EXPONENTIELLE ET LOGARITHME NEPERIENS

1) Propriétés algébriques

$\forall x, x' \in \mathbb{R}$

$e^x > 0$

$\ln e^x = x$

$e^{x+x'} = e^x \cdot e^{x'}$

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$e^{x-x'} = \dfrac{e^x}{e^{x'}}$

$\forall r \in \mathbb{R} \quad \left(e^x\right)^r = e^{rx}$

$e^x = e^{x'} \Leftrightarrow x = x'$

$e^x \leq e^{x'} \Leftrightarrow x \leq x'$

$e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^1 = e$

$\forall x, x' \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{et} \quad \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$e^{\ln x} = x$

$\ln xx' = \ln x + \ln x'$

$\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$

$\ln \dfrac{x}{x'} = \ln x - \ln x'$

$\forall r \in \mathbb{R} \quad \ln x^r = r \ln x$

$\ln x = \ln x' \Leftrightarrow x = x'$

$\ln x \leq \ln x' \Leftrightarrow x \leq x'$

$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1$

2) Propriétés analytiques

$D_{\exp} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} e^x = 0^+$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(e^x\right)' = e^x$

$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

$D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$

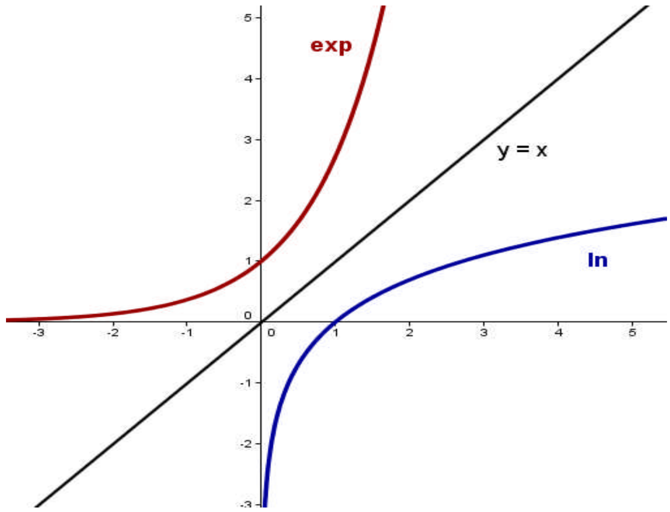
$\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$

$\left(\ln|u(x)|\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$\lim\limits_{0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$



EXPONENTIELLE ET LOGARITHME DE BASE a

1) La base a est un réel strictement positif différent de 1 : $\boxed{a > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1}$

2) On *peut* toujours se ramener au logarithme ou à l'exponentielle <u>népériens</u> par les formules:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boxed{a^x = e^{x \ln a}}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x}$

3) Ces formules montrent en particulier que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(a^x\right)' = \ln a \cdot a^x$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left(\log_a |x|\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$

$\left(a^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot \ln a \cdot a^{u(x)}$ $\qquad \left(\log_a |u(x)|\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$

et comme $\log_a$ est la réciproque de $\exp_a$ on a également :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a a^x = x$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad a^{\log_a x} = x$

$a^1 = a$ $\qquad \log_a a = 1$

4) Si a>1 :

Toutes les formules sur le logarithme et l'exponentielle népériens restent valables à l'exception des formules sur les dérivées énoncées sous **3)** et les courbes de $\exp_a$ et de $\log_a$ ont la même allure que celles du logarithme et de l'exponentielle népériens.

5) Si 0<a<1 :

du fait qu'alors **ln a < 0** découlent les changements suivants par rapport au cas a>1 :

- pour les <u>inégalités</u> :

$\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad a^x \leq a^{x'} \Leftrightarrow x \boxed{\geq} x'$ $\qquad \forall x, x' \in \mathbb{R}_+^* \quad \log_a x \leq \log_a x' \Leftrightarrow x \boxed{\geq} x'$

- pour les <u>limites</u> :

$\lim\limits_{+\infty} a^x = 0^+$ $\qquad \lim\limits_{+\infty} \log_a x = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} a^x = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{0^+} \log_a x = +\infty$