Détermination de la primitive d'une fonction trigonométrique à l'aide de la V200

1. Formules élémentaires

Dans les formules suivantes, $u = u(x)$ est une fonction de x.

- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + k$

  $\int u' \sin u \,\mathrm{d}x = -\cos u + k$
- $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + k$

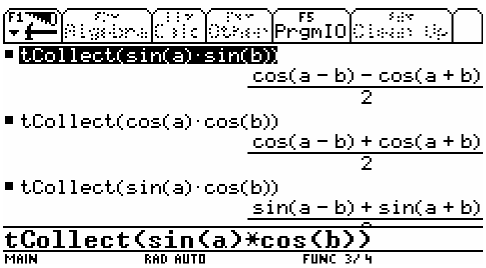
  $\int u' \cos u \,\mathrm{d}x = \sin u + k$
- $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de cos, c.-à-d. aucun réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  $\int u' \tan u \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos u| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de cos u.
- $\int \cot x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de sin, c.-à-d. aucun réel de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

  $\int u' \cot u \,\mathrm{d}x = \ln|\sin u| + k$, sur un intervalle ne contenant aucune racine de sin u.

2. Formules de linéarisation : primitives de polynômes trigonométriques

Les formules de linéarisation permettent de transformer un ***produit*** de fonctions trigonométriques (sin ou cos) en une ***somme*** de termes simples. Elles sont difficiles à mémoriser, mais peuvent être retrouvées à l'aide de la V200 via la commande **tcollect** :



Donc :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

Le programme actuel prévoit que toute linéarisation de fonctions trigonométriques peut être effectué à l'aide de la V200 !

Exemples :

(1) $$\int \sin 3x \cos 4x \,\mathrm{d}x \underset{V200}{=} \frac{1}{2}\int (\sin 7x - \sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + k$$

(2) $$\int \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$
$$\underset{V200}{=} \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(6x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(4x + \frac{5\pi}{12}\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{12}\cos\left(6x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{8}\cos\left(4x + \frac{5\pi}{12}\right) + k$$

(3) $$\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x \underset{V200}{=} \frac{1}{8}\int (\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + k$$

3. Cas particulier : $\int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$, où $m, n \in \mathbb{N}$

Lorsque m et n sont tous les 2 pairs, on doit encore linéariser l'expression à l'aide de la commande **tcollect** (voir exemple 3 ci-dessus : $m = 0$, $n = 4$). Lorsque l'un au moins des deux exposants est ***impair***, on peut aussi calculer la primitive ***par substitution***. Plus précisément :

- Si m est impair, on fait le changement de variables : $y = \cos x$.
- Si n est impair, on fait le changement de variables : $y = \sin x$.

Exemples :

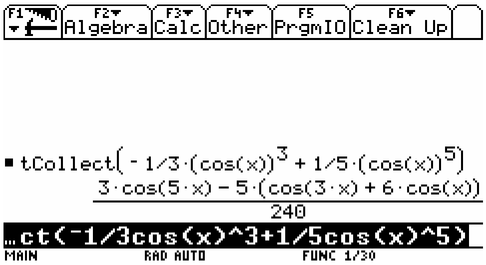
(1) $$\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$= \int \sin x\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$= -\int \left(1 - y^2\right)y^2 \,\mathrm{d}y$$
$$= -\int \left(y^2 - y^4\right)\mathrm{d}y$$
$$= -\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + k$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + k$$

Changement de variables :
$$\begin{cases} y = \cos x \\ \mathrm{d}y = -\sin x \,\mathrm{dx} \end{cases}$$

Bien sûr, on peut aussi linéariser d'abord :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \underset{V200}{=} -\frac{1}{16}\int (\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{80}\cos 5x - \frac{1}{48}\cos 3x - \frac{1}{8}\cos x + k$$

Pour comparer les résultats obtenus par les deux méthodes, on linéarise le premier avec la V200 :



Remarque : Avec l'introduction de la V200, la méthode de substitution exposée ci-dessus perd en fait son intérêt …

(2)
$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x &= \int \cos^4 x \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1-y^2\right)^2 \mathrm{d}y \\ &= \int \left(1-2y^2+y^4\right)\mathrm{d}y \\ &= y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5+k \\ &= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+k\end{aligned}$$

Changement de variables :

$$\begin{cases} y = \sin x \\ \mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{dx} \end{cases}$$

4. Primitives de fractions rationnelles en $\sin x$ **et** $\cos x$

Soit $R(\sin x, \cos x)$ une fraction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. On obtient une primitive de cette fonction via le changement de variables :

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \tan\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{Arctan} t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array}}$$

et les deux formules :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

En effet :

$$\begin{cases} \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}-1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}-1 = \dfrac{2}{1+t^2}-1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Ainsi on se ramène au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle :

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$$

Exemples : Soit $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$.

Le domaine de continuité de f étant $\mathbb{R}\setminus\{k\cdot 2\pi\,/\,k\in\mathbb{R}\}$, on peut rechercher une primitive de f sur tout intervalle de la forme $]k\cdot 2\pi,(k+1)\cdot 2\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{(1+t)^2}{t^2\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{V200}{=} \int \frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\ln t-\frac{1}{t}-\ln\left(1+t^2\right)+k \\
&= \ln\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)-\frac{1}{t}+k \\
&= \ln\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)-\cot\left(\frac{x}{2}\right)+k
\end{aligned}$$

Notons que la C.E. pour cette expression est $\sin\frac{x}{2}\neq 0$ et donc que la primitive est bien définie sur un intervalle de la forme $]k\cdot 2\pi,(k+1)\cdot 2\pi[$, $k\in\mathbb{Z}$. Il faut toujours comparer les domaines de l'intégrand et de la primitive comme le montre l'exemple suivant :

Soit $g(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$.

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, il existe une primitive G sur $\mathbb{R}$. La substitution $t=\tan\dfrac{x}{2}$ donne :

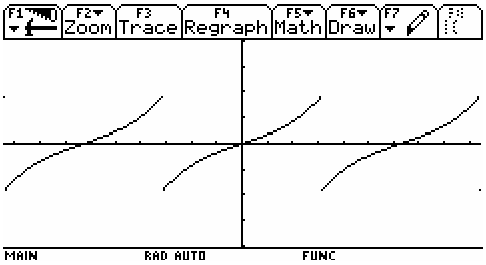
$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+k \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+k
\end{aligned}$$

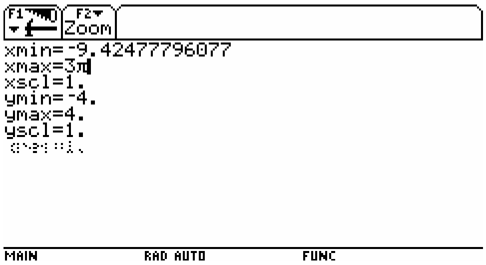
En choisissant $k=0$, on obtient :

$$G_0(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Or, cette fonction est seulement définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi + n \cdot 2\pi \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$. Ceci n'est pas surprenant, étant donné que la substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ n'est continue et strictement monotone que si l'on prend x dans un intervalle de départ de la forme $I_n =]-\pi + n \cdot 2\pi, \pi + n \cdot 2\pi[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Voici le graphe de G_0 :





G_0 présente des sauts d'amplitude $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ en chaque réel de la forme $\pi + n \cdot 2\pi$. En effet, elle est périodique de période 2π et :

$$\lim_{x \to \pi^-} G_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \text{ et } \lim_{x \to -\pi^+} G_0(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pour obtenir une primitive de g, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut :

a) déterminer des constantes d'intégration qui diffèrent d'un intervalle I_n à l'autre et qui sont telles que les différents morceaux du graphe s'enchaînent continûment: $G_n(x) = G_0(x) + k_n$ sur I_n. Le choix le plus naturel est bien sûr :

$$\boxed{k_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}, n \in \mathbb{Z}} ;$$

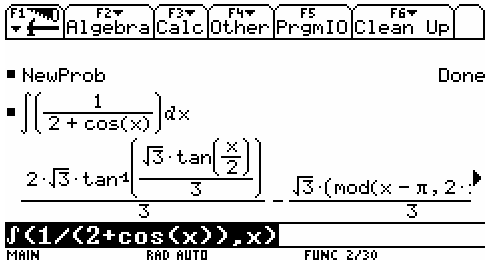
b) « recoller » les différents morceaux :

$$G(x) = \begin{cases} \cdots & \cdots \\ G_{-2}(x) = G_0(x) - \dfrac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]-5\pi, -3\pi[\\ G_{-1}(x) = G_0(x) - \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]-3\pi, -\pi[\\ G_0(x) & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ G_1(x) = G_0(x) + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]\pi, 3\pi[\\ G_{-2}(x) = G_0(x) + \dfrac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{si } x \in]3\pi, 5\pi[\\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

c) prolonger G par continuité en tout réel de la forme $\pi + n \cdot 2\pi$.

La V200 procède de cette façon lorsqu'on lui demande de calculer une primitive de g. Elle donne le résultat suivant :

$$\tilde{G}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x - (x - \pi) \bmod 2\pi}{\sqrt{3}}$$



Pour le comprendre, il faut commencer par étendre la division euclidienne à des dividendes et diviseurs réels :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}_+^*)(\exists! q \in \mathbb{Z})(\exists! r \in \mathbb{R}) / a = bq + r \ \text{ et } \ 0 \leq r < b\,.$$

En effet, il suffit de choisir $q = \mathrm{Ent}\left(\frac{a}{b}\right)$ et $r = a - bq$. Dans cette division euclidienne, on note encore $r = a \bmod b$. Donc :

$$a \bmod b = a - b\mathrm{Ent}\left(\tfrac{a}{b}\right).$$

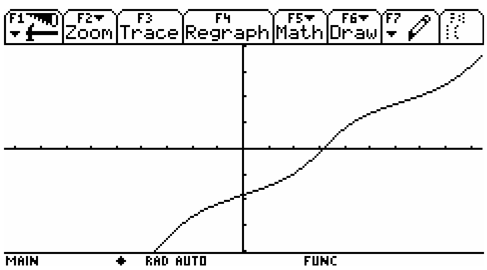
La fonction mod est utilisée par la V200 pour exprimer la « constante d'intégration variable » :

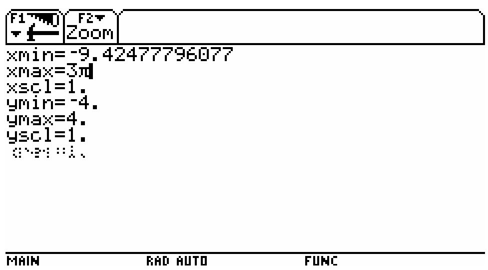
$$\begin{aligned} \frac{x - (x - \pi) \bmod 2\pi}{\sqrt{3}} &= \frac{x - (x - \pi) + 2\pi\mathrm{Ent}\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right)}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi + 2\pi\mathrm{Ent}\left(\frac{x-\pi}{2\pi}\right)}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que la « constante d'intégration variable » choisie par la V200 diffère de la nôtre de $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. En d'autres termes, si $x \in I_n$, alors :

$$\boxed{\frac{x - (x - \pi) \bmod 2\pi}{\sqrt{3}} = k_n - \frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Voici finalement le graphe de $\tilde{G}$, obtenue avec la V200 :





Lorsque $R(-u,v) = -R(u,v)$, c.-à-d. R est **impaire en** u, on peut aussi faire la substitution $t = \cos x$. De même, lorsque $R(u,-v) = -R(u,v)$, c.-à-d. R est **impaire en** v, on peut faire la substitution $t = \sin x$.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\,(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,(1+t)} \\
&\underset{V200}{=} -\int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\ln(1+t) + \ln|t| + \frac{1}{t} + k \\
&= \ln\frac{|t|}{1+t} + \frac{1}{t} + k \\
&= \ln\frac{|\cos x|}{1+\cos x} + \frac{1}{\cos x} + k
\end{aligned}$$

$$R(u,v) = \frac{u}{v^2\,(1+v)}\ ; \quad R(-u,v) = -R(u,v) \quad \begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

Cette expression est valable sur un intervalle ne contenant aucune racine de $\cos x$, ni de $1+\cos x$ (mêmes C.E. pour l'intégrand et la primitive trouvée).

Lorsque $R(-u,-v) = R(u,v)$, c.-à-d. R est **paire en** u **et en** v, on peut aussi utiliser la substitution :

$$\begin{cases} t = \tan x \Leftrightarrow x = \operatorname{Arctan} t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

et les deux formules : $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$; $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

Exemple : Soit a et b deux réels > 0.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \\
&= \int \frac{1}{a^2/\left(1+t^2\right) + b^2t^2/\left(1+t^2\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + b^2t^2} \\
&= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\int \frac{\frac{b}{a}\,\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{bt}{a}\right)^2} \\
&= \frac{1}{ab}\operatorname{Arctan}\left(\frac{bt}{a}\right) + k \\
&= \frac{1}{ab}\operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + k
\end{aligned}$$

On rencontre ici le même problème que pour la substitution $t = \tan\frac{x}{2}$: l'intégrand et la primitive ont des domaines différents. Pour déterminer l'expression d'une primitive continue sur $\mathbb{R}$, il faut donc à nouveau choisir une constante d'intégration variant d'un intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ à l'autre. Les détails sont laissés au lecteur … ou à la V200 !