Simplification d'expressions contenant des valeurs absolues & applications

Rappelons la définition de la valeur absolue :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, la valeur absolue d'un réel ***positif*** x est ce réel x, la valeur absolue d'un réel ***négatif*** x est l'opposé de ce réel x. ***Par exemple*** : $|3| = 3$, car $3 \geq 0$ et $|-3| = -(-3) = 3$, car $-3 \leq 0$. Une conséquence immédiate de la définition est la propriété essentielle de la valeur absolue :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x| \geq 0$$

Lorsque vous rencontrez des expressions algébriques contenant des valeurs absolues, il est très souvent nécessaire d'***éliminer les valeurs absolues***. Pour cela, on discute toujours en utilisant la définition.

a) Nous commençons par étudier des expressions contenant ***une seule*** valeur absolue. ***Par exemple*** :

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } 2x-4 \geq 0 \text{ c.-à.d. si } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{si } 2x-4 \leq 0 \text{ c.-à.d. si } x \leq 2 \end{cases}$$

Il est pratique de faire la simplification dans un tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	0	$2x-4$

On écrit l'***opposé*** de l'expression entre $|\;|$ là où elle est $-$.

On écrit l'expression entre $|\;|$ là où elle est $+$.

La ligne dans le tableau qui contient le signe de $2x-4$ est en fait ***superflue*** car on connaît la :

<u>Règle du signe</u> d'un binôme $ax+b$ du 1^er^ degré ($a \neq 0$) :
Le signe de a se trouve toujours à droite du zéro.

Dans la suite, on fera donc directement le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\lvert 2x-4 \rvert$	$-2x+4$	0	$2x-4$

De même, ***par exemple*** pour simplifier $\lvert 3-x \rvert$, on obtient :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\lvert 3-x \rvert$	$3-x$	0	$x-3$

Rappelons également la :

<u>Règle du signe</u> d'un trinôme ax^2+bx+c du 2^e^ degré ($a \neq 0$) :
Le signe de a est partout, sauf entre les racines.

Donc, ***par exemple***, pour simplifier $\lvert x^2-6x-7 \rvert$, on détermine d'abord les racines du trinôme, qui sont -1 et 7, puis on obtient le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	-1		7	$+\infty$
$\lvert x^2-6x-7 \rvert$	x^2-6x-7	0	$-x^2+6x+7$	0	x^2-6x-7

Autre exemple :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$\lvert 4-9x^2 \rvert$	$9x^2-4$	0	$4-9x^2$	0	$9x^2-4$

Exercice 1. Ecrire sans valeur absolue à l'aide d'un tableau les expressions suivantes : a) $\lvert 4-\frac{x}{2} \rvert$ b) $\lvert 3x^2-4x+8 \rvert$ c) $\lvert -2x^2-1 \rvert$ d) $\lvert -5x+\frac{1}{3} \rvert$ e) $\lvert -2x^2+3x+35 \rvert$ f) $\lvert (x+5)^2 \rvert$ g) $\lvert -x^2-2x-1 \rvert$.

b) Lorsque une expression contient plusieurs valeurs absolues, il faut compter une ligne par valeur absolue dans le tableau. ***Par exemple***, soit la fonction :

$$f(x) = 5 \cdot \lvert 2x-4 \rvert - \lvert 3-x \rvert ,$$

définie sur $\mathbb{R}$. En combinant les deux premiers tableaux ci-dessus, on obtient le tableau de simplification suivant :

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$\lvert 2x-4\rvert$	$-2x+4$	0	$2x-4$		$2x-4$
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$f(x)$	$5\cdot(-2x+4)$ $-(3-x)$ $=-9x+17$	-1	$5\cdot(2x-4)$ $-(3-x)$ $=11x-23$	10	$5\cdot(2x-4)$ $-(x-3)$ $=9x-17$

Remarques :

a) Les valeurs 2 et 3 de la 1re ligne du tableau sont parfois appelées ***valeurs critiques*** de $f(x)$. En effet, pour ces valeurs-là, l'une ou l'autre valeur absolue change d'expression et donc aussi $f(x)$.

b) On remarque que $f(2)=-9\cdot 2+17=-1$ ou $f(2)=11\cdot 2-23=-1$. De même : $f(3)=11\cdot 3-23=10$ ou $f(3)=9\cdot 3-17=10$. On peut donc prendre soit l'expression à gauche soit l'expression à droite dans le tableau ! (Ceci provient de raisons de ***continuité***, que vous ne comprenez pas encore pour le moment. Patience …)

Exercice 2. Ecrire sans valeur absolue à l'aide d'un tableau les fonctions suivantes : a) $g(x)=|x-1|+|3-2x|$ b) $h(x)=\left|x^2-1\right|-3\cdot\left|x^2+2x-15\right|$

c) $k(x)=\dfrac{|x|-2}{\left|x^2-4\right|}$ (Attention au domaine ici !)

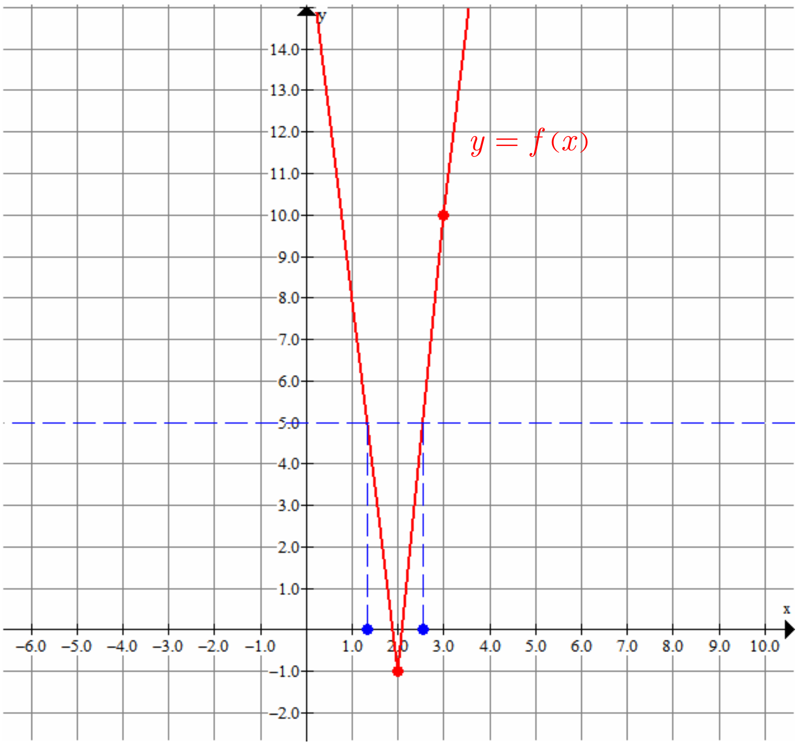
c) ***Applications.*** Les tableaux de simplification précédents servent dans beaucoup de situations ou interviennent des valeurs absolues :

- résolution d'équations et d'inéquations,
- représentation graphique de fonctions,
- calcul de limites …

Illustrons cela à l'aide de l'exemple précédent :

$$f(x)=5\cdot|2x-4|-|3-x|=\begin{cases}-9x+17 & \text{si } x\le 2\\ 11x-23 & \text{si } 2\le x\le 3\\ 9x-17 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$$

f est une fonction ***affine par morceaux*** : son graphe est constitué de ***morceaux de droites*** c.-à-d. de ***segments*** et de ***demi-droites*** :



Graphiquement on observe que l'équation $f(x) = 5$ a deux solutions. Ce sont les abscisses des deux ***points bleus*** sur la figure. Résolvons ***algébriquement*** cette équation :

<u>1</u>

1$^{\text{er}}$ cas : $\boxed{x \le 2}$. Alors : $f(x) = 5 \Leftrightarrow -9x + 17 = 5 \Leftrightarrow -9x = -12 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

Cette valeur étant bien ≤ 2, on l'accepte comme solution.

2$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{2 \le x \le 3}$. Alors : $f(x) = 5 \Leftrightarrow 11x - 23 = 5 \Leftrightarrow 11x = 28 \Leftrightarrow x = \frac{28}{11}$.

Cette valeur étant bien comprise entre 2 et 3, on l'accepte comme solution.

3$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{x \ge 3}$. Alors : $f(x) = 5 \Leftrightarrow 9x - 17 = 5 \Leftrightarrow 9x = -22 \Leftrightarrow x = -\frac{22}{9}$.

Cette valeur doit être ***écartée*** car elle est < 3. Finalement :

$$\boxed{S = \left\{\frac{4}{3}, \frac{28}{11}\right\}}$$

Pour les inéquations, on procède de façon analogue.

Exercice 3. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \le 5$ où f est la fonction précédente. ***Réponse*** :

1$^{\text{er}}$ cas : $\boxed{x \le 2}$. Alors : $f(x) \le 5 \Leftrightarrow -9x + 17 \le 5 \Leftrightarrow -9x \le -12 \Leftrightarrow x \ge \frac{4}{3}$.

$$\boxed{S_1 = \left[\frac{4}{3}, 2\right]}.$$

2$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{2 \le x \le 3}$. Alors : $f(x) \le 5 \Leftrightarrow 11x - 23 \le 5 \Leftrightarrow 11x \le 28 \Leftrightarrow x \le \frac{28}{11}$.

$$\boxed{S_2 = \left[2, \frac{28}{11}\right]}.$$

3$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{x \ge 3}$. Alors : $f(x) \le 5 \Leftrightarrow 9x - 17 \le 5 \Leftrightarrow 9x \le -22 \Leftrightarrow x \le -\frac{22}{9}$.

Il est impossible d'avoir à la fois $x \ge 3$ et $x \le -\frac{22}{9}$. Donc : $\boxed{S_3 = \varnothing}$

Ainsi : $\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[\frac{4}{3}, \frac{28}{11}\right]}$

Pour terminer, appliquons la simplification de $f(x)$ à un ***calcul de limites*** :

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-9x + 17) = -18 + 17 = -1$,
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (11x - 23) = 11 \cdot 2 - 23 = -1$,
- Donc : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$.

De même :

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (11x - 23) = 11 \cdot 3 - 23 = 10$,
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (9x - 17) = 9 \cdot 3 - 17 = 10$,
- Donc : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 10$.

Exercice résolu 4.

(1) Quel est le domaine de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x-1}{|2x+1| - 3 \cdot |2-x|} \ ?$$

(2) Ecrire $g(x)$ sans valeur absolue sur son domaine.

(3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 7} g(x)$ et interpréter graphiquement.

Réponse.

(1) C.E. : $|2x+1| - 3 \cdot |2-x| \neq 0$

$\Leftrightarrow |2x+1| \neq |3 \cdot (2-x)|$

$\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 3 \cdot (2-x)$ et $2x + 1 \neq -3 \cdot (2-x)$

$\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 6 - 3x$ et $2x + 1 \neq -6 + 3x$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq 7$

$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$

$\boxed{|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b}$

Donc : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1, 7\}$.

(2) Simplifions d'abord le dénominateur de $g(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$\lvert 2x+1\rvert$ $-3 \cdot \lvert 2-x\rvert$	$-2x-1$ $-3 \cdot (2-x)$ $= x-7$	$-\frac{15}{2}$	$2x+1$ $-3 \cdot (2-x)$ $= 5(x-1)$	5	$2x+1$ $-3 \cdot (x-2)$ $= -x+7$

Donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$g(x)$	$\dfrac{x-1}{x-7}$	0	$\dfrac{x-1}{5x-5}=\dfrac{1}{5}$, si $x\neq 1$.		$\dfrac{x-1}{-x+7}$, si $x\neq 7$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{5(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$;

$\lim\limits_{x\to 7^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 7^-}\dfrac{x-1}{-x+7}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 7^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 7^+}\dfrac{x-1}{-x+7}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty$,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x+7$	$+$	0	$-$

$\lim\limits_{x\to 7} g(x)=$ n'existe pas.

Interprétation graphique : La courbe représentative de g admet un trou en $\left(1,\frac{1}{5}\right)$ et une A.V. d'équation $x=7$.

Exercice résolu 5

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{\left|x^2-1\right|}$.

(1) Quel est le domaine de la fonction f ?

(2) Etudier la parité de f.

(3) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue sur son domaine.

(4) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et interpréter graphiquement.

Réponse.

(1) C.E. : $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -1$.

Donc : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(2) f est une fonction paire, car :

$$\left(\forall x\in\mathcal{D}_f\right)\quad f(-x)=\frac{(-x)^2-|-x|}{\left|(-x)^2-1\right|}=\frac{x^2-|x|}{\left|x^2-1\right|}=f(x).$$

(3) Les valeurs critiques sont $-1,0$ et 1. Comme f est paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. D'où le tableau de simplification :

x	0		1	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	0	x		x
$\lvert x^2-1\rvert$		$1-x^2$	0	x^2-1
$f(x)$	0	$\dfrac{x^2-x}{1-x^2} = \dfrac{x(x-1)}{(1-x)(1+x)} = -\dfrac{x}{x+1}$	/	$\dfrac{x^2-x}{x^2-1} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{x}{x+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2}$, $\longrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet un « saut » en l'abscisse 1.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

Comme f est paire, on obtient les limites en -1 par symétrie du graphe :

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}$, $\longrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet un « saut » en l'abscisse -1.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.