LES NOMBRES COMPLEXES

Table des matières

COURS

COURS

1) L'invention du "nombre" i

Un des premiers problèmes traités par l'**algèbre**, science inventée par les Arabes au IX^e siècle (« al-jabr » signifie « calcul » en arabe), fut la résolution des équations du premier, deuxième, troisième et quatrième degré. Ce n'est qu'au XVI^e siècle que les mathématiciens « algébristes » italiens *Del Ferro* (1465-1526), *Tartaglia* (1499-1557) et son grand rival *Cardano* (1501-1575) et enfin *Bombelli* (1526-1573), ont enfin réussi à résoudre les équations du 3^e et du 4^e degré. Or ce ne sont pas tant les formules qu'ils ont trouvées qui se sont révélées importantes par la suite, mais une certaine méthode qu'ils ont développée pour y arriver et qui a mené aux nombres qu'on appelle aujourd'hui « **nombres complexes** ».

Au début du seizième siècle ***Del Ferro*** a démontré que l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0 \quad (\text{où } p, q \in \mathbb{R})$$

a pour solution le nombre

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}}$$

à condition bien sûr que $4p^3 + 27q^2 \geq 0$!

Cette formule n'est donc pas applicable à une équation comme par exemple

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \ (*)$$

car $\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}} = \sqrt{\frac{4(-15)^3 + 27(-4)^2}{108}} = \sqrt{-121}$ n'existe pas !

C'est là que ***Bombelli*** a eu l'idée insolite d'<u>imaginer</u> qu'il existe un « nombre » i tel que $i^2 = -1$ et avec lequel on puisse faire les mêmes calculs qu'avec les nombres réels ordinaires comme p.ex. $i + 2$, $3i - 4$, $\frac{9}{i}$, etc…(on pourrait dire aussi qu'il a eu l'audace de faire *comme si* une telle « chose » existait….).

On aurait alors $(11\,i)^2 = 121\,i^2 = 121(-1) = -121$, donc $\sqrt{-121} = 11\cdot i$ et par conséquent $x = \sqrt[3]{2+11\cdot i} + \sqrt[3]{2-11\cdot i}$.

Or $(2+i)^3 = 8+3\cdot 4\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3 = 8+12\cdot i-6-i = 2+11\cdot i$ (car $i^3 = i^2 i = -i$)

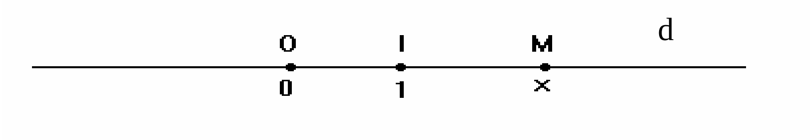
donc $\sqrt[3]{2+11\cdot i} = 2+i$ et on montre de même que $(2-i)^3 = 2-11\cdot i$, donc $\sqrt[3]{2-11\cdot i} = 2-i$. Finalement on obtient $x = 2+i+2-i = 4$ et on vérifie facilement que le réel 4 est bien une solution de l'équation (*) !

Ainsi *Bombelli* avait trouvé une solution bien réelle de l'équation (*) en utilisant un « nombre » qui ne pouvait pas exister mais qui avait le bon goût de disparaître à la fin des calculs…. Au 17^e^ siècle *Descartes* (1596-1650) appela ce nombre irréel et inexistant **« nombre imaginaire »** et au 18^e^ siècle *Euler* (1707-1783) imposa la notation « ***i*** » que *Bombelli* n'avait pas encore utilisée, en l'appelant aussi « nombre impossible ». Ces dénominations (irréel, imaginaire, impossible…) témoignent du profond malaise que les mathématiciens du 16^e^ au 18^e^ siècles ont ressenti envers ce nombre i (et ses composés $i+2$, $3i-4$, etc appelés **nombres complexes**) qui malgré sa définition incertaine et bizarre s'est révélé être un instrument très efficace pour la résolution de nombreux problèmes algébriques. Ce n'est qu'au cours du 19^e^ siècle que des mathématiciens comme ***Gauss*** (1777-1855), ***Cauchy*** (1789-1857) et ***Hamilton*** (1805-1865) ont enfin réussi à donner une construction rigoureuse de ces nombres et à leur enlever leur caractère magique et mystérieux. Ils constituent aujourd'hui encore une des notions les plus importantes des mathématiques modernes.

2) Construction des nombres complexes

a) Idée fondamentale

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être interprété géométriquement comme l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite d munie d'un repère $\left(O,\overrightarrow{OI}\right)$:



$$\forall M \in d \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad M(x) \quad \text{càd } \overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OI}$$

Comme $i \notin \mathbb{R}$ le point repéré par i, *à supposer qu'il existe*, ne peut pas se trouver sur d mais doit être cherché ailleurs dans le plan ! Or dans le plan muni d'un R.O.N. chaque point M est repéré par un *couple de deux nombres réels* a et b : M(a,b). C'est en se basant sur ces considérations que *Hamilton* a eu l'idée de définir l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, comme l'ensemble des <u>couples</u> (a,b) de deux nombres réels :

$$\mathbb{C} = \left\{(a,b) / a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\right\}$$

Pour lui <u>un « nombre » complexe est donc un couple de deux réels</u> !

b) Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Il a ensuite défini une <u>addition</u> notée $\oplus$ et une <u>multiplication</u> notée $\otimes$ en posant :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{C} & (a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b') \\ & (a,b) \otimes (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b) \end{array}}$$

p.ex. $(3,-7) \oplus (-11,54) = (-8,47)$

$(4,-5) \otimes (-3,2) = (-12+10, 8+15) = (-2,23)$

On vérifie facilement que les opérations ainsi définies ont les <u>propriétés</u> suivantes :

- **Addition**
  - Commutativité : $(a,b) \oplus (a',b') = (a',b') \oplus (a,b)$

- Associativité :

  $\left[(a,b)\oplus(a',b')\right]\oplus(a'',b'')=(a,b)\oplus\left[(a',b')\oplus(a'',b'')\right]$

- $(a,b)\oplus(0,0)=(a,b)$, donc (0,0) est *l'élément neutre* pour l'addition
- $(a,b)\oplus(-a,-b)=(0,0)$, donc $(-a,-b)$ est l'*opposé* de (a,b))
- *Conclusion :* $(\mathbb{C},\oplus)$ est un **groupe commutatif**
- *Notation* **:** $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}/\{(0,0)\}=\{(a,b)/a\in\mathbb{R}^* \text{ ou } b\in\mathbb{R}^*\}$

- **Multiplication**
  - Commutativité : $(a,b)\otimes(a',b')=(a',b')\otimes(a,b)$
  - Associativité :

    $\left[(a,b)\otimes(a',b')\right]\otimes(a'',b'')=(a,b)\otimes\left[(a',b')\otimes(a'',b'')\right]$

  - $(a,b)\otimes(1,0)=(a,b)$, donc (1,0) est *l'élément neutre* pour $\otimes$
  - si $(a,b)\in\mathbb{C}^*$ $\quad(a,b)\otimes\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$,

    donc $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ est l'*inverse* de (a,b)

  - $(\mathbb{C}^*,\otimes)$ est un groupe commutatif

- **Distributivité** de la multiplication pour l'addition :

  $(a,b)\otimes\left[(a',b')\oplus(a'',b'')\right]=(a,b)\otimes(a',b')\oplus(a,b)\otimes(a'',b'')$

- **Conclusion :**

  L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition $\oplus$ et de la multiplication $\otimes$ est un **corps commutatif**, exactement comme $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

c) Relations entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Géométriquement, on peut identifier $\mathbb{R}$ au sous-ensemble $A=\{(a,0)/a\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{C}$. Mais alors on aura sur $\mathbb{R}$ deux additions et deux multiplications : les opérations usuelles (opérations « réelles ») et celles induites par $\mathbb{C}$ (opérations « complexes ») ! Or en analysant le comportement des opérations « complexes » sur A on voit que :

- $(0,0) \in A$ et $(1,0) \in A$
- $(a,0) \oplus (a',0) = (a+a',0) \in A$
- $(a,0) \otimes (a',0) = (aa' - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot a') = (aa',0) \in A$
- si $a \neq 0$ l'inverse de $(a,0) = \left(\dfrac{a}{a^2+0^2}, \dfrac{-0}{a^2+0^2}\right) = \left(\dfrac{1}{a}, 0\right) \in A$

En d'autres termes les opérations « complexes » et « réelles » se comportent exactement de la même manière sur A !

Conclusion :

On peut considérer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et que $\oplus$ et $\otimes$ sont des *extensions* à $\mathbb{C}$ de l'addition et de la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$. Ainsi on peut *identifier* $(a,0)$ au nombre réel a : $(a,0) \cong a$, $(1,0) \cong 1$, $(0,0) \cong 0$, etc.

d) Le nombre i existe !

Calculons $(0,1)^2 = (0,1) \otimes (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) \cong -1$. Donc en notant $i \cong (0,1)$ on a bien $\boxed{i^2 = -1}$, ce qui résout définitivement le problème de l'existence d'un tel nombre !

Le nombre complexe (0,1) a donc exactement la propriété imaginée par Bombelli pour le nombre i ! De plus :

- $\forall b \in \mathbb{R} \quad (b,0) \otimes (0,1) = (0-0, b+0) = (0,b)$, donc $(0,b) \cong b \otimes i$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \quad (a,b) = (a,0) \oplus (0,b) \cong a \oplus b \otimes i$

e) Notations définitives

Les opérations $\oplus$ et $\otimes$ dans $\mathbb{C}$ ayant les mêmes propriétés que l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ qu'on peut par ailleurs considérer comme une partie de $\mathbb{C}$, on peut sans risquer aucune ambiguïté prendre les <u>mêmes notations</u> pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Ainsi par exemple au lieu de $a \oplus b \otimes i$ on écrira simplement : **a+bi**.

Avec ces <u>nouvelles notations</u> on peut donc écrire :

- $(a,b)=a+bi$
- $\mathbb{C}=\{a+bi\,/\,a,b\in\mathbb{R}\}$ et $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$
- $(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$
- opposé de $(a+bi)=-(a+bi)=-a-bi$
- $(a+bi)(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=aa'-bb'+(ab'+a'b)i$
- $a+bi=a'+b'i\Leftrightarrow(a=a'\text{ et }b=b')$ *en particulier* : $a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$

Remarque : $\frac{i}{2}$ signifie $\frac{1}{2}\cdot i$ et $\frac{5+3i}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$

Définitions

Pour tout nombre complexe $z=a+bi$:

- le réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a=\Re(z)$
- le réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b=\Im(z)$
- si $a=\Re(z)=0$, càd si $z=bi$, on dit que z est un **imaginaire pur.** L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Remarque :

Bien que ces nombres n'aient aujourd'hui plus rien « d'*imaginaire* », le mot est resté, sans doute par esprit de tradition. On observe le même phénomène à propos des nombres « *irrationnels* » (p.ex. $\sqrt{2},\sqrt[3]{7},\pi,\ \ldots$) qui n'ont plus rien d'irrationnel depuis qu'on a trouvé, également au 19^e^ siècle, une construction tout à fait rationnelle de ces nombres, mais c'est une autre histoire !

Exercices 1, 2, 3

f) Conjugué d'un complexe

Définition

Pour tout nombre complexe $z=a+bi$, on appelle **conjugué** de z le nombre :

$$\boxed{\overline{z}=a-bi}$$

Propriétés du conjugué :

- $\forall z,z'\in\mathbb{C}\quad \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'},\ \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$ et $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$

- $\forall z = a+bi \in \mathbb{C} \quad z\bar{z} = a^2+b^2$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Exercices 4, 5

g) Division dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a+bi \in \mathbb{C}^*$ et $z' = a'+b'i \in \mathbb{C}$, alors :

- $$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

  on retrouve ici la formule de l'inverse de $a+bi$ *vue en b !*

- $$\frac{z'}{z} = \frac{z'\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} + \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}i$$

Remarques :

Ce n'est pas la peine d'apprendre ces formules par cœur, il suffit de retenir qu'*on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur*, ce qui donne un dénominateur réel d'après la propriété $z\bar{z} = a^2+b^2$!

Propriétés

- $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Exercices 6, 7, 8

h) Interprétation géométrique

Dans le plan muni d'un R.O.N. , appelé **plan de Gauss**, on peut représenter un nombre complexe $z = a+bi$ par le point $M(a,b)$. On dit que M est le **point image d'affixe z** et on note **M(z)**.

On voit facilement que :

- si $z \in \mathbb{R}$ alors M(z) est sur l'axe des abscisses appelé **axe réel**.

- si $z \in i\mathbb{R}$ alors M(z) est sur l'axe des ordonnées appelé **axe imaginaire**.
- $M(z)$ et $M(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
- $M(z)$ et $M(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Exercices 9, 10, 11, 12

i) Module d'un complexe

- *Définition*

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et M(z) le point d'affixe z dans le plan de Gauss. On appelle **module de z**, et on note $|z|$, la distance de M à l'origine O du repère :

$$\boxed{|z| = \overline{OM} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$$

- *Exemples*

$|i| = \sqrt{0+1} = 1$

$|3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$

$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

- *Remarques :*

➢ $\forall a \in \mathbb{R} \quad |a| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue)

Sur $\mathbb{R}$ il n'y a donc *aucune différence entre module et valeur absolue*, ce qui explique la similitude des notations !

➢ $\forall b \in \mathbb{R} \quad |bi| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$ (valeur absolue)

p.ex. $|5i| = 5$; $|-7i| = 7$

- *Propriétés du module :*

Ces propriétés sont exactement analogues (sauf la dernière) aux propriétés de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$

- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| \in \mathbb{R}_+$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\bar{z}| = |z|$

Exercice 13

j) Relation d'ordre sur $\mathbb{C}$?

- Sur l'ensemble des nombres réels la relation « ..$\leq$..» est une relation d'ordre total : $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \quad$ ou $\quad b \leq a$

  Elle permet de comparer deux réels quelconques et de plus elle est « compatible » avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ (p.ex. $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$, si c>0 on a : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$, etc). Cette relation permet aussi de distinguer les réels positifs (ceux qui sont plus grands que 0) des réels négatifs (ceux qui sont plus petits que 0).

- Une telle relation d'ordre **n'existe pas** sur $\mathbb{C}$ **!** On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes (p.ex. écrire « $1 + i \leq 3 - i$ » N'A PAS DE SENS !!!), ni parler de nombres complexes « positifs » ou « négatifs » puisqu'on ne peut pas les comparer à 0 ! En particulier il n'y a pas d'inéquations dans $\mathbb{C}$ **!**

3) Racines carrées complexes

- *Définition*

  Soient $z, u \in \mathbb{C}$, on dit que u est une **racine carrée complexe** (on notera : **rcc**) de z ssi $\quad z = u^2$

- *Exemples*

$(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$ donc $3i$ et $-3i$ sont deux rcc de -9.

$(2-i)^2 = 4-4i-1 = 3-4i$ et $(i-2)^2 = \cdots = 3-4i$, donc $2-i$ et $i-2$ sont deux rcc de $3-4i$

$5^2 = (-5)^2 = 25$, donc 5 et -5 sont deux rcc de 25

Attention : 25 n'a qu'une seule racine carrée réelle : $\sqrt{25} = 5$!

- *Calcul des rcc de* $z = a + bi$

Supposons que $u = x + yi$ est une rcc de $z = a + bi$, alors:

$$(x+yi)^2 = a+bi \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

et $|u^2| = |z| \Leftrightarrow |u|^2 = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ (3),

d'où :

$$\begin{aligned}
(3)+(1): \quad & 2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a \\
& \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\
& \Leftrightarrow x = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \\
(3)-(1): \quad & 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a \\
& \Leftrightarrow y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \\
& \Leftrightarrow y = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1
\end{aligned}$$

Or d'après (2) xy et b ont le même signe, donc il faut distinguer 2 cas :

1er cas : $b \geq 0$

Alors x et y ont même signe puisque $xy \geq 0$, donc u est égal à l'un des deux nombres suivants : $u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \cdot i$ et $u_2 = -u_1$.

<u>2^e cas</u> : $b < 0$

Alors x et y ont des signes opposés puisque $xy < 0$, donc u est égal à l'un des deux nombres suivants : $u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \cdot i$ et $u_2 = -u_1$.

Réciproquement on vérifie facilement (exercice !) que les nombres u_1 et u_2 trouvés dans les deux cas sont bien des rcc de $z = a + bi$.

Comme par ailleurs $\sqrt{a^2+b^2} = |z|$, $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$ on peut formuler le résultat obtenu de la manière suivante :

<u>Théorème</u>

Tout nombre complexe z a <u>exactement deux rcc (**r**acines **c**arrées **c**omplexes) opposées</u> données par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 = \sqrt{\frac{|z|+\Re(z)}{2}} + \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{|z|-\Re(z)}{2}} \cdot i \quad \text{avec } \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \Im(z) \geq 0 \\ -1 & \text{si } \Im(z) < 0 \end{cases} \\ u_2 = -u_1 \end{array}}$$

- <u>*Exemples*</u>
  - $|3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$, $\Re(3-4i) = 3$ et $\Im(3-4i) < 0$ donc les rcc de $3-4i$ sont : $u_1 = \sqrt{\frac{5+3}{2}} - \sqrt{\frac{5-3}{2}} \cdot i = 2 - i$ et $u_2 = -2 + i$
  - $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\Re(1+i) = 1$ et $\Im(1+i) > 0$ donc les rcc de $1+i$ sont $u_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \cdot i$ et $u_2 = -u_1$

- $|-3i| = \sqrt{0+9} = 3$, $\Re(-3i) = 0$ et $\Im(-3i) < 0$ donc les rcc de $-3i$ sont

  $u_1 = \sqrt{\frac{3+0}{2}} - \sqrt{\frac{3-0}{2}} \cdot i = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i$ et $u_2 = -u_1$

- *Attention :*

  - Il ne faut pas confondre racine carrée réelle et racine carrée complexe !

    p.ex. 4 a une racine carrée réelle : $\sqrt{4} = 2$, mais deux rcc : 2 et -2,

    alors que -4 n'a aucune racine réelle, mais deux rcc : $2i$ et $-2i$!

  - Le symbole $\sqrt{\ }$ n'est jamais utilisé pour noter une rcc ! En effet quel sens donner p.ex à $\sqrt{-4}$? $2i$ ou $-2i$?

Exercice 14

4) Equations du second degré

a) Résolution générale d'une équation du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à *coefficients complexes* ($a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) et cherchons toutes les *solutions complexes* de cette équation.

$$az^2 + bz + c = 0 \quad |\div a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad (*)$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ et soit δ une rcc de Δ, alors :

$$(*) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z=-\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b+\delta}{2a}$$

Théorème

Toute équation du second degré $az^2+bz+c=0$ (où $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$) a deux racines complexes données par :

$$\boxed{z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}}$$

où δ est *l'une* des rcc du discriminant $\Delta=b^2-4ac$

Remarques :

- Si $\Delta=\delta=0$, alors les deux racines sont confondues et on dit que l'équation a une **racine double** $z_1=z_2=\frac{-b}{2a}$.
- On a les mêmes formules bien connues que dans $\mathbb{R}$ sauf qu'on n'écrit plus $\sqrt{\Delta}$ et qu'on n'a plus besoin de distinguer suivant le signe de Δ !
- En général on utilise plutôt la *lettre z* pour désigner une inconnue complexe, mais rien n'interdit d'utiliser x, y ou toute autre lettre !
- De la démonstration du théorème il découle immédiatement la **formule de factorisation** suivante :

$$\boxed{az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)}$$

En d'autres termes un polynôme du second degré à coefficients complexes est toujours factorisable sous forme de produit de deux polynômes du premier degré. C'est un cas particulier du ***théorème de D'Alembert*** (1717-1783) (théorème fondamental de l'algèbre !) qui affirme que tout polynôme de degré n (n entier positif quelconque !) à coefficients complexes est factorisable sous forme de produit de n polynômes du premier degré.

Exercices 15, 16

b) Exemples d'équations se ramenant à des équations du second degré

Exemple1 : par factorisation

$10z^3 - 4z^2 - 15iz + 6i = 0$ (équation du 3e degré)

$\Leftrightarrow 2z^2(5z-2) - 3i(5z-2) = 0$

$\Leftrightarrow (5z-2)(2z^2-3i) = 0$

$\Leftrightarrow 5z - 2 = 0$ ou $2z^2 - 3i = 0$, etc.

on trouve $S = \left\{ \frac{2}{5}; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right\}$

Exemple2 : par changement d'inconnue

$z^4 + (2i-2)z^2 + 3 - 6i = 0$ (équation **« bicarrée »**)

En posant $t = z^2$ on obtient l'équation du second degré d'inconnue t : $t^2 + (2i-2)t + 3 - 6i = 0$ qui a pour solutions $t' = 2 + i$ et $t'' = -3i$.

D'où : $z^2 = 2 + i$ ou $z^2 = -3i$, et en cherchant les rcc de ces deux complexes on trouve :

$$S = \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i; -\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i; \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \cdot i; -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \cdot i \right\}$$

Exemple3 : par réduction au même dénominateur

$$\frac{6}{z+1}-\frac{10}{3-z}=4i-1 \,\Big|\cdot (z+1)(3-z)\neq 0 \qquad \text{C.E. } z\neq -1 \quad \text{et} \quad z\neq 3$$

$$\Leftrightarrow 6(3-z)-10(z+1)=(4i-1)(3-z)(z+1)$$

$$\Leftrightarrow (4i-1)z^2-(14+8i)z+11-12i=0\text{, etc.} \qquad S=\left\{1-2\cdot i;\frac{1}{17}-\frac{30}{17}\cdot i\right\}$$

Remarque :

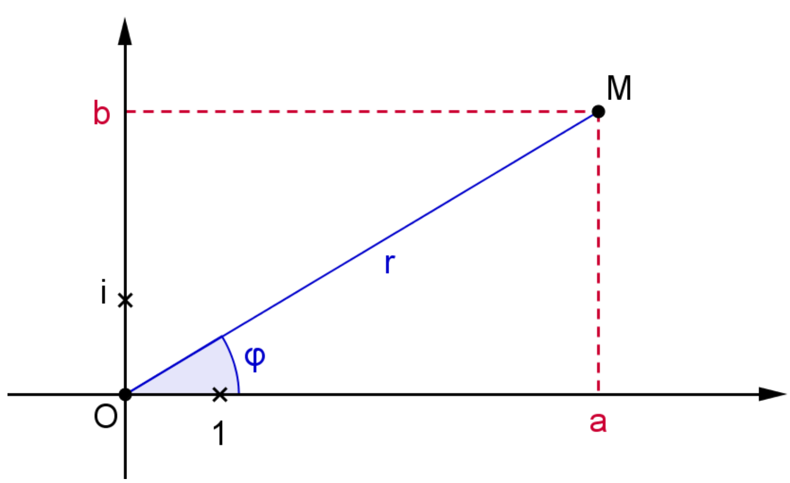
A titre d'exercice vous pourrez faire les calculs détaillés de ces exemples !

Exercice 17

5) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

a) Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

- Soit M un point du plan muni d'un R.O.N. $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, alors :
  - les réels uniques a et b tels que $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OJ}$ sont appelés **coordonnées cartésiennes** de M. On note $M(a,b)$.
  - le point M peut également être repéré par la donnée de la distance $r=\overline{OM}$ et une mesure φ de l'angle $\widehat{xOM}$: ce sont les **coordonnées polaires** de M. On note $M(r,\varphi)$.



- *Attention* : Pour un point donné M les coordonnées a, b et r sont déterminées de façon unique alors que φ n'est déterminé qu'à un multiple entier de 2π près !

- Relations entre coordonnées cartésiennes et polaires

  Si M appartient au premier quadrant (voir figure !) le triangle $\Delta(OAM)$ où $A(a,0)$ est rectangle en A, donc : $\boxed{\cos\varphi = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}}$

  Nous admettrons que cette formule reste valable pour les autres quadrants.

b) Forme trigonométrique et forme algébrique

- Soient $z = a + bi$, M le point d'affixe z et (r, φ) les coordonnées polaires de M. Alors :

  - $r = |z|$ (module de z)
  - φ est appelé **argument** de z et on note : $\boxed{\arg(z) = \varphi}$
  - $\boxed{z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$
  - Notations :

    le nombre $\cos\varphi + i\sin\varphi$ sera noté $\text{cis}\varphi$ ou $e^{i\varphi}$, où cis est une abréviation pour « $\cos + i\sin$ » et $e^{i\varphi}$ est l'exponentielle complexe)

- Exemples :

$$\text{cis}0 = e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\cdot 0 = 1$$

$$\text{cis}\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i$$

$$\text{cis}\pi = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

$$\text{cis}\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- *Définitions :*
  - $z = r\text{cis}\varphi = re^{i\varphi}$ est appelée : **forme trigonométrique** de z
  - $z = a + bi$ est appelée : **forme algébrique** de z

- *Exemples :*

$$z = 6\text{cis}\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3\sqrt{3}\cdot i$$

$$z = 5e^{\frac{\pi}{6}i} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

c) Propriétés

- $\boxed{\forall\varphi \in \mathbb{R} \quad |\text{cis}\varphi| = |e^{i\varphi}| = 1}$

  en effet $|\text{cis}\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$

- $\boxed{\text{cis}\varphi = \text{cis}\varphi' \Leftrightarrow \varphi' = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$

  en effet $\text{cis}\varphi = \text{cis}\varphi' \Leftrightarrow (\cos\varphi = \cos\varphi' \text{ et } \sin\varphi = \sin\varphi')$,

  or $\cos\varphi = \cos\varphi' \Leftrightarrow (\varphi = \varphi' + 2k\pi \text{ ou } \varphi = -\varphi' + 2k\pi)$

  et $\sin\varphi = \sin\varphi' \Leftrightarrow (\varphi = \varphi' + 2k\pi \text{ ou } \varphi = \pi - \varphi' + 2k\pi)$,

  donc $\cos\varphi = \cos\varphi' \text{ et } \sin\varphi = \sin\varphi' \Leftrightarrow \varphi = \varphi' + 2k\pi$.

- $$\boxed{\forall\varphi \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \text{cis}(\varphi + 2\pi) = \text{cis}\varphi & (1) \\ \text{cis}(\varphi + \pi) = -\text{cis}\varphi & (2) \\ \text{cis}(-\varphi) = \overline{\text{cis}\varphi} & (3) \end{cases}}$$

la vérification de ces formules découle immédiatement des formules analogues pour sinus et cosinus !

- $$\boxed{\forall \varphi, \varphi' \in \mathbb{R} \quad \text{cis}(\varphi+\varphi') = \text{cis}\varphi \cdot \text{cis}\varphi' \quad \text{et} \quad \text{cis}(\varphi-\varphi') = \frac{\text{cis}\varphi}{\text{cis}\varphi'}}$$

__Remarque__ :

en notation exponentielle : $e^{i(\varphi+\varphi')} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'}$ et $e^{i(\varphi-\varphi')} = \dfrac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi'}}$ on retrouve les mêmes formules que pour la fonction exponentielle réelle (voir cours d'analyse), ce qui justifie cette notation !

$$\begin{aligned}
\text{cis}\varphi \cdot \text{cis}\varphi' &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \\
&= \cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' \\
&= \cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi') \\
&= \cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi') \\
&= \text{cis}(\varphi+\varphi')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\text{cis}\varphi}{\text{cis}\varphi'} &= \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi' + i\sin\varphi'} \\
&= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi' - i\sin\varphi')} \\
&= \frac{\cos\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - i^2\sin\varphi\sin\varphi'}{\cos^2\varphi' - i^2\sin^2\varphi'} \\
&= \frac{\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' - \cos\varphi\sin\varphi')}{\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi'} \\
&= \frac{\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')}{1}
\end{aligned}$$

$= \text{cis}(\varphi - \varphi')$

- $$\boxed{\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')}$$

En effet soient $z = r\text{cis}\varphi$ et $z' = r'\text{cis}\varphi'$ deux complexes sous leur forme trigonométrique, alors $z \cdot z' = r\text{cis}\varphi \cdot r'\text{cis}\varphi' = rr'\text{cis}(\varphi + \varphi')$ d'après la propriété précédente donc $\arg(zz') = \varphi + \varphi' = \arg(z) + \arg(z')$.

De même :

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r\text{cis}\varphi}{r'\text{cis}\varphi'} = \dfrac{r}{r'}\text{cis}(\varphi - \varphi')$, donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \varphi - \varphi' = \arg(z) - \arg(z')$.

- **Formule de MOIVRE** (1667-1754)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

Démonstration :

Montrons d'abord par récurrence que la formule est vraie pour $n \in \mathbb{N}$:

* $\underline{n = 0}$: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 = 1$ et $\cos 0 + i \cdot \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$, donc

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 = \cos 0 + i\sin 0$$

* Supposons que la formule est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors :

$(\text{cis}\varphi)^{n+1} = (\text{cis}\varphi)^n \,\text{cis}\varphi$

$= \text{cis}(n\varphi) \cdot \text{cis}\varphi$ (hypothèse de récurrence)

$= \text{cis}(n\varphi + \varphi)$ (voir page 18)

$\overset{!}{=} \text{cis}(n+1)\varphi$

La formule est donc vraie pour $n \in \mathbb{N}$, d'où :

$$(\mathrm{cis}\,\varphi)^{-n}=\frac{1}{(\mathrm{cis}\,\varphi)^{n}}=\frac{1}{\mathrm{cis}\,n\varphi}=\frac{\overline{\mathrm{cis}\,n\varphi}}{\mathrm{cis}\,n\varphi\cdot\overline{\mathrm{cis}\,n\varphi}}=\frac{\mathrm{cis}(-n\varphi)}{|\mathrm{cis}\,n\varphi|^{2}}=\frac{\mathrm{cis}(-n\varphi)}{1}=\mathrm{cis}(-n\varphi)$$

la formule est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{Z}$, cqfd.

Remarque :

Cette formule peut s'écrire aussi : $\boxed{(\mathrm{cis}\varphi)^{n}=\mathrm{cis}(n\varphi)\quad \text{ou}\quad (e^{i\varphi})^{n}=e^{in\varphi}}$

d) Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit $z=a+bi$ un complexe sous forme algébrique ; pour mettre z sous forme trigonométrique, il faut calculer son module r et son argument φ.

- On commence par calculer $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- Ensuite pour calculer φ il faut résoudre le système d'inconnue φ :

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\\[2mm] \sin\varphi=\dfrac{b}{r}\end{cases}$$

Or ce système admet toujours une solution (unique à un multiple de 2π près !) puisque chaque complexe a un argument !

Exemples :

- $z=1+i\quad (a=b=1)$, alors $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ et

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\\ \sin\varphi&=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\end{aligned}\right\}\ \text{donc}\ \varphi=\frac{\pi}{4}(+2k\pi)$$

d'où $z=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{4}$ ou $z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

- $z=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$, alors $r=\sqrt{\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{9}=3$ et

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ \sin\varphi &= \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{donc}\ \varphi = \frac{5\pi}{6}(+2k\pi)$$

d'où $z = 3\text{cis}\frac{5\pi}{6}$ ou $z = 3e^{\frac{5\pi}{6}i}$

Remarque :

Le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique est évident !

Exercices 18, 19, 20, 21

6) Racines n-ièmes complexes d'un nombre complexe

- *Définition*

  Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}\,(n \geq 2)$, on appelle **racine n-ième (complexe)** de z tout nombre complexe u tel que $\boxed{u^n = z}$.

- *Recherche des racines n-ièmes de z :*

  Soit $z = r\text{cis}\varphi$ et $u = \rho\text{cis}\alpha$, alors : $u^n = z \Leftrightarrow (\rho\text{cis}\alpha)^n = r\text{cis}\varphi$

$$\Leftrightarrow \rho^n\text{cis}(n\alpha) = r\text{cis}\varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \varphi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + k\dfrac{2\pi}{n} \end{cases}$$

Ainsi $|u| = \sqrt[n]{|z|}$ et $\arg(u) = \dfrac{\arg(z) + 2k\pi}{n}$; toutes les racines n-ièmes ont donc le même module et on obtient n arguments distincts :

$$\frac{\varphi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n};\cdots;\frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

en effet pour $k = n : \dfrac{\varphi}{n} + n\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi = \dfrac{\varphi}{n}$, etc…, d'où :

Théorème

Tout nombre complexe $z = r\operatorname{cis}\varphi$ admet n racines n-ièmes distinctes $(n \geq 2)$:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{avec } k = 0; 1; 2; 3; \ldots; n-1}$$

- *Remarque* :

  Comme pour les rcc on n'utilise JAMAIS la notation $\sqrt[n]{}$ pour une racine n-ième complexe !

- *Exemple* :

  Les racines 4-ièmes de $z = 16 \cdot \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$ sont :

  $$z_k = \sqrt[4]{16} \cdot \operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \quad (\text{avec} \quad k = 0;1;2;3), \text{ càd :}$$

  $$z_0 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{\pi}{12}, \quad z_1 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}, \quad z_2 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{13\pi}{12}, \quad z_3 = 2 \cdot \operatorname{cis}\frac{19\pi}{12}$$

- *Interprétation géométrique*

  Toutes les racines n-ièmes de $z = r\operatorname{cis}\varphi$ ont le même module $\sqrt[n]{r}$ donc les n points $M_k(z_k)$ d'affixes z_k $(k = 0;1;\cdots;n-1)$ sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$. On voit facilement que

  $$\arg(z_k) = \arg(z_{k-1}) + \frac{2\pi}{n} \quad (\text{pour } k = 1;\cdots;n-1)$$

  donc $\widehat{M_0OM_1} = \widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_2OM_3} = \cdots = \widehat{M_{n-1}OM_1} = \frac{2\pi}{n}$.

  Par conséquent $M_0M_1M_2\cdots M_{n-1}$ est un **polygone régulier** à n côtés.

Exercices 22, 23, 24, 25

7) Polynômes à coefficients complexes

Soit $P(z)=c_n z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1 z+c_0$ avec $z\in\mathbb{C}$ et $c_i\in\mathbb{C}\left(c_n\in\mathbb{C}^*\right)$ un polynôme de degré n à coefficients complexes et à variable complexe z. Comme les règles de calcul sont les mêmes dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, ces polynômes sont traités exactement de la même façon que les polynômes à coefficients réels et à variable réelle. En particulier le schéma pour la division des polynômes reste valable ainsi que le schéma de Horner pour une division par $z-a$ où $a\in\mathbb{C}$.

Rappelons également la propriété fondamentale des polynômes :

$P(a)$ est le reste de la division de $P(z)$ par $z-a$

et sa conséquence pratique :

$$\boxed{P(z) \text{ est divisible par } z-a \Leftrightarrow P(a)=0}$$

Ceci permet de factoriser P(z) quand on connaît une racine de P(z) et donc de résoudre certaines équations d'un degré supérieur à 2.

Exercices 26, 27, 28, 29

EXERCICES

Exercice 1

Calculez (donnez le résultat sous la forme $a+bi$, avec $a,b\in\mathbb{R}$) :

1) $(3-5i)+(-2+2i)-(-2+3i)=$

2) $\dfrac{4-3i}{2}-\dfrac{2}{3}(1-i)-\dfrac{2-i}{6}=$

3 $(3+5i)(4-3i)=$

7) $\left(-\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)^2=$

8) $\left(2+\dfrac{i}{2}\right)^3=$

9) $(2-3i)(-7+6i)(5-4i)=$

4) $\left(-\sqrt{3}-\dfrac{i}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+\dfrac{i}{2}\right)=$

5) $\left(\sqrt{2}+3i\right)^2=$

6) $\left(\sqrt{5}-3i\right)\left(2-i\sqrt{5}\right)=$

10) $\left(-2+i\sqrt{3}\right)^3=$

11) $\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{i}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}+i\right)\left(\dfrac{2}{3}-i\right)=$

12) $\left(2-3i\right)^4=$

Exercice 2

Trouvez les réels x et y tels que :

1) $(2x-1)+(1-y)i=5-3i$

2) $3x+2y+i-4xi=yi+2-i$

3) $3xi-2y=3x+2-4yi-2i$

4) $xi-y-x+3i=0$

5) $2x-1+2yi=2y-(2-3x)i$

Exercice 3

1) Calculez i^3, i^4, i^5,…., i^{10}.

2) Déduisez-en une formule pour calculer i^n où $n\in\mathbb{N}$.

3) Appliquez cette formule pour calculer i^{372}, i^{2970}, i^{875} et i^{1345}.

Exercice 4

1) Calculez $\overline{5+7i}$, $\overline{\dfrac{9-i}{2}}$, $\overline{13i}$, $\overline{78}$, $\overline{-4i}$.

2) Calculez $z+\bar{z}$ et $z-\bar{z}$ avec $z\in\mathbb{C}$

Exercice 5

Démontrez les propriétés suivantes :

1) $\forall z\in\mathbb{C}\quad z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

2) $\forall z\in\mathbb{C}\quad z=-\bar{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$

3) $\forall z=a+bi\in\mathbb{C}\quad z\bar{z}=a^2+b^2$

4) $\forall z,z'\in\mathbb{C}\quad \overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$

5) $\forall z,z'\in\mathbb{C}\quad \overline{z\cdot z'}=\bar{z}\cdot\overline{z'}$

Exercice 6

1) Calculez i^{-1}, i^{-2}, i^{-3},…., i^{-6}.

2) Déduisez-en une formule pour calculer i^{n} où $n \in \mathbb{Z}$.

3) Appliquez cette formule pour calculer i^{-179}, i^{-2481}, i^{-522} et i^{-1724}.

Exercice 7

Calculez :

1) $\dfrac{1}{-3i}$

2) $\dfrac{1}{3-i\sqrt{2}}$

3 $\dfrac{3+4i}{-2i}$

4) $\dfrac{7+i}{4-5i}$

5) $\dfrac{i\sqrt{5}}{\sqrt{3-i\sqrt{2}}}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+i}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}+i}\right)^{2}$

7) $\left(\dfrac{5-i}{7+i}\right)^{2}\div\dfrac{2i}{3+i}$

8) $\dfrac{z^{2}-2z+3}{z^{2}+2z+3}$ avec $z=3-2i$

9) $\dfrac{3-2i}{4+3i}-\dfrac{7+8i}{1-3i}$

10) $\dfrac{1-3i}{5-i}-\dfrac{9i}{2+3i}$

Exercice 8

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1) $4z+25\overline{z}=2-3i$

2) $z-3=4z+8i$

3) $(1-3i)\overline{z}-\dfrac{5}{1+i}=7\overline{z}$

4) $\overline{3z-5\overline{z}}=2-i$

5) $(3-2i)z-\overline{1+3i}=\dfrac{z}{2-i}$

6) $(5-7i)z-\overline{2-3i}=\dfrac{2}{i}+4\overline{z}$

Exercice 9

Construisez dans le plan de Gauss les points suivants :

$A(i)$ $B(-5i)$ $C(6)$ $D(-4)$

$E(3-5i)$ $F(-(3-5i))$ $G\left(\overline{3-5i}\right)$ $H\left(-(\overline{3-5i})\right)$

$I(1+i)$ $J(1-i)$

Exercice 10

On donne $w=(z+2i)(\bar{z}+4)$ avec $z=x+yi\in\mathbb{C}$.

1) Représentez les ensembles suivants dans le plan de Gauss:

$A=\{z\in\mathbb{C}\,/\,w\in\mathbb{R}\}$ et $B=\{z\in\mathbb{C}\,/\,w\in i\mathbb{R}\}$

2) Déterminez le nombre k pour que l'équation $(z+2i)(\bar{z}+4)=k$ admette $2-3i$ comme solution, puis calculez l'autre solution de cette équation.

Exercice 11

Soit $t=\dfrac{z^2}{1-z}$ avec $z=x+yi\in\mathbb{C}$.

1) Calculez t en fonction de x et de y.

2) Construisez le lieu géométrique des points images P(z) pour lesquels $t\in\mathbb{R}$

Exercice 12

1) Déterminez puis représentez dans le plan de Gauss les ensembles suivants :

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,(iz+1+2i)(\bar{z}-3i)\in\mathbb{R}\right\}$$

$$B=\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,(iz+1+2i)(\bar{z}-3i)\in i\mathbb{R}\right\}$$

2) Déterminez $A\cap B$

Exercice 13

Démontrez les propriétés suivantes :

1) $\forall z\in\mathbb{C}\quad |z|\in\mathbb{R}_+$

2) $\forall z\in\mathbb{C}\quad |z|=0\Leftrightarrow z=0$

3) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

4) $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et déduisez-en que $\forall z' \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

5) $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$. Sous quelle condition a-t-on l'égalité ?

6) $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\bar{z}| = |z|$

Exercice 14

Calculez les rcc des nombres suivants :

1) $z = 8 + 6i$

2) $z = -45 - 28i$

3) $z = 1 + 2i$

4) $z = -9$

5) $z = 4i$

6) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

7) $z = 3 - 5i$

Exercice 15

Résolvez les équation suivantes dans $\mathbb{C}$

1) $3z^2 - 4z + 2 = 0$

2) $z^2 - 5iz - 6 = 0$

3) $(i+1)x^2 + 4 = 4x$

4) $u^2 + (\sqrt{2} - 2)iu + 2\sqrt{2} = 0$

5) $\frac{1}{2}z^2 + (2+i)z + 8i - 1 = 0$

6) $\frac{3}{1-2i}z^2 - (5+i)z + \frac{18}{5} + \frac{14}{5i} = 0$

Exercice 16

Factorisez les polynômes suivants :

1) $P(z) = z^2 + 4$

2) $P(x) = 2x^2 + ix + 3$

3) $P(z)=3z^2+(8i-2)z-2i-5$

4) $P(z)=(1-3i)z^2-(4+18i)z+i-17$

Exercice 17

Résolvez les équation suivantes dans $\mathbb{C}$

1) $\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{3}$

2) $x^4+12x^2+27=0$

3) $z^4+6z^2+25=0$

4) $z^4+(5+2i)z^2-50i=0$

5) $3u^4-4u^3+4u-3=0$

Exercice 18

Ecrivez les complexes suivants sous forme trigonométrique :

1) $z=-7$

2) $z=\frac{5i}{7}$

3) $1+i\sqrt{3}$

4) $z=-3-i\sqrt{3}$

5) $z=\sqrt{3}-3i$

6) $z=-16+16i$

7) $z=5-7i$

8) $z=3i-(\sqrt{3}-i)$

9) $z=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^{46}$

Exercice 19

Ecrivez les complexes suivants sous forme algébrique :

1) $z=2\text{cis}120°$

2) $z=5e^{\frac{11\pi}{6}i}$

3) $z = \text{cis}45° \cdot \text{cis}30°$ (en déduire $\cos 75°$ et $\sin 75°$)

4) $z = \left(2\text{cis}\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(3\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^3$ (en déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$)

5) $z = (3-3i)^{17}$

6) $z = \frac{2e^{i60°}}{5e^{i45°}}$ (en déduire $\cos 15°$ et $\sin 15°$)

7) $z = \frac{(2-2i)^5}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^4}$

8) $z = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 (2-2i)^6$

9) $z = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4 \left(-\sqrt{3}-3i\right)^6}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^8}$

Exercice 20

Soit $z = \frac{(1-i)^5}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}$.

1) Calculez z sous forme algébrique et trigonométrique.

2) Déduisez-en les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 21

Soit $z = r \cdot \text{cis}\varphi$. Quel est le module et l'argument de $\bar{z}$?

Exercice 22

Les racines cubiques complexes de 1 :

1) Calculez les trois racines cubiques de 1 sous forme trigonométrique et algébrique. On note **j** la racine cubique d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

2) Représentez ces racines dans le plan de Gauss.

3) Montrez que $j^2 = \bar{j}$ est une des trois racines.

4) Résolvez l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$. Que constatez-vous ?

Exercice 23

Calculez les racines suivantes et faites à chaque fois une figure dans le plan de Gauss :

1) les racines cubiques de i

2) les racines quatrièmes de -16

3) les racines cinquièmes de $-\sqrt{3} + i$

4) les racines sixièmes de $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

5) les racines cubiques de $\dfrac{(2-2i)^4}{\left(-\sqrt{3}-i\right)^6 (-2i)^{10}}$

Exercice 24

Somme des n racines n-ièmes de z

1) Calculez les n racines n-ièmes de 1.

2) Montrez que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} \quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$.

3) Déduisez-en que la somme des n racines n-ièmes de 1 vaut 0.

4) Déduisez-en que la somme des n racines n-ièmes de tout complexe z vaut 0.

Exercice 25

Résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1) $z^6 + 1 + i = 0$

2) $x^4 + 81 = 0$

3) $y^3 - 2 + i = 0$

4) $t^4 + t^2 + 1 = 0$

5) $z^4 + 8\sqrt{2} = 8i\sqrt{2}$

6) $z^6 - z^3 + 1 = 0$

Exercice 26

Effectuez les divisions suivantes (utilisez le schéma général et vérifiez par le schéma de Horner si possible) :

1) $\left(z^3-3iz^2+(1-i)z+5\right)\div\left(z^2-z+3\right)$

2) $\left(3x^3+(6i-9)x^2-5ix+10+15i\right)\div(x-3+2i)$

3) $\left((5-i)z^3+4iz+9-i\right)\div\left(z^2-5\right)$

4) $\left(z^2-2iz+5-i\right)\div(z+i)$

5) $\left(z^3+(3-3i)z^2+(3-7i)z+14-8i\right)\div(z+3-i)$

Exercice 27

Pour quelles valeurs du paramètre m le polynôme $P(z)=z^4-2iz^3+(i-m)z+2m$ est-il divisible par $z-2i$?

Exercice 28

Résolvez les équations suivantes :

1) $2z^3-(21+i)z^2+(68+2i)z-64+8i=0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

2) $z^3+(7+10i)z^2+(120i-81)z+110i-407=0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

3) $z^3+(8i-9)z^2-(5+42i)z+45+30i=0$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.

4) $2z^3+(5-11i)z^2-(16+18i)z-16+4i=0$ sachant qu'elle a une racine imaginaire pure.

5) $z^3+4(1-i)z^2-2(2+7i)z-16+8i=0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

6) $z^3+2z^2+7iz-5-i=0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exercice 29

Factorisez le polynôme $P(z)=z^4+4z^3+8z^2+4z+7$ sachant qu'il admet deux racines imaginaires pures.