 2 - m\dfrac{m-4}{1-2m} = \dfrac{2 - 4m - m^2 + 4m}{1-2m} = \dfrac{2 - m^2}{1-2m}$

vérifions (3) :

$2 \cdot \dfrac{m-4}{1-2m} + m \cdot \dfrac{2-m^2}{1-2m} = 1 \quad \Big| \cdot (1-2m)$

$\Leftrightarrow 2m - 8 + 2m - m^3 = 1 - 2m$

$\Leftrightarrow -m^3 + 6m - 9 = 0$

rac. évid. : $m = -3$

	-1	0	6	-9
-3		3	-9	9
	-1	3	-3	0

$\Leftrightarrow (m+3)(-m^2 + 3m - 3) = 0$

$\Leftrightarrow m = -3$ ou $-m^2 + 3m - 3 = 0$, $\Delta' = 9 - 12 < 0$

$\Leftrightarrow m = -3$

– si $m = -3$: $x = \dfrac{-7}{7} = -1$, $y = \dfrac{-7}{7} = -1$

– si $m \neq -3$: $S = \emptyset$ car (3) pas vérifiée !

Résumé : – pour $m = -3$: $S = \{(-1, -1)\}$

– pour $m \neq -3$: $S = \emptyset$

8) $\begin{cases} mx+3y-mz=1 & (1) \\ 2x+my-z=m & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow z = 2x+my-m$

$\to (1): \; mx+3y-2mx-m^2y+m^2=1$

$\Leftrightarrow -mx+(3-m^2)y = 1-m^2$

– si $m=0$: $\quad 3y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}$

$z=2x$

$S=\left\{\left(x,\frac{1}{3},2x\right) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$

– si $m\neq 0$: $\quad mx=(3-m^2)y+m^2-1 \quad |: m\neq 0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{(3-m^2)y+m^2-1}{m}$

$z=2\cdot\dfrac{(3-m^2)y+m^2-1}{m}+my-m$

$=\dfrac{(6-2m^2)y+2m^2-2+m^2y-m^2}{m}$

$=\dfrac{(6-m^2)y+m^2-2}{m}$

$S=\left\{\left(\dfrac{(3-m^2)y+m^2-1}{m}, y, \dfrac{(6-m^2)y+m^2-2}{m}\right) \mid y\in\mathbb{R}\right\}$

Exercice 4 (toutes les équations représentent des droites dans le plan)

- Ex1, ⑤ : Les 3 équations représentent 3 droites qui se coupent en 1 point : $I(1,-1)$ (on peut dire aussi : qui sont concourantes en $I(1,-1)$)
- Ex1, ⑥ : Les 3 ép. représentent 3 droites qui n'ont aucun point en commun.
- Ex1, ⑭ : idem
- Ex1, ⑮ : même chose que ⑤
- Ex1, ⑲ : Les 3 équations représentent 3 droites qui sont concourantes en $I(3,1)$
- Ex1, ⑳ : même chose que ⑥
- Ex2, ③ : – pour $m=-\frac{15}{8}$: les 3 ép. représentent 3 droites concourantes en $I(-3,8)$
  – pour $m\neq-\frac{15}{8}$: les 3 ép. représentent 3 droites qui n'ont aucun point commun

- Ex3, ① : pour $m \neq -5$: Les 2 équations représentent 2 droites qui se coupent en $I\left(\frac{2}{m+5} ; -\frac{m+9}{m+5}\right)$

  pour $m = -5$: Les 2 éq. représentent 2 droites strictement parallèles

- Ex3, ③ : pour $m \neq 4$: Deux droites qui se coupent en $I\left(\frac{m^2-10m+20}{8-2m}, \frac{2m-10}{m-4}\right)$

  pour $m = 4$: Deux droites strictement parallèles

- Ex 3, ⑦ : pour $m = -3$: Les 3 éq. représentent 3 droites concourantes en $I(-1, -1)$

  pour $m \neq -3$: Les 3 droites n'ont aucun point commun

Exercice 22

Toutes les équations représentent des plans dans l'espace

- Ex1, ① : les 3 éq. représentent 3 plans qui se coupent au point $I\left(\frac{41}{17}, \frac{28}{17}, \frac{19}{17}\right)$

- Ex1, ② : posons $x = k$ alors S s'écrit : $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{4}{3} - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = \frac{7}{3} - 2k \end{cases}$

  donc S représente la droite d passant par $A\left(0, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ et de v. directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

  $(\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = d)$

- Ex1, ③ : Les 3 plans représentés par les 3 équations n'ont aucun point en commun.

  Analyse plus fine :

  v.n. de π_1 : $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  v.n. de π_2 : $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

  v.n. de π_3 : $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{n_2} = k\cdot\vec{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 4k \\ -6 = -k \\ 2 = -k \end{cases}$ imposs. donc $\pi_1 \nparallel \pi_2$

$\vec{n_3} = k\cdot\vec{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4k \\ -5 = -k \\ 3 = -k \end{cases}$ imposs. donc $\pi_1 \nparallel \pi_3$

$\vec{n_3} = k\cdot\vec{n_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3k \\ -5 = -6k \\ 3 = 2k \end{cases}$ imposs. donc $\pi_2 \nparallel \pi_3$

Conclusion : les 3 plans sont 2 à 2 sécants

- Ex 1, 4 : idem
  De plus : $\pi_1 = \pi_2$ et $\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset$
- Ex 1, 7 : Les 3 plans se coupent en $I(1,-1,2)$
- Ex 1, 8 : ——————————— $I(17,-119,-38)$
- Ex 1, 9 : posons $x_3 = k$, alors : $\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{13}{3}k \\ x_2 = -\frac{4}{3}k \\ x_3 = k \end{cases}$

  Les 3 plans se coupent en une droite d passant par $A(1,0,0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$
- Ex 1, 10 : Les 3 plans n'ont aucun point commun
  En analysant les vecteurs normaux, on peut montrer que les 3 plans sont deux à deux sécants
- Ex 1, 11 : Les 3 plans sont confondus
- Ex 1, 12 : posons $z = k$ alors : $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2}k \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}k \\ z = k \end{cases}$

  Les deux plans se coupent en une droite qui passe par $A(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Ex 1, (13) Les 2 équations représentent deux plans strictement parallèles
- Ex 1, (17) posons $z = k$ alors : $\begin{cases} x = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}k \\ y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}k \\ z = k \end{cases}$

  Les 3 plans se coupent suivant la droite qui passe par $A(\frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Ex 1, (18) posons $y = k$ alors $\begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = 2k \end{cases}$

  Les 3 plans se coupent en une droite qui passe par $A(1, 0, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Ex 1, (21) posons $z = k$ alors : $\begin{cases} x = \frac{4}{5} + k \\ y = -\frac{3}{5} + k \\ z = k \end{cases}$

  Les 2 plans sont sécants et leur intersection est la droite passant par $A(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Ex 1, (22) Les 3 plans sont concourants en $\underline{I}(2, 1, -5)$
- Ex 2, (1) * pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{2; -3\}$ les 3 plans se coupent au point $\underline{I}(1; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3})$

  * pour $m = 2$ posons $x = k$ alors : $\begin{cases} x = k \\ y = 1 - \frac{4}{5}k \\ z = \frac{1}{5}k \end{cases}$

  donc les 3 plans ont en commun la droite passant par $A(0, 1, 0)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

* pour $m=-3$ les 3 plans n'ont pas de point commun. On peut montrer qu'ils sont 2 à 2 sécants

• Ex 2, ② : * pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{0;1;-1\}$ les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{1}{m};\frac{1}{m};\frac{1}{m}\right)$

* pour $m=0$ les 3 plans n'ont aucun point commun (ils sont 2 à 2 sécants)

* pour $m=1$ posons $x=k$ alors : $\begin{cases} x=k \\ y=1 \\ z=k \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite d qui passe par $A(0,1,0)$ et de v.dir. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

* pour $m=-1$ posons $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=k \\ z=-1 \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $B(0,0,-1)$ et de v.dir. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

• Ex 3, ② * pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1;1\}$ les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{1}{1-m},\frac{2m-1}{m-1},-1\right)$

* pour $m=0$ posons $z=k$ alors $\begin{cases} x=-k \\ y=-k \\ z=k \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $O(0,0,0)$ et de v.dir $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

* pour $m=1$ les 3 plans n'ont pas de point commun. En considérant les v.nor. on peut montrer que $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ et π_3 est sécant à π_1 et π_2.

* pour $m=-1$ posons $y=k$ alors $\begin{cases} x=-1+k \\ y=k \\ z=-1 \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $A(-1,0,-1)$ et de v.dir $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

• Ex 3, ④ : * pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$ les 3 plans se coupent en un point $I(0,0,1)$

* pour $m=1$: $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

* pour $m=-2$ posons $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=k \\ z=1+k \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $A(0,0,1)$ et de v.dir. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

• Ex 3, ⑤ : * pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{2m-1}{m-1}, \frac{m+1}{1-m}, \frac{1}{m-1}\right)$

* pour $m=0$ posons $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=2-k \\ z=1 \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par $A(0,2,-1)$ et de v.dir. $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

* pour $m=-1$ les 3 plans n'ont pas de point commun (plus précisément $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ et $\pi_3 = \pi_1$)

• Ex 3, ⑥ : * pour $m \in \mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ les 3 plans se coupent en O.

* pour $m=1$ posons $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=-k \\ z=0 \end{cases}$

Les 3 plans se coupent en une droite passant par O et de v.dir. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

* pour $m=2$ posons $x=k$ alors $\begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=-k \end{cases}$

L'intersection des 3 plans est la droite passant par O et de v.dir. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

• Ex3, ⑧ * pour $m \neq 0$ posons $y = k$ alors

$$\begin{cases} x = \frac{m^2-1}{m} + \frac{3-m^2}{m} k \\ y = k \\ z = \frac{m^2-2}{m} + \frac{6-m^2}{m} k \end{cases}$$

Les 2 plans sont sécants et leur intersection est la droite passant par $A\left(\frac{m^2-1}{m}, 0, \frac{m^2-2}{m}\right)$ et de v. dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3-m^2}{m} \\ 1 \\ \frac{6-m^2}{m} \end{pmatrix}$

* pour $m = 0$ posons $x = k$ alors $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 2k \end{cases}$

Les 2 plans définissent la droite d passant par $B(0, \frac{1}{3}, 0)$ et de v. dir. $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$