

Détermination de la primitive d'une fraction rationnelle à l'aide de la V200

Rappelons qu'une ***fraction rationnelle*** est une fonction du type :

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}.$$

où le numérateur n et le dénominateur d sont deux ***fonctions polynômes***.

1. Si $\deg n \geq \deg d$, on commence par effectuer la ***division euclidienne*** de n par d . On obtient :

$$\begin{aligned} n(x) &= d(x) \cdot q(x) + r(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \end{aligned}$$

avec $\deg r < \deg d$. Le polynôme q s'intègre immédiatement.

2. La fraction rationnelle $r(x)/d(x)$ doit être décomposée en une ***somme d'« éléments simples »*** qui dépendent de la ***factorisation*** de $d(x)$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre on a :

$$d(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)^{k_m} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + \beta_p x + \gamma_p)^{l_p}$$

où c est une constante, les α_i sont les racines réelles de $d(x)$ de multiplicités respectives k_i alors que les facteurs quadratiques $x^2 + \beta x + \gamma$ n'admettent pas de racine réelle.

a) A chaque facteur $(x - \alpha)^k$ correspondent les ***éléments simples du 1^{er} type*** :

$$\frac{a_1}{x - \alpha} + \frac{a_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{a_k}{(x - \alpha)^k}.$$

b) A chaque facteur $(x^2 + \beta x + \gamma)^l$ correspondent les ***éléments simples du 2^e type*** :

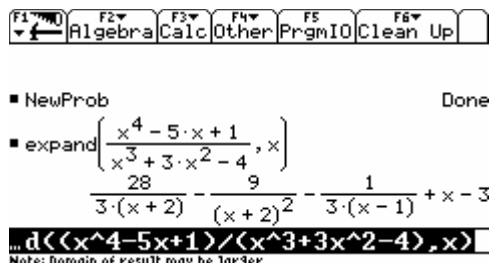
$$\frac{b_1 x + c_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \dots + \frac{b_l x + c_l}{(x^2 + \beta x + \gamma)^l}.$$

3. La décomposition de $r(x)/d(x)$ en éléments simples se fait à l'aide de la commande **expand** de la V200. (Les constantes inconnues a_i , b_i et c_i peuvent aussi être calculées à la main par la ***méthode des coefficients indéterminés***, mais ce calcul est en général long et fastidieux !) Les primitives des éléments simples seront étudiées dans les exemples sur les pages suivantes.

Exemples :

a) Soit $f(x) = \frac{x^4 - 5x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{n(x)}{d(x)}$.

La commande **expand(f(x),x)** permet de décomposer $f(x)$ en *éléments simples* :



Donc :

$$f(x) = x - 3 - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{28}{3(x+2)} - \frac{9}{(x+2)^2}.$$

Le terme $x - 3$ est le quotient de la division euclidienne de $n(x)$ par $d(x)$.

Les différents éléments simples, tous du 1^{er} type ici, proviennent de la factorisation de $d(x)$:

$$d(x) = (x-1)(x+2)^2.$$

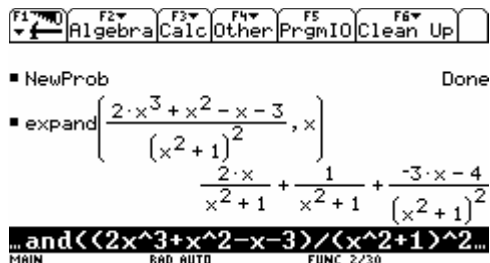
Par conséquent :

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{28}{3} \ln|x+2| + \frac{9}{x+2} + k,$$

formule valable sur un intervalle de \mathbb{R} ne contenant ni 1, ni -2 .

b) Etudions maintenant un exemple où interviennent des éléments simples du 2^e type. Soit

$$g(x) = \frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$



D'où :

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{3x}{(x^2+1)^2} - \frac{4}{(x^2+1)^2}.$$

Ces éléments simples proviennent évidemment du fait que $x^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle. Les trois premiers termes s'intègrent immédiatement :

- $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + k_1$
- $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \text{Arctan } x + k_2$
- $-\int \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{3}{2(x^2 + 1)} + k_3$

Le dernier terme, et plus généralement tout élément simple de la forme $c/(x^2 + \beta x + \gamma)^\nu$ (avec $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$), s'intègre à l'aide d'une **formule de récurrence** incontournable :

Proposition : Soit $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Alors :

$$\begin{cases} I_1 = \text{Arctan } x + k \\ I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration : On intègre par parties dans I_n :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(x^2 + 1)^n} & v(x) &= x \\ u'(x) &= -\frac{2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } I_n &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ \Leftrightarrow I_n &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \int \frac{2n(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx - \int \frac{2n}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx \\ \Leftrightarrow I_n &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \\ \Leftrightarrow 2nI_{n+1} &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n-1)I_n \\ \Leftrightarrow I_{n+1} &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \quad (\text{C.Q.F.D.}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\bullet \int \frac{-4}{(x^2 + 1)^2} dx = -4I_2 = -4 \left(\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} I_1 \right) = \frac{-2x}{x^2 + 1} - 2 \text{Arctan } x + k_4$$

Finalement :

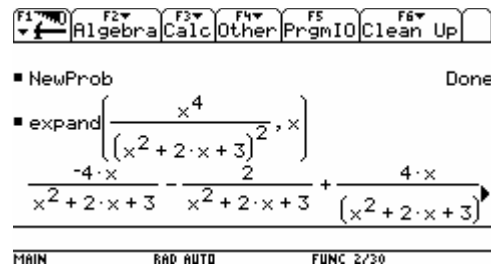
$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \ln(x^2 + 1) + \text{Arctan } x + \frac{3}{2(x^2 + 1)} + \frac{-2x}{x^2 + 1} - 2 \text{Arctan } x + k \\ &= \ln(x^2 + 1) - \text{Arctan } x - \frac{4x-3}{2(x^2 + 1)} + k \end{aligned}$$

c) Que faire lorsque le dénominateur admet des facteurs quadratiques plus compliqués ? Nous allons étudier un tel exemple maintenant. Soit

$$h(x) = \frac{x^4}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

La V200 donne la décomposition en éléments simples :

$$h(x) = 1 - \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 3} + \frac{4x - 3}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$



Le premier terme est évident :

- $\int 1 dx = x + k_1$

Le second terme s'intègre en 2 étapes :

- $$-\int \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx = -\int \frac{4x + 4}{x^2 + 2x + 3} dx + \int \frac{2}{x^2 + 2x + 3} dx$$

on fait apparaître un multiple
de la dérivée du dénominateur
au numérateur ($\rightarrow k \cdot u' / u$)

$$= -2 \ln(x^2 + 2x + 3) + \int \frac{2}{x^2 + 2x + 3} dx$$

Le trinôme $x^2 + 2x + 3$ ne se factorise pas puisque $\Delta = 4 - 12 < 0$. Il faut alors l'écrire sous forme canonique, c'est-à-dire en l'occurrence comme **somme de deux carrés** :

$$x^2 + 2x + 3 = (x + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2.$$

En faisant le changement de variables

$$x + 1 = \sqrt{2}t \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt,$$

dans la deuxième intégrale, on obtient alors :

- $$2 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = 2 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2} \stackrel{x+1=\sqrt{2}t}{=} 2\sqrt{2} \int \frac{dt}{2t^2 + 2}$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \sqrt{2} \operatorname{Arctan} t + k_2$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + k_2$$

Pour intégrer le troisième terme, on utilise les mêmes idées avec en plus la formule de récurrence entre I_2 et I_1 :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \int \frac{4x-3}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{4x+4}{(x^2+2x+3)^2} dx - \int \frac{7}{(x^2+2x+3)^2} dx \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - 7 \int \frac{1}{((x+1)^2+2)^2} dx \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - 7\sqrt{2} \int \frac{1}{(2t^2+2)^2} dt \quad (x+1 = \sqrt{2}t) \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} I_2 \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t \right) + k_3 \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{x^2+2x+3} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + k_3 \\
 &= \frac{-2}{x^2+2x+3} - \frac{7(x+1)}{4(x^2+2x+3)} - \frac{7\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k_3
 \end{aligned}$$

En additionnant les différents résultats, on obtient finalement :

$$\int h(x) dx = x - \frac{7x+15}{4(x^2+2x+3)} - 2 \ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) Un dernier exemple avec au dénominateur un facteur quadratique le plus général possible (et un numérateur du 1^{er} degré afin de ne pas obtenir trop de termes ...) :

$$k(x) = \frac{x+1}{(2x^2-x+3)^3}$$

On vérifie aisément que le trinôme $p(x) = 2x^2 - x + 3$ n'a pas de racine. On utilisera sa forme canonique :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) \\
 &= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{x}{4} + \frac{1}{16} + \frac{23}{16}\right) \\
 &= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]
 \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables :

$$x - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{23}}{4} t \Leftrightarrow t = \frac{4x-1}{\sqrt{23}}, \quad dx = \frac{\sqrt{23}}{4} dt$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\int k(x) dx &= \int \frac{x+1}{(2x^2-x+3)^3} dx \\
&= \int \frac{x+1}{8\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]^3} dx \\
&= \frac{\sqrt{23}}{32} \int \frac{\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}t}{\left(\frac{23}{16}t^2 + \frac{23}{16}\right)^3} dt \\
&= \frac{32\sqrt{23}}{23^3} \int \frac{5 + \sqrt{23}t}{(t^2+1)^3} dt \\
&= \frac{32\sqrt{23}}{23^3} \int \frac{5}{(t^2+1)^3} dt + \frac{16}{23^2} \int \frac{2t}{(t^2+1)^3} dt \\
&= \frac{160\sqrt{23}}{23^3} I_3 - \frac{8}{23^2(t^2+1)^2}
\end{aligned}$$

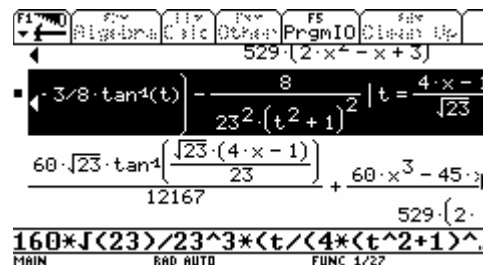
Or,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2 \\
&= \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 \right) \\
&= \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8} \text{Arctan } t + k_1
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int k(x) dx = \frac{160\sqrt{23}}{23^3} \left(\frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8} \text{Arctan } t \right) - \frac{8}{23^2(t^2+1)^2} + k$$

Pour repasser à la variable x , on peut utiliser la commande « tel que » de la V200 :



On obtient finalement :

$$\int k(x) dx \underset{V200}{=} \frac{60\sqrt{23}}{12167} \text{Arctan} \left(\frac{4x-1}{\sqrt{23}} \right) + \frac{60x^3 - 45x^2 + 155x - 103}{529(2x^2 - x + 3)^2} + k$$