3.3 Logarithmes quelconques

Nous avons vu que la fonction $\exp_a$, où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, définit une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

> ***Définition.*** La fonction $\log_a$, appelée fonction ***logarithme de base*** a, où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est la bijection réciproque de $\exp_a$.

Cas particuliers :

- Si $a = 10$ alors $\log_{10}$ est appelé ***logarithme décimal*** et noté $\log$. $\log$ est donc la bijection réciproque de $\exp_{10}$. Le logarithme décimal est utilisé en chimie pour exprimer le pH (voir manuel p. 47).
- Si $a = e$ (nombre d'Euler), alors $\log_e$ est appelé ***logarithme népérien*** et noté $\ln$. $\ln$ est donc la bijection réciproque de $\exp$.

Conséquences immédiates :

(1) $\operatorname{dom}\log_a = \mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{im}\log_a = \mathbb{R}$ (car $\operatorname{im}\exp_a = \mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{dom}\exp_a = \mathbb{R}$).

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\ a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$.

Exemples :

- $\log_2 256 = 8$ car $2^8 = 256$;
- $\log_3 81 = 4$ car $3^4 = 81$;
- $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ car $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$;
- $\log 0,001 = -3$ car $10^{-3} = 0,001$;
- $\ln 5 \simeq 1{,}6094$ car $e^{1{,}6094} \simeq 5$;

On peut donc retenir que $\log_a x$ est « ***l'exposant qu'il faut donner à*** a ***pour obtenir*** x ».

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \log_a(a^x) = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ a^{\log_a(x)} = x$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\exp_a"] \arrow[d, equal] & a^x \arrow[d, equal] \\ \log_a y & y \arrow[l, "\log_a"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\log_a"] \arrow[d, equal] & \log_a x \arrow[d, equal] \\ a^y & y \arrow[l, "\exp_a"] \end{tikzcd}$$

Exemples :

• $\log_6 6^4 = 4$	$6^{\log_6 4} = 4$
• $\log_2 2^{-9} = -9$	$2^{\log_2 9} = 9$ $(-9 \notin \operatorname{dom}\log_2)$
• $\ln e^3 = 3$	$e^{\ln 3} = 3$
• $\log 10^6 = 6$	$10^{\log 6} = 6$
• $\log_{0,5} 8 = \log_{0,5} 0,5^{-3} = -3$	$0,5^{\log_{0,5} 8} = 8$

(4) $\log_a$ est ***strictement monotone*** et a ***même sens de variation*** que $\exp_a$. Plus précisément :

- si $a > 1$ alors $\log_a$ est str. croissante ;
- si $0 < a < 1$ alors $\log_a$ est str. décroissante.

(5) $\forall x, y > 0$:

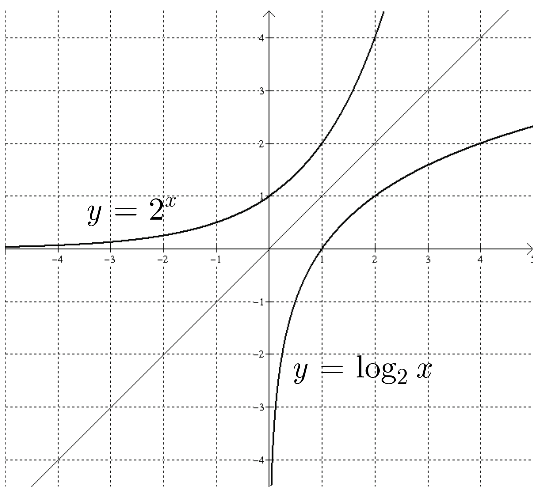
- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$, lorsque $a > 1$
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$, lorsque $0 < a < 1$

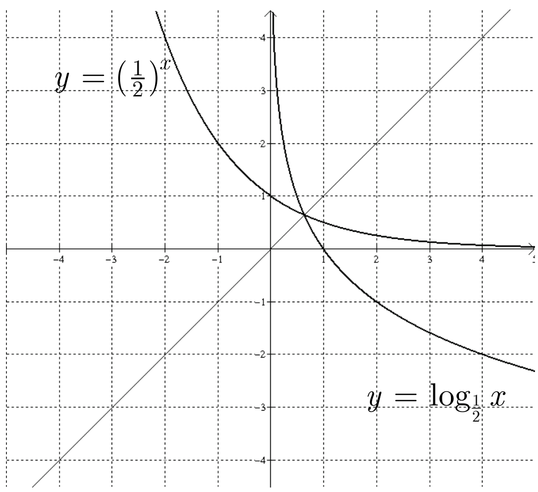
C'est une conséquence immédiate de la stricte croissance respectivement décroissance de $\log_a$.

Exemples : $\forall x > 0$:

- $\log_2 x < 3 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 2^3 \Leftrightarrow x < 8$ $\qquad S =]0,8[$;
- $\log x \geq -2 \Leftrightarrow \log x \geq \log 10^{-2} \Leftrightarrow x \geq 10^{-2}$ $\qquad S = [10^{-2}, +\infty[$;
- $\ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$; $\qquad S =]0, e^2[$
- $\log_{\frac{1}{3}} x > -5 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < 243$; $\qquad S =]0,243[$

(6) Les graphes de $\log_a$ et $\exp_a$ sont ***symétriques*** par rapport à la 1re bissectrice dans un repère orthonormé.





(7) De la symétrie des deux graphes de $\log_a$ et $\exp_a$ on déduit aussi que :

- si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$;
- si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$;
- $\mathcal{G}_{\log_a}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(8) Comme $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, on a : $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$. En d'autres termes, le graphe de $\log_a$ comprend les points $(1,0)$ et $(a,1)$.

Nous passons maintenant en revue les propriétés moins évidentes des fonctions logarithmes de base quelconque.

1) Propriété fondamentale de $\log_a$:

$$(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}),\ (\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Remarque. Cette propriété est fondamentale parce qu'elle « ***caractérise*** » les fonctions logarithmes. En d'autres termes, il n'y a pas d'autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ qui transforme la multiplication en l'addition. Nous admettons ce fait.

Démonstration. La formule résulte du fait que $\log_a$ est la bijection réciproque de $\exp_a$ et de la ***propriété fondamentale*** de $\exp_a$. En effet, soit x et y deux réels strictement positifs et $x' = \log_a x$ et $y' = \log_a y$. Or :

$$\begin{cases} x' = \log_a x \Leftrightarrow a^{x'} = x \\ y' = \log_a y \Leftrightarrow a^{y'} = y \end{cases}$$

Comme $a^{x'+y'} = a^{x'} \cdot a^{y'} = xy$, on en déduit que :

$$\log_a(xy) = x' + y' = \log_a x + \log_a y.$$

2) Autres propriétés :

$(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}),\ (\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*)$

a) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$;

b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

c) $\log_a x^r = r\log_a x$, avec $r \in \mathbb{R}$;

Démonstration.

a) Dans la propriété fondamentale, on remplace y par $\frac{1}{x}$:

$$\log_a\left(x \cdot \tfrac{1}{x}\right) = \log_a x + \log_a \tfrac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \log_a 1 = \log_a x + \log_a \tfrac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \log_a x + \log_a \tfrac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \log_a \tfrac{1}{x} = -\log_a x$$

b) On utilise la propriété fondamentale et la propriété précédente :

$$\log_a\left(\tfrac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \tfrac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a \tfrac{1}{y} = \log_a x - \log_a y$$

c) Si $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}\log_a x^r = y &\Leftrightarrow x^r = a^y \\ &\Leftrightarrow x = a^{\frac{y}{r}} \\ &\Leftrightarrow \tfrac{y}{r} = \log_a x \\ &\Leftrightarrow y = r\log_a x\end{aligned}$$

Si $r = 0$, la formule est trivialement vérifiée :

$$\log_a x^0 = \log_a 1 = 0 = 0 \cdot \log_a x$$

3) Dérivées de $\exp_a$ *et* $\log_a$

Dérivée de $\exp_a$: $(\forall x \in \mathbb{R})\quad (a^x)' = a^x \ln a$ et $(e^x)' = e^x$.

Démonstration. On a déjà établi le cas particulier $(e^x)' = e^x$. De plus on sait que la dérivée de $\exp_a$ est donnée par la formule :

$$(a^x)' = ka^x \text{, où } k = \exp_a'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Pour déterminer la valeur de k nous nous ramenons au cas particulier $a = e$:

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{x \cdot \ln a}\right)' = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

Donc $k = \ln a$ et la formule est démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la dérivée de $\log_a$:

Dérivée de $\log_a$: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ \log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration. Calculons d'abord la dérivée de ln. On sait que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \qquad \exp(\ln x) = x$$

En dérivant les deux membres on obtient :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \qquad \exp(\ln x) \cdot \ln' x = 1 \Leftrightarrow x \cdot \ln' x = 1 \Leftrightarrow \ln' x = \frac{1}{x}$$

Par conséquent :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \qquad \left(\log_a\right)'\left(x\right) = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$$