Détermination de la primitive d'une fraction rationnelle à l'aide de la V200

Rappelons qu'une ***fraction rationnelle*** est une fonction du type :

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}.$$

où le numérateur n et le dénominateur d sont deux ***fonctions polynômes***. Pour déterminer une primitive d'une telle fonction f on procède par étapes :

1. Si $\deg n \geq \deg d$, on commence par effectuer la ***division euclidienne*** de n par d. On obtient :

$$\begin{aligned} &n(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \\ \Leftrightarrow\ &f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \qquad \text{avec} \quad \deg r < \deg d \end{aligned}$$

Le polynôme q s'intègre immédiatement. Il reste donc à étudier le cas où le degré du numérateur $r(x)$ est $<$ degré du dénominateur $d(x)$.

2. La fraction rationnelle $r(x)/d(x)$ doit être décomposée en une ***somme d'« éléments simples »*** qui dépendent de la ***factorisation*** de $d(x)$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, tout polynôme se factorise en facteurs du 1er et/ou du 2e degré. Plus précisément :

$$d(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_m)^{k_m} \cdot \left(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2+\beta_p x+\gamma_p\right)^{l_p}$$

où c est une constante, les α_i sont les ***racines réelles*** de $d(x)$ de ***multiplicités*** respectives k_i alors que les ***facteurs quadratiques*** $x^2+\beta x+\gamma$ n'admettent pas de racine réelle (sinon on pourrait les décomposer encore en facteurs du 1er degré).

a) A chaque facteur $(x-\alpha)^k$ correspondent les ***éléments simples du 1er type*** :

$$\frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}.$$

b) A chaque facteur $\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^l$ correspondent les ***éléments simples du 2e type*** :

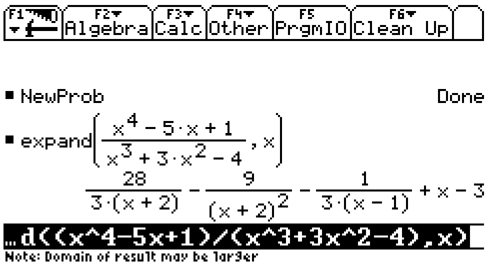
$$\frac{b_1 x + c_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{b_2 x + c_2}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^2} + \ldots + \frac{b_l x + c_l}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^l}.$$

3. Les constantes inconnues a_i, b_i et c_i peuvent aussi être calculées par la ***méthode des coefficients*** indéterminés. Dans les exemples qui suivent cette étape est effectuée à l'aide d'une calculatrice TI V200, dotée d'un puissant système de calcul formel (CAS).

Exemples :

a) Soit $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \dfrac{n(x)}{d(x)}$.

La commande **expand(f(x),x)** permet de décomposer $f(x)$ en ***éléments simples*** :



Donc :

$$f(x) = x - 3 - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{28}{3(x+2)} - \frac{9}{(x+2)^2}.$$

Le terme $x - 3$ est le quotient de la division euclidienne de $n(x)$ par $d(x)$. Les différents éléments simples, tous du 1[er] type ici, proviennent de la factorisation de $d(x)$:

$$d(x) = (x-1)(x+2)^2.$$

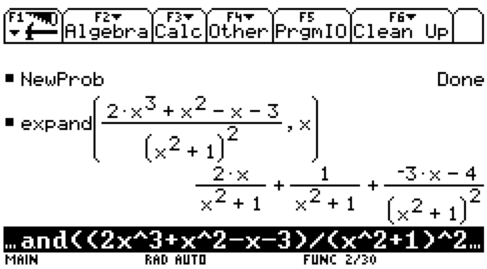
Par conséquent :

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{28}{3}\ln|x+2| + \frac{9}{x+2} + k,$$

formule valable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 1, ni -2.

b) Etudions maintenant un exemple où interviennent des éléments simples du 2[e] type. Soit

$$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{\left(x^2+1\right)^2}.$$



D'où :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{3x}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{4}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Ces éléments simples proviennent évidemment du fait que x^2+1 n'admet pas de racine réelle. Les trois premiers termes s'intègrent immédiatement :

- $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln\left(x^2+1\right) + k_1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Arctan} x + k_2$
- $\displaystyle-\int \frac{3x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \frac{3}{2\left(x^2+1\right)} + k_3$

Le dernier terme, et plus généralement tout élément simple de la forme $c/\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^\nu$ (avec $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$), s'intègre à l'aide d'une ***formule de récurrence*** incontournable :

> ***Proposition*** : Soit $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Alors :
>
> $$\begin{cases} I_1 = \operatorname{Arctan} x + k \\ I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n, \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration : On intègre par parties dans I_n :

$$u(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n} \qquad v(x) = x$$

$$u'(x) = -\frac{2nx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} \qquad v'(x) = 1$$

Donc : $\displaystyle I_n = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \int \frac{2nx^2}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}\,dx$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \int \frac{2n\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}\,dx - \int \frac{2n}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}\,dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2nI_{n+1} = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + (2n-1)I_n$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

Par consequent :

- $\displaystyle\int \frac{-4}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = -4I_2 = -4\left(\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}I_1\right) = \frac{-2x}{x^2+1} - 2\operatorname{Arctan} x + k_4$

Finalement :

$$\int g(x)\,dx = \ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{Arctan} x + \frac{3}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{-2x}{x^2+1} - 2\operatorname{Arctan} x + k$$

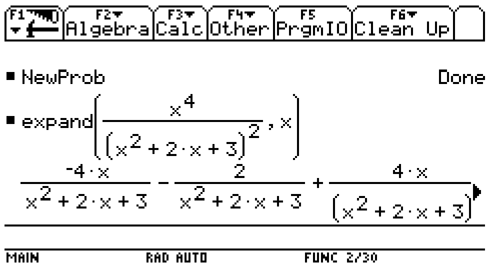
$$= \ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{Arctan} x - \frac{4x-3}{2\left(x^2+1\right)} + k$$

c) Que faire lorsque le dénominateur admet des facteurs quadratiques plus compliqués ? Nous allons étudier un tel exemple maintenant. Soit

$$h(x) = \frac{x^4}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$

La V200 donne la décomposition en éléments simples :

$$h(x) = 1 - \frac{4x+2}{x^2+2x+3} + \frac{4x-3}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$



Le <u>premier terme</u> est évident :

- $\int 1dx = x + k_1$

Le <u>second terme</u> s'intègre en 2 étapes :

- $$-\int \frac{4x+2}{x^2+2x+3}dx = \underbrace{-\int \frac{4x+4}{x^2+2x+3}dx}_{\substack{\text{on fait apparaitre un multiple}\\ \text{de la dérivée du dénominateur}\\ \text{au numérateur } (\to\, k\cdot u'/u)}} + \int \frac{2}{x^2+2x+3}dx$$

$$= -2\ln\left(x^2+2x+3\right) + \int \frac{2}{x^2+2x+3}dx$$

Le trinôme x^2+2x+3 ne se factorise pas puisque $\Delta = 4-12<0$. Il faut alors l'écrire sous forme canonique, c'est-à-dire en l'occurrence comme ***somme de deux carrés*** :

$$x^2+2x+3 = (x+2x+1)+2 = (x+1)^2+2.$$

En faisant le changement de variables

$$x+1 = \sqrt{2}t \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt,$$

dans la deuxième intégrale, on obtient alors :

- $$2\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \underset{x+1=\sqrt{2}t}{=} 2\sqrt{2}\int \frac{dt}{2t^2+2}$$
$$= \sqrt{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\, t + k_2$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k_2$$

Pour intégrer le troisième terme, on utilise les mêmes idées avec en plus la formule de récurrence entre I_2 et I_1 :

- $$\int \frac{4x-3}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = \int \frac{4x+4}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx - \int \frac{7}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - 7\int \frac{1}{\left((x+1)^2+2\right)^2}dx$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - 7\sqrt{2}\int \frac{1}{\left(2t^2+2\right)^2}dt \quad (x+1=\sqrt{2}t)$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4}I_2$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4}\left(\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}I_1\right)$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4}\left(\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, t\right) + k_3$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{x^2+2x+3} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + k_3$$
$$= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7(x+1)}{4\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{7\sqrt{2}}{8}\mathrm{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k_3$$

En additionnant les différents résultats, on obtient finalement :

$$\int h(x)\,dx = x - \frac{7x+15}{4\left(x^2+2x+3\right)} - 2\ln\left(x^2+2x+3\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) Un dernier exemple avec au dénominateur un facteur quadratique le plus général possible (et un numérateur du 1^er^ degré afin de ne pas obtenir trop de termes ...) :

$$k(x) = \frac{x+1}{\left(2x^2-x+3\right)^3}$$

On vérifie aisément que le trinôme $p(x) = 2x^2 - x + 3$ n'a pas de racine. On utilisera sa forme canonique :

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\left(x^2 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{3}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2\cdot\tfrac{x}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{23}{16}\right) \\ &= 2\left[\left(x - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{23}{16}\right] \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables :

$$x - \tfrac{1}{4} = \tfrac{\sqrt{23}}{4}t \Leftrightarrow t = \tfrac{4x-1}{\sqrt{23}},\ dx = \tfrac{\sqrt{23}}{4}dt$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int k(x)\,dx &= \int \frac{x+1}{\left(2x^2 - x + 3\right)^3}\,dx \\ &= \int \frac{x+1}{8\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]^3}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{23}}{32}\int \frac{\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}t}{\left(\frac{23}{16}t^2 + \frac{23}{16}\right)^3}\,dt \\ &= \frac{32\sqrt{23}}{23^3}\int \frac{5 + \sqrt{23}t}{\left(t^2+1\right)^3}\,dt \\ &= \frac{32\sqrt{23}}{23^3}\int \frac{5}{\left(t^2+1\right)^3}\,dt + \frac{16}{23^2}\int \frac{2t}{\left(t^2+1\right)^3}\,dt \\ &= \frac{160\sqrt{23}}{23^3}I_3 - \frac{8}{23^2\left(t^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

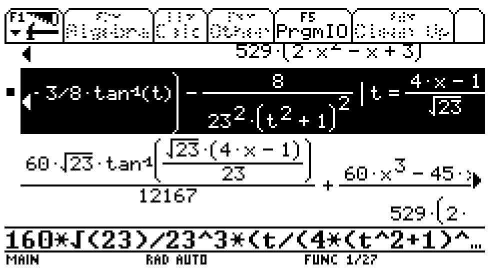
Or,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}I_2 \\ &= \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}I_1\right) \\ &= \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3t}{8\left(t^2+1\right)} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctan} t + k_1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int k(x)\,dx = \frac{160\sqrt{23}}{23^3}\left(\frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3t}{8\left(t^2+1\right)} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctan} t\right) - \frac{8}{23^2\left(t^2+1\right)^2} + k$$

Pour repasser à la variable x, on peut utiliser la commande « tel que » de la V200 :



On obtient finalement :

$$\int k(x)\,dx \underset{V200}{=} \frac{60\sqrt{23}}{12167}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{23}}\right)+\frac{60x^3-45x^2+155x-103}{529\left(2x^2-x+3\right)^2}+k$$