Branches infinies

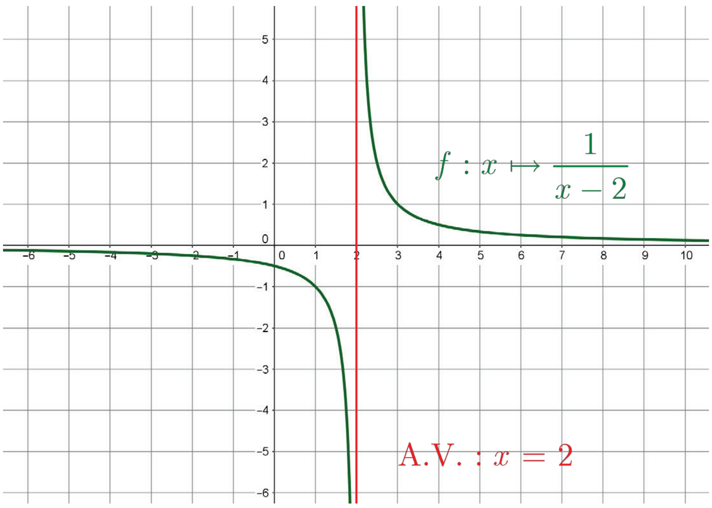
Une branche infinie du graphe d'une fonction est une partie de la courbe qui s'éloigne infiniment de l'origine. Nous étudions deux types de branches infinies :

- Quand la courbe se rapproche de plus en plus d'une droite lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, cette droite est appelée une ***asymptote*** au graphe de la fonction.
- Quand la courbe semble *regarder* dans une direction d'une droite mais tout en s'en éloignant de cette droite, on dit que la courbe possède une ***branche parabolique*** dont l'axe est donné par la direction que *regarde* la courbe.

Dans toute la suite, a et b sont des ***nombres réels***.

a) ***Asymptote verticale*** :

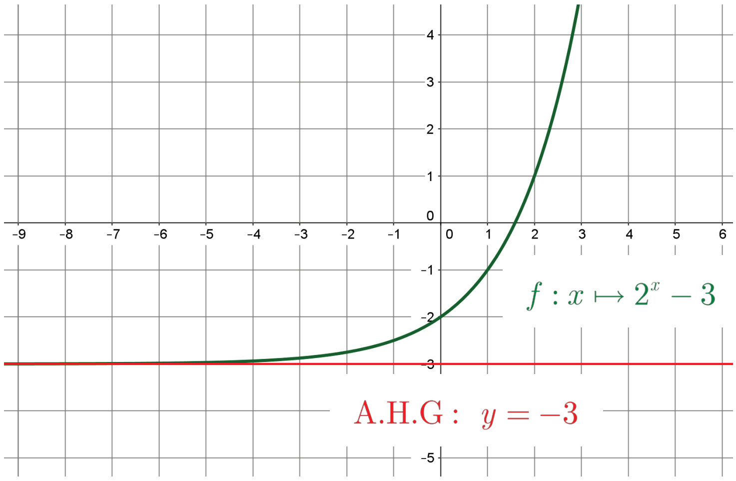
$$\boxed{\lim_{x \to a} f\left(x\right) = \pm\infty \Rightarrow \text{A.V. : } x = a}$$



b) ***Asymptote horizontale*** :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = b \Rightarrow \text{A.H. (à droite) : } y = b}$$

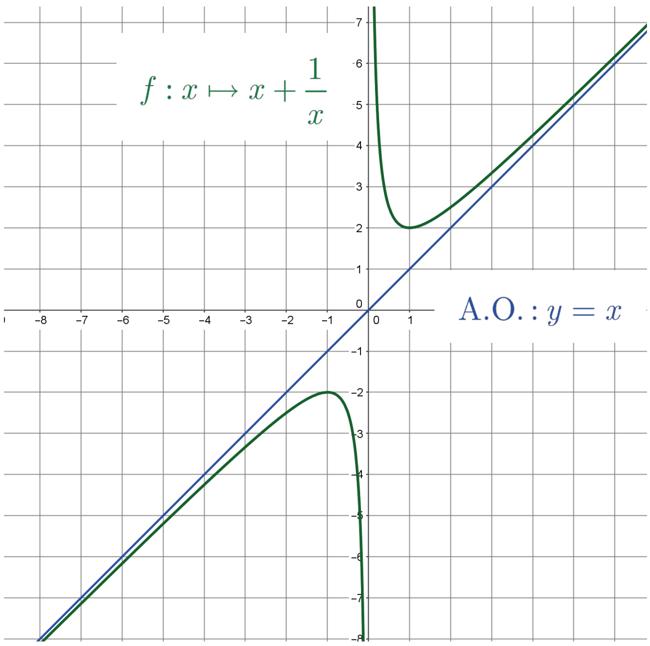
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) = b \Rightarrow \text{A.H. (à gauche) : } y = b}$$



Lorsque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, il y a ***4 possibilités*** (en pratique ...)

c1) ***Asymptote oblique*** :

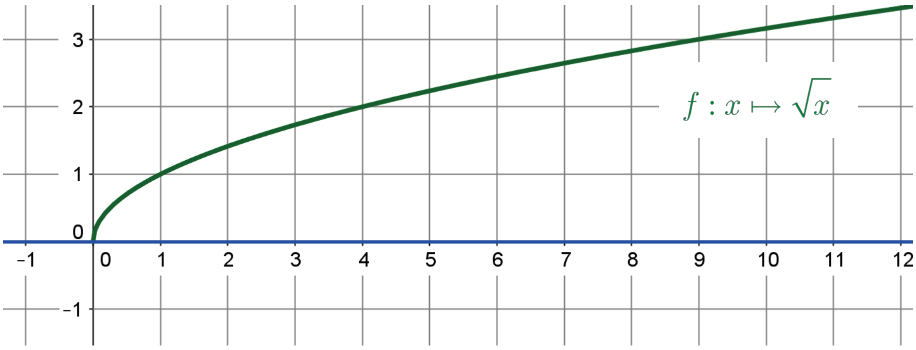
$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \text{ et } \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = b \Rightarrow \text{A.O. : } y = ax + b}$$



c2) ***Branche parabolique de direction asymptotique*** (Ox)

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \text{B.P. de direction } (Ox)}$$

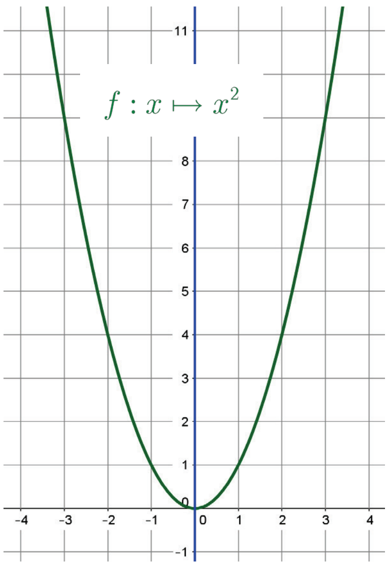
(La courbe regarde dans la direction de l'axe des abscisses mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \to \pm\infty$, $f(x) \mapsto \pm\infty$, mais $f(x)$ est négligeable, c.-à-d. petit par rapport à x.)



c3) ***Branche parabolique de direction asymptotique*** (Oy)

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ et} \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow \text{B.P. de direction } (Oy)\end{array}}$$

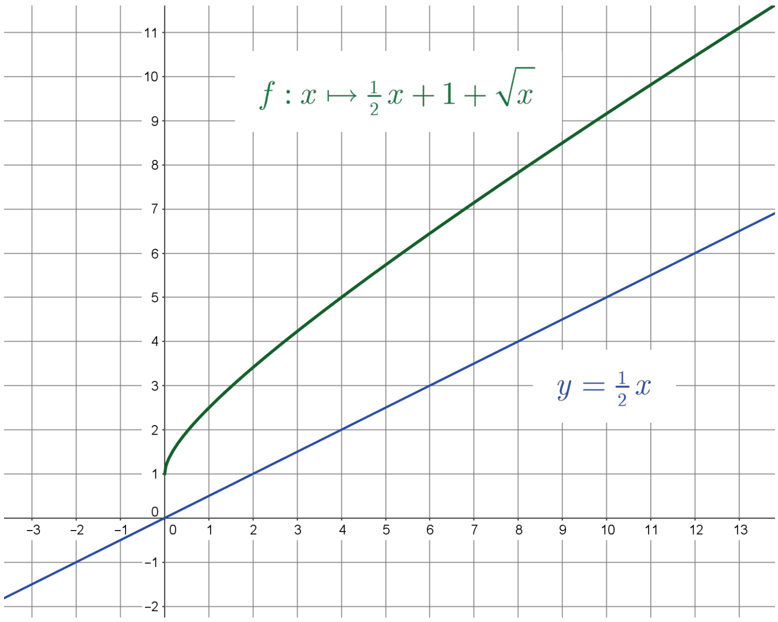
(La courbe regarde dans la direction de l'axe des ordonnées mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \to \pm\infty$, $f(x) \mapsto \pm\infty$, et $f(x)$ est grand par rapport à x.)



c4) ***Branche parabolique de direction asymptotique*** $y = ax$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = \pm\infty \text{ et} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = a \neq 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - ax\right) = \pm\infty \Rightarrow \text{B.P. de D.A. } y = ax \end{array}}$$

(La courbe regarde dans la direction de la droite $y = ax$ mais elle s'en éloigne de plus en plus. Plus précisément : lorsque $x \to \pm\infty$, le rapport $\dfrac{f(x)}{x} \mapsto a$, mais la différence $f(x) - ax \to \pm\infty$, c.-à-d. le graphe de f s'éloigne de plus en plus de la droite $y = ax$.)



Exercices

Etudier l'existence et la nature des branches infines des graphes des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$

2) $f : x \mapsto 2x\sqrt{x-3}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x}{x+1}$

4) $f : x \mapsto \sqrt{x-1} - 2x + 1$

5) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x\sqrt{x} - 1}{x+1}$