

CHAPITRE III

CALCUL VECTORIEL DANS L'ESPACE

<u>A) VECTEURS DANS L'ESPACE</u>	p 2
1) Exemple : force exercée par un aimant	p 2
2) Définitions et notations	p 3
3) Egalité de deux vecteurs	p 5
4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel	p 6
5) Addition et soustraction des vecteurs	p 8
6) Propriétés du calcul vectoriel	p 12
7) Forme vectorielle du théorème de Thalès	p 15
8) Equation vectorielle d'une droite	p 15
9) Equation vectorielle d'un plan	p 17
10) Milieu d'un segment	p 18
11) Centre de gravité d'un triangle	p 19
 <u>B) VECTEURS ET COORDONNEES</u>	 p 21
1) Repères	p 21
2) Coordonnées d'un vecteur et calcul vectoriel	p 25
 <u>C) PRODUIT SCALAIRE</u>	 p 29
1) Définitions	p 29
2) Interprétation géométrique	p 30
3) Expression analytique	p 32
4) Propriétés	p 34
5) Vecteur normal et équations d'un plan	p 35
6) Equations d'une sphère	p 38
 <u>D) EQUATIONS D'UN PLAN ET D'UNE DROITE</u>	 p 39
1) Equations d'un plan	p 39
2) Systèmes d'équations d'une droite	P 41
 <u>EXERCICES</u>	 p 43

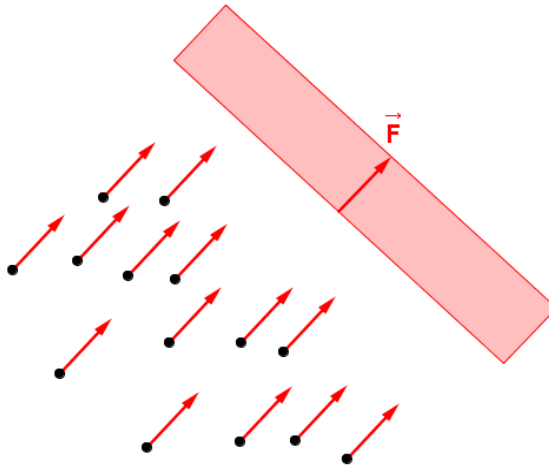
A) VECTEURS DANS L'ESPACE

D'une manière générale les vecteurs sont définis exactement de la même manière dans le plan et dans l'espace et ont les mêmes propriétés. Cette première partie du cours peut donc être considérée comme une révision de notions déjà traitées les années précédentes. Nous noterons \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace.

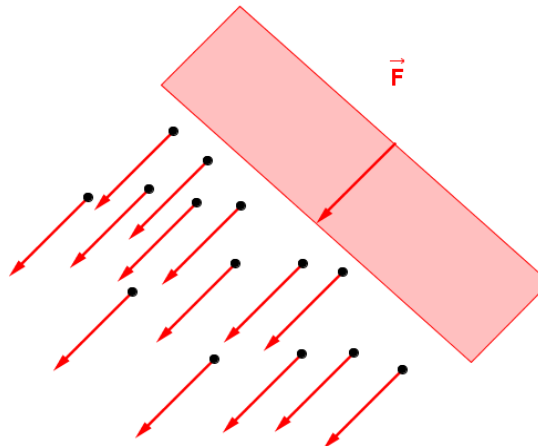
1) Exemple : force exercée par un aimant

Tout le monde sait qu'en plaçant des billes en fer au voisinage d'un aimant (Magnet), celles-ci sont soit attirées, soit repoussées par celui-ci. En physique on parle d'une **force** (d'attraction ou de répulsion), notée \vec{F} , exercée par l'aimant sur ces billes et celle-ci est représentée par des **flèches** partant de chacune de ces billes.

Voici l'exemple d'un aimant (rectangle rouge) qui attire les billes (points noirs) :



et l'exemple d'un aimant qui les repousse :



On constate que sur chacune de ces deux figures toutes les flèches ont :

- la **même longueur** : celle-ci caractérise en effet l'**intensité** de la force (ainsi les flèches de la 1^{re} figure sont moins longues que celles la 2^e figure : c'est que la force d'attraction de la 1^{re} figure est moins importante que la force de répulsion de la 2^e figure)
- la **même direction (les flèches sont toutes parallèles)** : celle qui est perpendiculaire à la surface de l'aimant tournée vers les billes et qui indique la direction dans laquelle celles-ci vont se déplacer sous l'impulsion de la force \vec{F}
- le **même sens** : sur la 1^{re} figure les flèches sont tournées vers l'aimant pour signifier que les billes sont attirées par l'aimant et vont donc se déplacer vers celui-ci, alors que sur la 2^e figure les flèches sont orientées dans le sens opposé pour signifier que les billes sont au contraire repoussées par l'aimant et vont s'éloigner de lui.

La notion de « **force** » en physique correspond à la notion de « **vecteur** » en mathématiques.

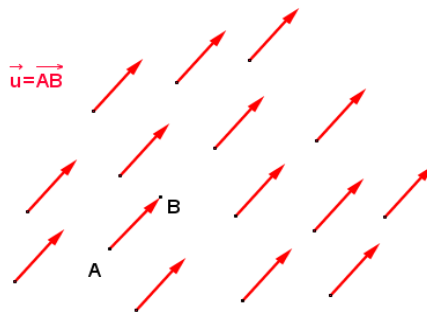
2) Définitions et notations

Définitions

Un vecteur est un *ensemble infini de flèches* qui ont toutes :

- même **direction**
- même **sens**
- même **longueur** appelée norme du vecteur

Chacune de ces flèches est un représentant du vecteur.



Notations

- un vecteur peut être noté de deux manières :
 - une lettre minuscule surmontée d'une flèche, p. ex. : \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{a} , \vec{b} , ...

- deux lettres majuscules, désignant **l'origine et l'extrémité** d'un représentant particulier du vecteur, surmontées d'une flèche, p. ex. : \overrightarrow{AB}
- o la norme d'un vecteur \vec{u} est notée $\|\vec{u}\|$
- o l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté \mathcal{V}

Remarques

- pour connaître un vecteur il suffit de connaître un seul représentant du vecteur !
- la norme du vecteur \overrightarrow{AB} n'est rien d'autre que la distance de A à B :
$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$$
- la norme d'un vecteur est un nombre réel positif ou nul : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$
- En 5^e vous avez vu qu'une translation qui transforme A en B est notée $t_{\overrightarrow{AB}}$: on dit que c'est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} !

Cas particuliers

- Le vecteur \overrightarrow{AA} est le seul vecteur de norme nulle. En effet :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$$

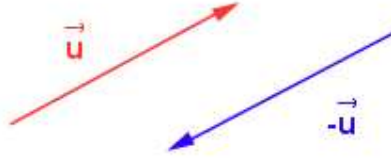
De plus ce vecteur n'a pas de direction (ou toutes les directions, ce qui revient au même...) donc pas de sens non plus ! Ce vecteur est appelé **vecteur nul** et il est noté $\vec{0}$:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots \quad \text{et} \quad \|\vec{0}\| = 0$$

- Un vecteur \vec{u} tel que $\|\vec{u}\| = 1$ est appelé **vecteur unitaire**.
- Soient A et B deux points distincts, alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BA} ont même direction (car $(AB) = (BA)$), même norme (car $AB = BA$), mais des sens opposés : on dit que \overrightarrow{BA} est le **vecteur opposé** de \overrightarrow{AB} (ou que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BA} sont **des vecteurs opposés**) et on note :

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

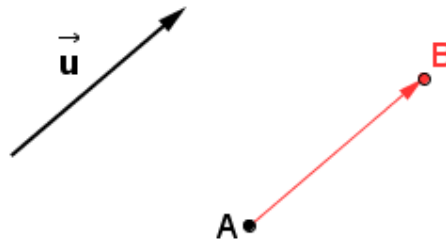
De manière générale, deux **vecteurs opposés** \vec{u} et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs qui ont même direction, même norme et des sens opposés.



Propriété

Soit un vecteur \vec{u} et un point A, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire qu'il existe un représentant unique de \vec{u} qui admet A comme origine).

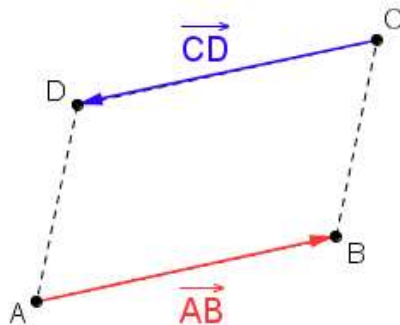
$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad \exists ! B \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$



3) Egalité de deux vecteurs

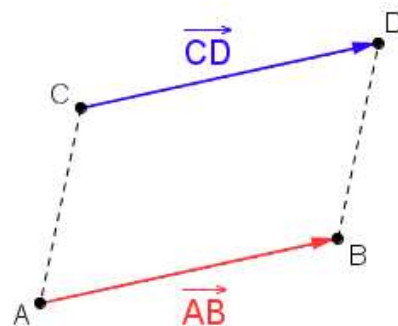
- D'après la définition d'un vecteur, deux **vecteurs** sont **égaux** si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soient A, B, C et D quatre points non alignés du plan. Pour que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} soient égaux il faut donc que $(AB) \parallel (CD)$ (même direction !) et que $AB = CD$ (même norme !), ce qui est vérifié ssi les quatre points forment un parallélogramme. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

1^{er} cas : $(ABCD) = \#$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

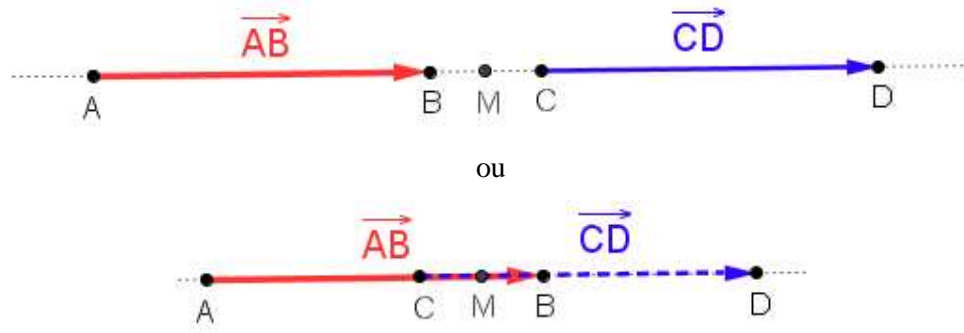
2^e cas : $(ABDC) = \#$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Ainsi on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#$.

- Soient A, B, C et D quatre points alignés du plan. Comme $AB = CD$, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux ssi $AB = CD$ et \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ont même sens :



Sur ces deux figures on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $M = \text{milieu de } [AD] = \text{milieu de } [BC]$ donc on peut considérer (ABDC) comme une sorte de « parallélogramme aplati », ce qui nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

Soient A, B, C et D quatre points quelconques de l'espace \mathcal{E} , alors :

$$(ABDC) = \# \text{ si et seulement si } \text{milieu de } [AD] = \text{milieu de } [BC]$$

- Nous avons alors montré que :

$$\forall A, B, C, D \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#$$

- Remarque : Sur une figure on voit facilement que :

$$\begin{aligned} (ABDC) = \# &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

4) **Multiplication d'un vecteur par un nombre réel**

- Exemple des aimants :

En remplaçant un aimant par un aimant 2, 3, ... k fois ($k \in \mathbb{R}_+^*$) plus fort, la force exercée sur les billes gardera la même direction et le même sens mais son intensité (c'est-à-dire la longueur des flèches) sera « multipliée » par 2, 3, ... k. La nouvelle force sera alors notée $2 \cdot \vec{F}$, $3 \cdot \vec{F}$, ... $k \cdot \vec{F}$, ce qui définit une multiplication d'une force (donc d'un vecteur) par un réel positif. Il semble alors naturel de définir $-2 \cdot \vec{F}$, $-3 \cdot \vec{F}$, ... , $-k \cdot \vec{F}$

comme les forces (ou vecteurs) *opposées* aux forces $2 \cdot \vec{F}$, ... $k \cdot \vec{F}$ et $0 \cdot \vec{F} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, ce qui nous amène à poser la définition suivante :

● **Définition**

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur défini par :

○ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors : $0 \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

○ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k > 0$ alors :

- $k \cdot \vec{u}$ a même direction que \vec{u}

- $k \cdot \vec{u}$ a **même sens** que \vec{u}

- $\|k \cdot \vec{u}\| = k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

○ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k < 0$ alors :

- $k \cdot \vec{u}$ a même direction que \vec{u}

- $k \cdot \vec{u}$ a le **sens opposé** de \vec{u}

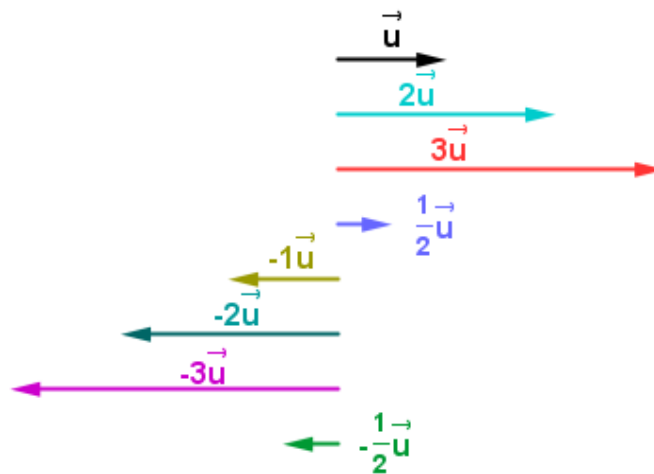
- $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

● **Remarque** : Dans tous les cas on a :

- $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

- $k \cdot \vec{u}$ et \vec{u} ont même direction (en posant que le vecteur nul a la même direction que n'importe quel vecteur \vec{u})

● **Exemples**



On voit que toutes ces flèches, c'est-à-dire tous les représentants de \vec{u} et de $k \cdot \vec{u}$, sont parallèles. On exprime ceci en disant que \vec{u} et $k \cdot \vec{u}$ sont *colinéaires*.

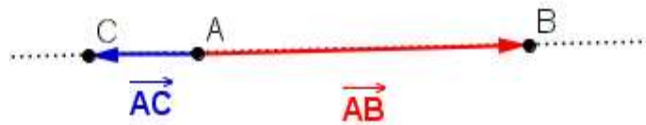
- **Définition**

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** ssi il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

- **Propriétés**

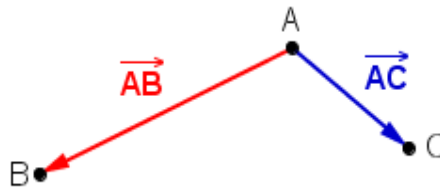
- $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur \vec{u} car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$
- si on convient que $\vec{0}$ a *toutes les directions*, alors on peut dire deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont même direction
- En observant les deux figures suivantes :

figure 1



A, B, C sont alignés et \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires

figure 2



A, B, C ne sont pas alignés et \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires

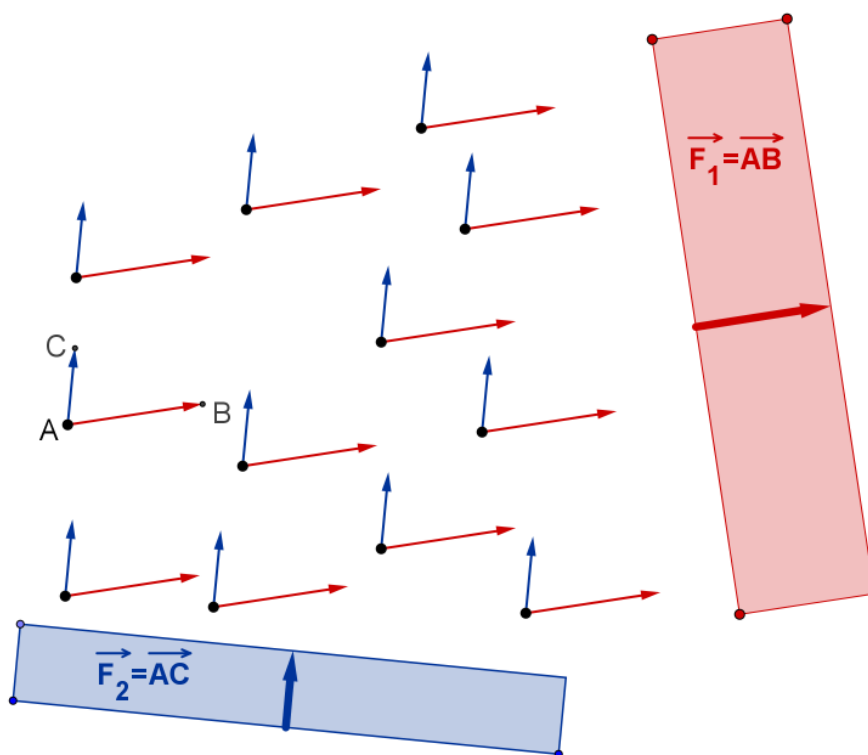
on voit que :

$\forall A, B, C \quad A, B, C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires}$

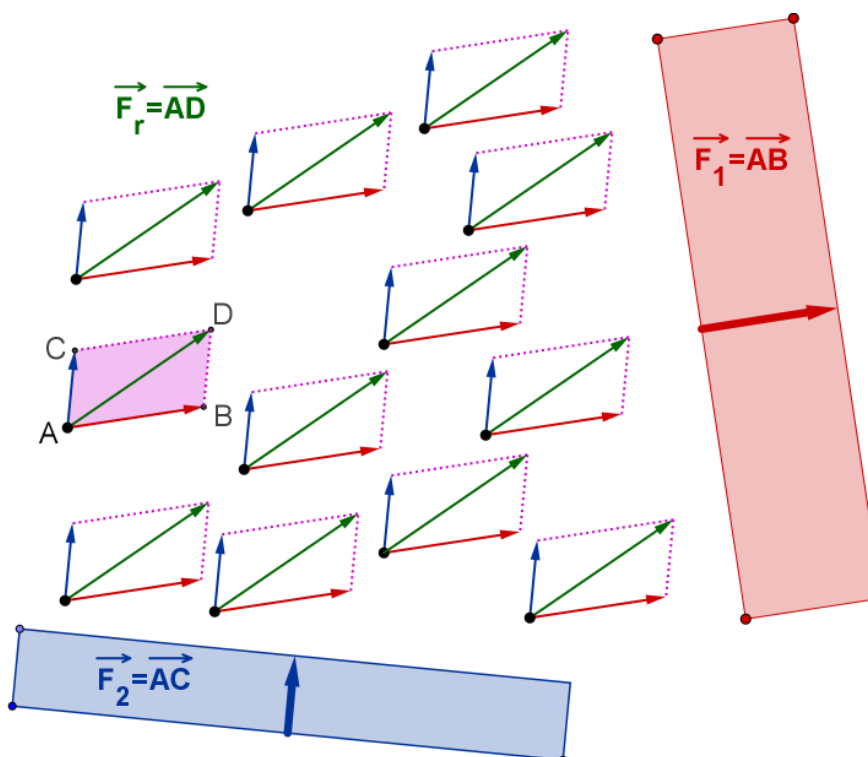
5) **Addition et soustraction des vecteurs**

- **Exemple**

Reprenons l'exemple des billes soumises à la force d'attraction \vec{F}_1 d'un aimant (rouge sur la figure) et rajoutons un deuxième aimant (bleu) qui attire les billes avec la force \vec{F}_2 dans une autre direction :



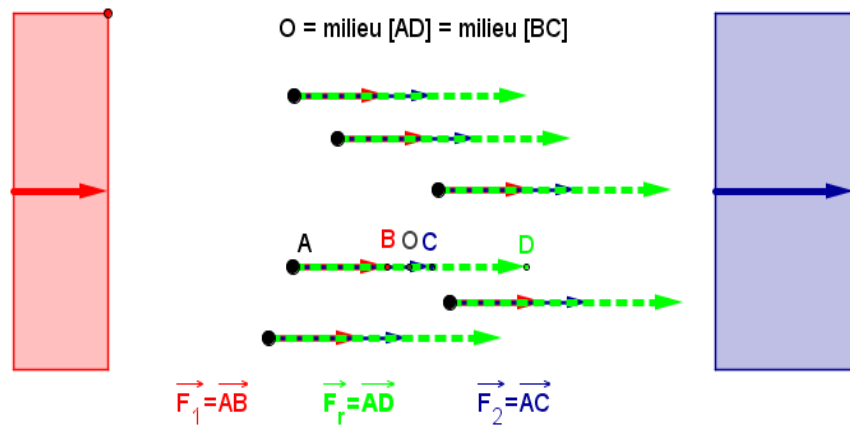
Alors l'expérience montre que tout se passe *comme si* les billes étaient attirées par un troisième aimant (invisible) dans une direction « intermédiaire » avec une force \vec{F}_r représentée par les flèches vertes :



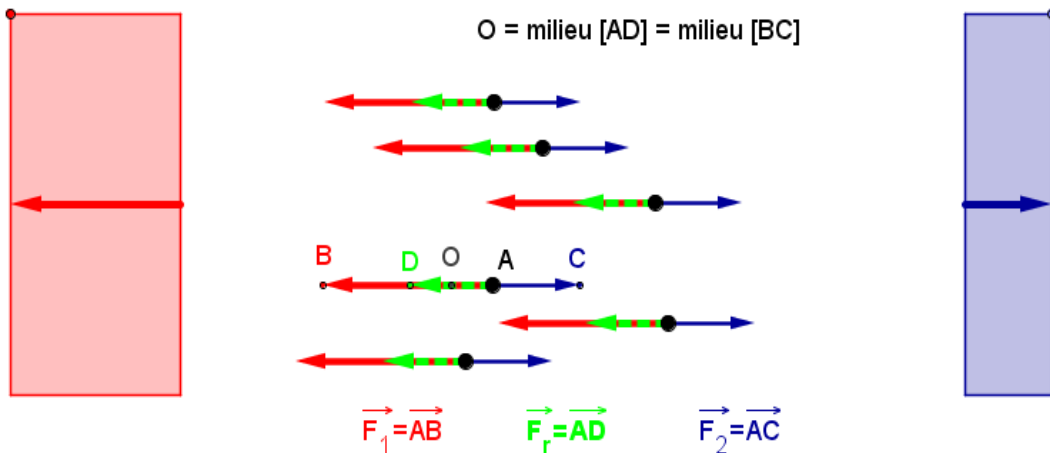
De plus cette force \vec{F}_r , appelée **force résultante** en physique, est telle que ses représentants forment la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont formés par les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\text{Si } \vec{F}_1 = \vec{AB} \text{ et } \vec{F}_2 = \vec{AC} \text{ alors } \vec{F}_r = \vec{AD} \text{ avec } (ABDC) = \# (*)$$

Regardons ce qui se passe si les deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ont même direction et même sens :



ou encore même direction et sens opposés :



On constate que (*) reste valable puisque (ABDC) est un parallélogramme aplati ! Que peut-on dire de la norme de \vec{AD} ?

.....

.....

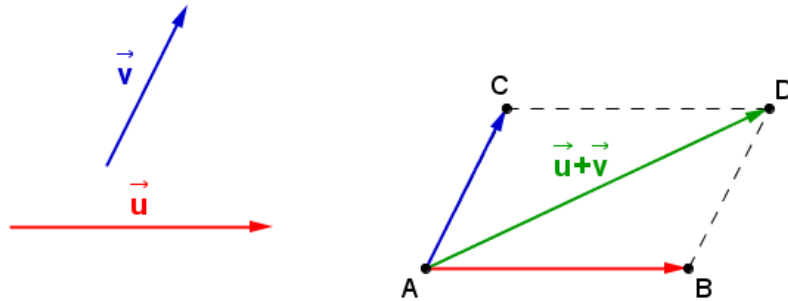
Que se passe-t-il si $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$?

• **Définition**

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, alors on appelle **somme de ces deux vecteurs** le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, dont *un représentant* est construit selon l'une des deux règles (équivalentes) suivantes :

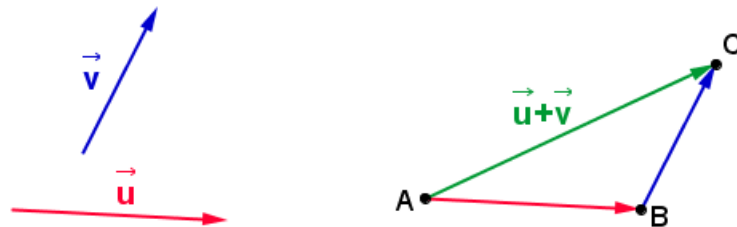
Règle du parallélogramme :

On choisit un point quelconque A, puis on construit le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis le point D tel que (ABDC) = # (éventuellement aplati, si les deux vecteurs sont colinéaires, voir figures page 10). Alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$:



Règle simplifiée :

Sur la figure précédente $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ puisque (ABDC) = #, donc il suffit de construire le représentant de \vec{v} **d'origine B**, c'est-à-dire le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et on a directement $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, sans passer par le # :



Remarque

La règle du parallélogramme consiste à choisir deux représentants de **même origine** (\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}), alors qu'avec la règle simplifiée on choisit deux représentants **consécutifs** (\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC}).

- Il est facile de voir sur ces figures que pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ on a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \vec{v} = k \cdot \vec{u} \text{ ou } \vec{u} = k \cdot \vec{v}$ (\vec{u} et \vec{v} ont **même sens**)

- La règle simplifiée montre que :

$$\boxed{\forall A, B, C \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Cette formule, très importante pour le calcul vectoriel, est appelé relation de Chasles.

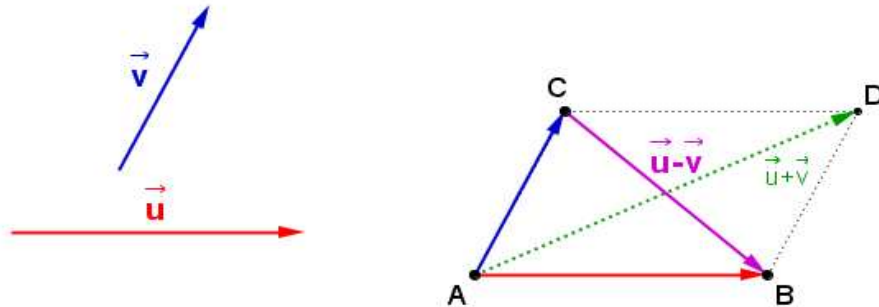
- Soustraction dans \mathcal{V}

Nous savons qu'on peut définir la soustraction de deux nombres a et b à partir de l'addition en posant : $a - b = a + (-b)$, c'est-à-dire que pour retrancher un nombre b d'un nombre a , on ajoute son opposé. On fait de même pour définir la soustraction dans \mathcal{V} :

$$\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} - \vec{v} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{u} + (-\vec{v})}$$

Construction de $\vec{u} - \vec{v}$:

On choisit un point quelconque A , puis on construit le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, le point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis le point D tel que $(ABDC) = \#$. Comme $-\vec{v} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, on a $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ d'après la relation de Chasles :



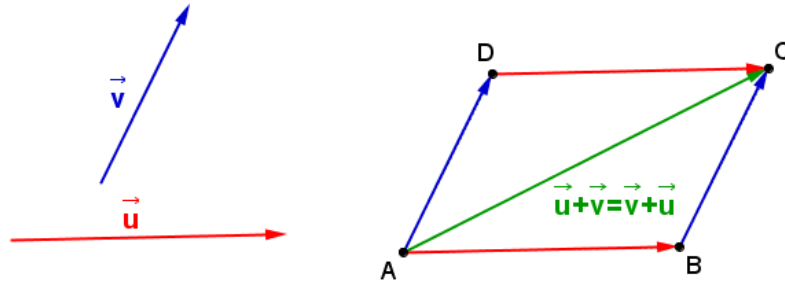
6) Propriétés du calcul vectoriel

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs quelconques et a , b deux nombres réels.

- L'addition des vecteurs est **commutative** : $\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$

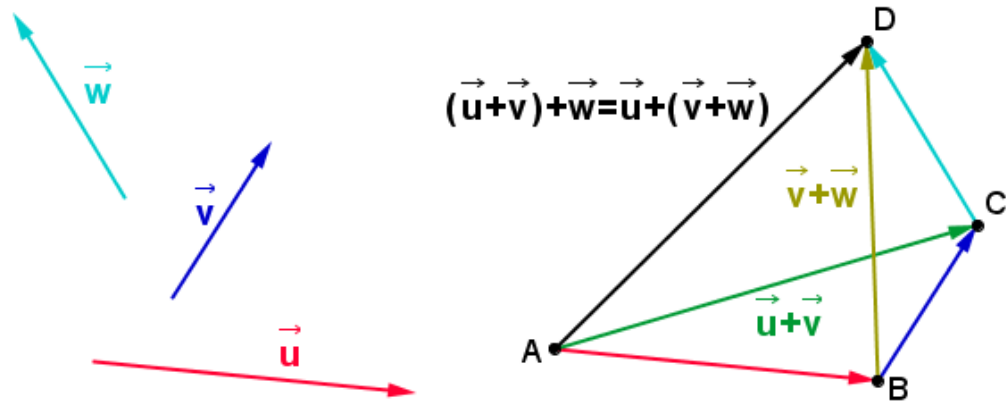
En effet soient A , B , C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et D le point tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$, alors d'après la relation de Chasles on a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$



- L'addition des vecteurs est **associative** : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

En effet soient A, B, C, D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles et on a de même : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.



- Comme l'addition des vecteurs est commutative et associative, on peut écrire une somme de plusieurs vecteurs sans parenthèses et dans l'ordre qu'on veut :

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u} + \vec{v} = \dots$$

- $\vec{0}$ est l'**élément neutre** de l'addition des vecteurs : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

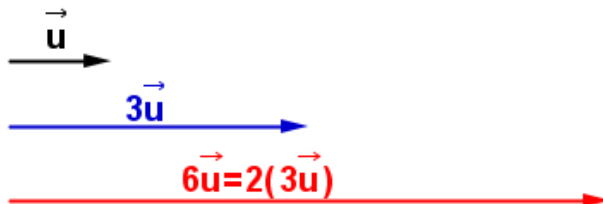
En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors comme $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ on a : $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ d'après la relation de Chasles.

- $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors comme $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ on a : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

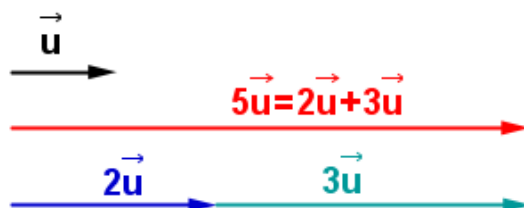
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ et $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ et $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ (évident !)
- $(ab) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$ et on écrit simplement : $ab\vec{u}$

p. ex. $a = 2$ et $b = 3$



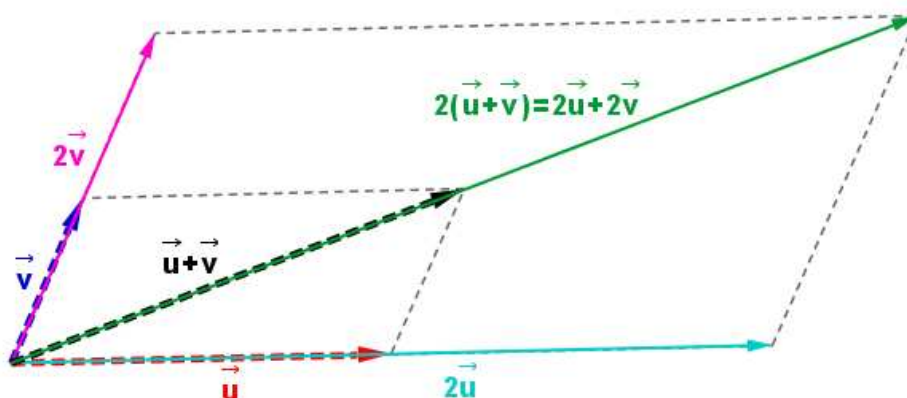
- $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$

p. ex. $a = 2$ et $b = 3$



- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$

p. ex. $a = 2$



Remarques

- Ces propriétés montrent que les règles de calcul sur les vecteurs « fonctionnent » de la même manière que celles sur les nombres réels, sauf qu'on ne peut PAS multiplier ou diviser deux vecteurs entre eux !

- Les deux dernières propriétés montrent qu'il y a une sorte de « distributivité » pour le calcul vectoriel : la différence avec la *vraie distributivité* est qu'ici on multiplie des objets de *nature différente* : des nombres et des vecteurs !
- L'ensemble \mathcal{V} muni de l'addition des vecteurs (**opération interne** !) est un **groupe** (l'addition des vecteurs est associative, possède un élément neutre, le vecteur nul et tout vecteur a un symétrique, le vecteur opposé) **commutatif** (l'addition est en plus commutative).
- L'ensemble \mathcal{V} muni de l'addition (interne) des vecteurs et de la multiplication (externe) des vecteurs par les réels est appelé **espace vectoriel**.

7) Forme vectorielle du théorème de Thalès

Le théorème de Thalès et sa réciproque, que vous avez vus en 4^e, peut être formulé dans le langage vectoriel de la manière suivante :

Théorème de Thalès

Soit un triangle ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ et $(BC) \parallel (DE)$. Alors il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DE} = k \cdot \overrightarrow{BC}$$

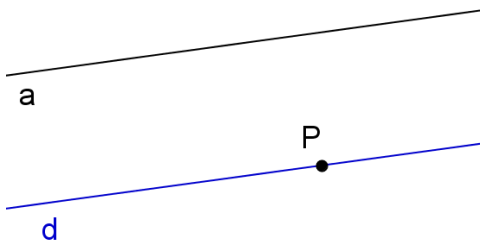
Réciproque du théorème de Thalès

Soit un triangle ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ et un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

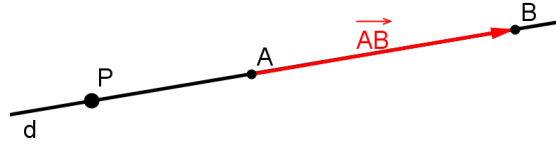
Alors $(BC) \parallel (DE)$.

8) Equation vectorielle d'une droite

- Soit un point P et une droite a, alors il existe exactement une seule droite d qui passe par A et qui est parallèle à a comme le montre la figure suivante :



La droite d est donc entièrement déterminée si on connaît un point de d et une droite qui lui est parallèle, c'est-à-dire qui indique sa **direction** ! Or pour indiquer une direction on peut également utiliser un vecteur : la direction de la droite d est connue si on connaît n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ où $A \in d$ et $B \in d$:



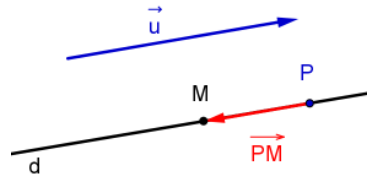
Un tel vecteur est appelé **vecteur directeur** de d .

- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous
- Soient deux droites a et b de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} respectivement. Alors on a :

$$a \parallel b \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

- Soit d une droite définie par un point P et un vecteur directeur \vec{u} et M un point quelconque du plan. Deux cas peuvent se présenter :

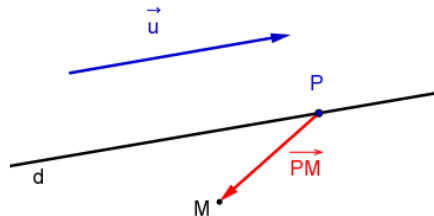
1^{er} cas : $M \in d$



\vec{u} et \overrightarrow{PM} sont colinéaires

2^e cas :

$M \notin d$



\vec{u} et \overrightarrow{PM} ne sont pas colinéaires

D'où :

$$\begin{aligned} \forall M \quad M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

En d'autres termes $d = \{M / \overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u}, k \in \mathbb{R}\}$ et l'équation $\overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u}$ est appelée

équation vectorielle de d .

• Définition

On dit que deux vecteurs de l'espace \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux**, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $a \perp b$ où a et b sont deux droites de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} respectivement.

9) Equation vectorielle d'un plan

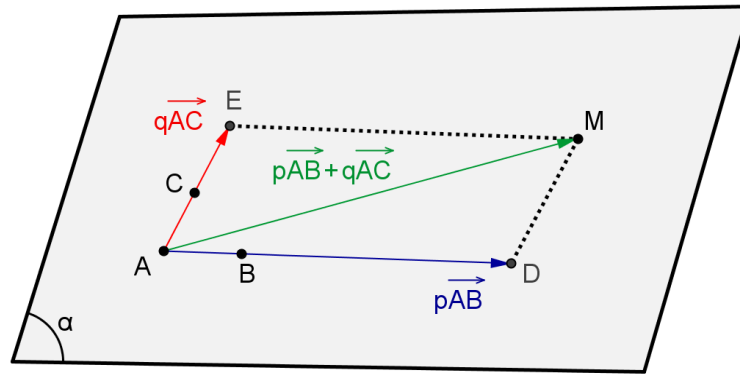
• Définition

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace, on appelle **combinaison linéaire** de \vec{u} et \vec{v} tout vecteur de la forme $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$ avec $p, q \in \mathbb{R}$.

• Théorème

Soient A, B, C trois points non alignés de \mathcal{E} et M un point quelconque de \mathcal{E} , alors :

$$\boxed{M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}}$$



démonstration

Supposons d'abord que $M \in (ABC)$, plusieurs cas peuvent se présenter :

- si $M = A$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$
- si $M = B$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$
- si $M = C$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$
- si $M \neq A$ et $M \neq B$ et $M \neq C$, alors il existe $D \in (AB)$ tel que $(DM) \parallel (AC)$ et

$E \in (AC)$ tel que $(EM) \parallel (AB)$. Alors $(ADME) = \#$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Or $D \in (AB)$ donc $\exists p \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AD} = p \cdot \overrightarrow{AB}$ et $E \in (AC)$ donc $\exists q \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AE} = q \cdot \overrightarrow{AC}$ et par conséquent $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$.

Dans tous les cas \overrightarrow{AM} est une combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{AC} .

Réciproquement supposons que $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$ où p et q sont deux réels.

- si $p = 0$ alors $\overrightarrow{AM} = q \cdot \overrightarrow{AC}$ et A, M, C sont alignés donc $M \in (ABC)$
- si $q = 0$ alors $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB}$ et A, M, B sont alignés donc $M \in (ABC)$

- si $p \cdot q \neq 0$ alors :

$$\exists ! D \in (AB) \text{ tel que } D \neq A \text{ et } \overrightarrow{AD} = p \cdot \overrightarrow{AB} \text{ et}$$

$$\exists ! E \in (AC) \text{ tel que } E \neq A \text{ et } \overrightarrow{AE} = q \cdot \overrightarrow{AC}$$

donc $(AB) = (AD)$ et $(AC) = (AE)$ et par conséquent $(ABC) = (ADE)$.

De plus $(ADME) = \#$ puisque $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, donc $M \in (ADE)$, ce qui montre que $M \in (ABC)$

Dans tous les cas on a montré que $M \in (ABC)$, cqfd.

- **Conséquence**

Soit un plan α et A, B, C trois points non alignés de α . Alors $\alpha = (ABC)$ et

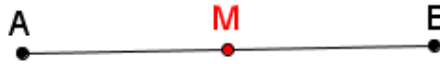
$M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} =$ combinaison linéaire de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{AC} c'est-à-dire :

$$\alpha = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC} \text{ avec } p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

On dit que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux **vecteurs directeurs** (non colinéaires) de α et que $\overrightarrow{AM} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC}$ est une **équation vectorielle** de α .

10) **Milieu d'un segment**

- Soit M le milieu de $[AB]$:

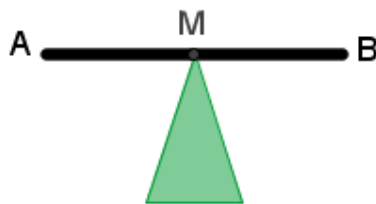


On voit facilement que :

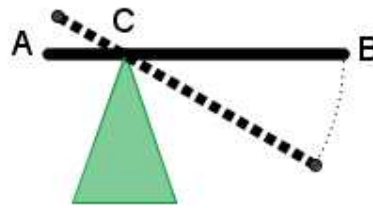
$$\forall A, B, M \quad M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

- **Interprétation physique :**

Plaçons un bâton $[AB]$ sur la pointe d'un cône en position parfaitement horizontale, puis lâchons-le : si le bâton repose en son milieu M sur la pointe du cône, le bâton reste en équilibre, si par contre il repose sur un point C différent du milieu, il y a déséquilibre et il va tomber.



(équilibre)



(déséquilibre)

Le vecteur \overrightarrow{MA} (respectivement \overrightarrow{MB}) représente la force exercée par l'extrémité A (resp. B) du bâton sur le point M et l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ exprime le fait que la force résultante est la force nulle : il ne se passe rien, le bâton reste en équilibre !

Par contre la force résultante $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ n'étant pas nulle, elle va entraîner le bâton vers le bas (il tombe)...

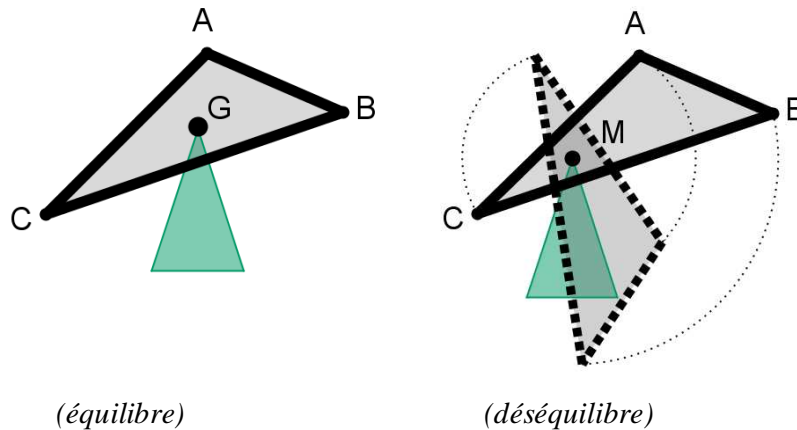
Conclusion :

Le milieu est le point d'équilibre appelé centre de gravité du segment (du bâton).

11) Centre de gravité d'un triangle

- **Interprétation physique :**

Soit ABC un triangle (découpé dans une plaque homogène, p. ex. une plaque en bois). Nous allons chercher « le point d'équilibre » de ce triangle, c'est-à-dire le point G tel que le triangle posé horizontalement sur ce point reste en équilibre :



Comme pour le bâton, les vecteurs \overrightarrow{GA} , \overrightarrow{GB} et \overrightarrow{GC} représentent les forces exercées respectivement par les sommets A, B et C sur le point G. Le point d'équilibre est alors caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, alors que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$.

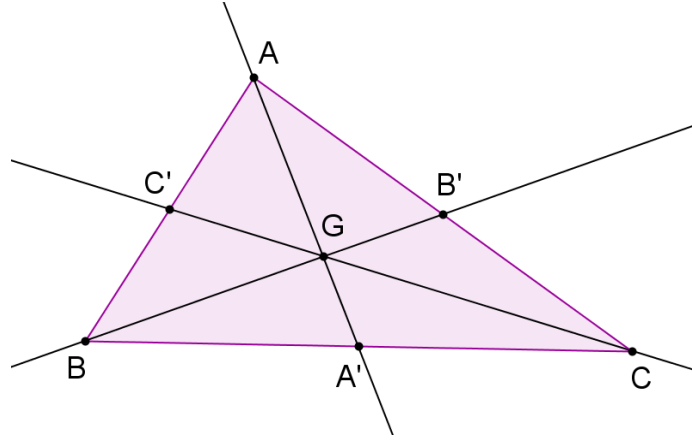
- **Définition**

On appelle centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$ le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}}$$

• **Propriétés de G**

Soient un triangle $\Delta(ABC)$, A' , B' , C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ et G le centre de gravité, alors :



○ $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'},}$

démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ (Chasles)} \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3 \cdot \overrightarrow{GA} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AG} \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{AA'} = 3 \cdot \overrightarrow{AG} \text{ (voir exercice 19)} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AA'} \end{aligned}$$

Les deux autres égalités se démontrent de façon analogue (exercice !)

○ $\boxed{G \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')}$

démonstration :

Nous venons de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et \overrightarrow{AG} sont colinéaires, donc les points A , A' et G sont alignés (propriété p. 8) et par conséquent $G \in (AA')$. On montre de même que $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$, d'où le résultat.

Remarque :

Comme les droites (AA') , (BB') et (CC') sont les trois **médianes** du triangle, nous venons de montrer que G est le point d'intersection de ces médianes !

Exercices 1 à 13

B) VECTEURS ET COORDONNEES

1) Repères

a) Repères d'une droite



- Soit d une droite et $O, I \in d$ avec $O \neq I$, alors :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI} \quad (*)$$

- De plus ce réel k est unique.

En effet s'il existait k et k' tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM} = k' \cdot \overrightarrow{OI}$ alors :

$$k \cdot \overrightarrow{OI} = k' \cdot \overrightarrow{OI} \Leftrightarrow (k - k') \cdot \overrightarrow{OI} = \vec{0} \Leftrightarrow k = k' \text{ ou } \overrightarrow{OI} = \vec{0},$$

or $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$, donc $k = k'$.

- Définition

L'unique réel k tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ est appelé l'**abscisse** du point M dans le **repère** (O, \overrightarrow{OI}) de d d'**origine** O . On note $M(k)$.

Ainsi :

$$M(k) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$$

b) Repères d'un plan

- Soit α un plan et O, I, J trois points non alignés de α , alors on a d'après le théorème page 17 :

$$M \in (OIJ) = \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{OJ}$$

$$\Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$$

- De plus le couple (p, q) est unique.

En effet si $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OM} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ}$ alors :

$$p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow (p - p') \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \quad (*).$$

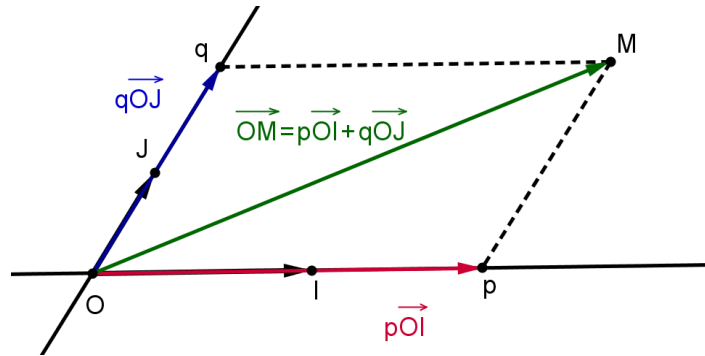
Mais alors $p - p' = 0$ car sinon on aurait $\overrightarrow{OI} = \frac{q' - q}{p - p'} \cdot \overrightarrow{OJ}$ et O, I, J seraient alignés

(puisque \overrightarrow{OI} et \overrightarrow{OJ} colinéaires) ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent

$p = p'$ et $(*)$ devient :

$$0 \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \vec{0} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow q' - q = 0 \text{ ou } \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

donc $q' - q = 0$ puisque $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$ et on a également $\boxed{q = q'}$, cqfd.



- **Définition**

L'unique couple de réels (p, q) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ est appelé le couple des **coordonnées** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de α d'**origine** O. On note $M(p, q)$, p est appelé l'**abscisse** et q l'**ordonnée** de M. Ainsi :

$$\boxed{M(p, q) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}}$$

- **Cas particuliers**

Si $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$ on dit que $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les deux vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

c) **Repères de l'espace**

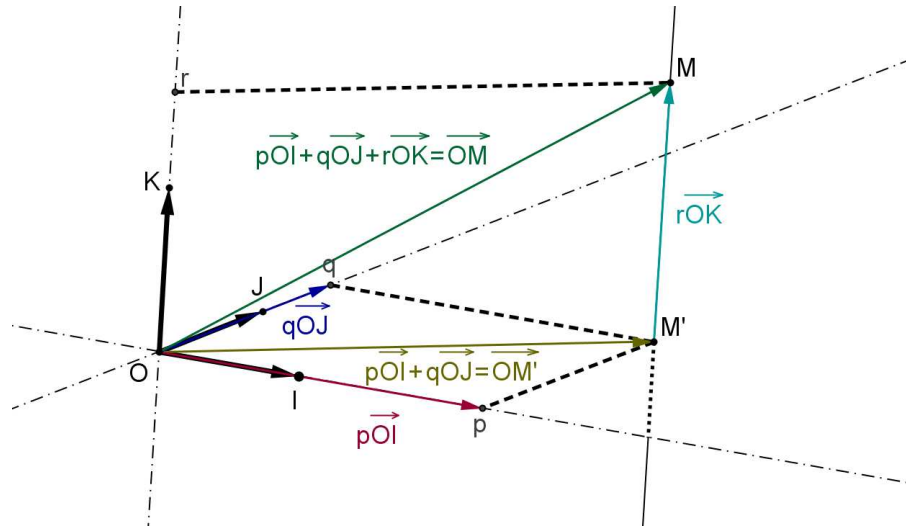
- Soient O, I, J, K quatre points non coplanaires (OIJK = tétraèdre) et M un point quelconque dans l'espace.

Alors il existe une droite d unique qui passe par M et qui est parallèle à OK : cette droite coupe le plan OIJ en M' et on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ (1).

Dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ du plan OIJ : M'(p, q) donc $\overrightarrow{OM'} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ (2).

D'autre part $\overrightarrow{M'M}$ et \overrightarrow{OK} sont colinéaires (puisque $M'M = d \parallel OK$) donc il existe un réel r unique tel que $\overrightarrow{M'M} = r \cdot \overrightarrow{OK}$ (3).

En remplaçant (2) et (3) dans (1) il vient : $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$.



- **Définition**

L'unique triplet de réels (p, q, r) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$ est appelé le triplet des **coordonnées** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ de l'espace d'**origine** O. On note $M(p, q, r)$, p est appelé l'**abscisse**, q l'**ordonnée** et r la **cote** de M. Ainsi :

$$M(p, q, r) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$$

Les trois vecteurs du repère sont souvent notés \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

- **Cas particuliers**

Si les vecteurs \overrightarrow{OI} , \overrightarrow{OJ} et \overrightarrow{OK} sont deux à deux orthogonaux on dit que $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les trois vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = \|\overrightarrow{OK}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

- **Conclusion**

Un repère est toujours constitué d'un point fixe appelé origine du repère et :

- d'un vecteur directeur \overrightarrow{OI} dans le cas d'une droite
- de deux vecteurs directeurs non colinéaires dans le cas d'un plan
- de trois vecteurs dont aucun n'est une combinaison linéaire des deux autres (ce qu'on exprime en disant qu'ils sont *linéairement indépendants*) dans le cas de l'espace.

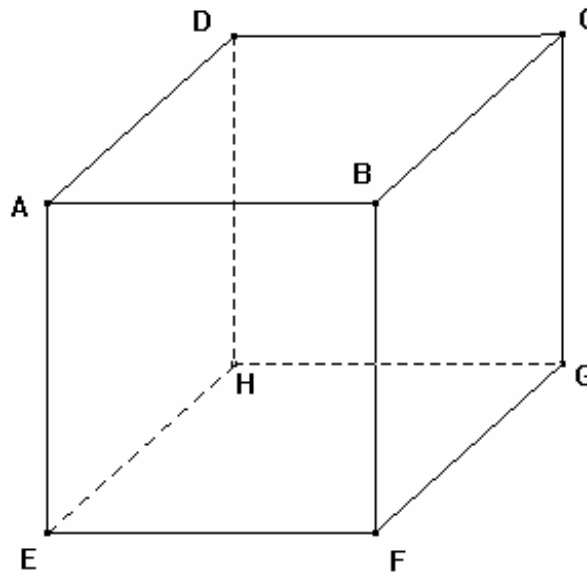
Pour repérer un point M il faut donc

- 1 abscisse si $M \in d : M(p)$
- 2 coordonnées si $M \in \alpha : M(p, q)$
- 3 coordonnées si $M \in \mathcal{E} : M(p, q, r)$

On dit qu'une droite est de **dimension** 1, un plan de dimension 2 et l'espace de dimension 3.

• **Exemples**

Soit ABCDEFGH un cube :



Dans le repère $(H, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{FB})$:

A(; ;), B(; ;), C(; ;), D(; ;), E(; ;),
F(; ;), G(; ;), H(; ;)

Dans le repère $(B, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF})$:

A(; ;), B(; ;), C(; ;), D(; ;), E(; ;),
F(; ;), G(; ;), H(; ;)

Dans le repère $\left(A, 2 \cdot \overrightarrow{AB}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD}, 3 \cdot \overrightarrow{AE}\right)$:

A(; ;), B(; ;), C(; ;), D(; ;), E(; ;),
F(; ;), G(; ;), H(; ;)

2) Coordonnées d'un vecteur et calcul vectoriel

\mathcal{E} est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Définition

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $M(p, q, r) \in \mathcal{E}$ le point de \mathcal{E} qui vérifie $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, alors :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

On dit que (p, q, r) est le triplet des **coordonnées** de \vec{u} dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note :

$$\vec{u}(p, q, r) \text{ ou } \vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Leftrightarrow \vec{u} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

Remarques :

- Prendre les mêmes coordonnées pour le point M et pour le vecteur \vec{u} se justifie par le fait qu'un vecteur \vec{u} est entièrement déterminé quand on connaît un de ses représentants \overrightarrow{OM} .
- La notation « verticale » des coordonnées est utilisée exclusivement pour les vecteurs et servira souvent à remplacer un « calcul vectoriel » par un « calcul matriciel » sur des matrices uni-colonnes.
- Il résulte de ce qui précède que deux vecteurs (ou deux points) sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère donné.

b) Formules valables dans n'importe quel repère

- Soient $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{E}$ et $B(x_B, y_B, z_B) \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Exemple : $A(5; -3; 7)$, $B(-1; 0; 9)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha(x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}) = \alpha x_u \vec{i} + \alpha y_u \vec{j} + \alpha z_u \vec{k}, \text{ d'où :}$$

$$\alpha \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \\ \alpha z_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k} + x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k} \\ &= (x_u + x_v) \vec{i} + (y_u + y_v) \vec{j} + (z_u + z_v) \vec{k} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

Exemples : $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors : $3 \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$, $-7 \vec{v} \begin{pmatrix} 56 \\ -77 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$2 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ -55 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -65 \\ -29 \end{pmatrix}.$$

- Milieu d'un segment $[AB]$:

$$M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \\ z_A - z_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \\ z_B - z_M \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B - 2x_M \\ y_A + y_B - 2y_M \\ z_A + z_B - 2z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_M = 0 \\ y_A + y_B - 2y_M = 0 \\ z_A + z_B - 2z_M = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

D'où : $\boxed{M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)}$

- Centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \\ z_A - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_G \\ y_B - y_G \\ z_B - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_G \\ y_C - y_G \\ z_C - z_G \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B + x_C - 3x_G \\ y_A + y_B + y_C - 3y_G \\ z_A + z_B + z_C - 3z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{G = \text{centre de gravité de } \Delta(ABC) \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)}$$

Exemples :

$A(-17; 8; -9)$, $B(23; 0; -11)$, $C(-2; 15; -24)$ alors :

milieu de $[AB]$: $M(3; 4; -10)$ et centre de gravité de $\Delta(ABC)$: $G\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{3}; -\frac{44}{3}\right)$

c) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

On suppose maintenant que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un R.O.N..

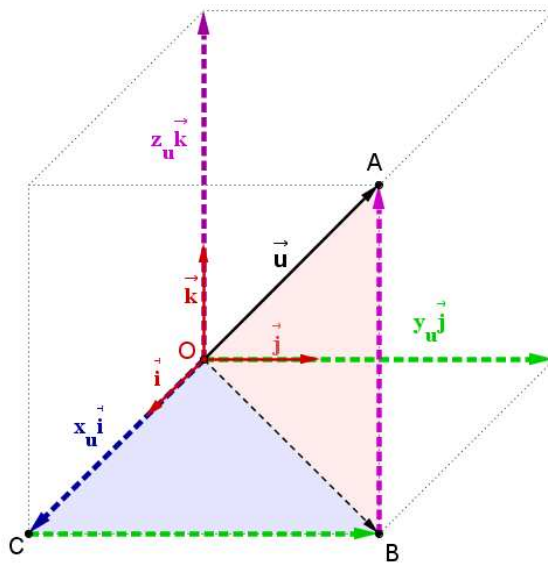
- **Norme d'un vecteur**

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et les points $A(x_u; y_u; z_u)$, $B(x_u; y_u; 0)$ et $C(x_u; 0; 0)$ (voir figure).

Alors $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ et comme $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un R.O.N :

- le triangle $\Delta(OCB)$ est rectangle en C donc $OB^2 = OC^2 + CB^2$ (Pythagore)

- le triangle $\Delta(OAB)$ est rectangle en B donc $OA^2 = OB^2 + BA^2$ (Pythagore)
- D'où $OA^2 = OC^2 + CB^2 + BA^2$ (1).



Or : $OC = \|\overrightarrow{OC}\| = \|x_u \vec{i}\| = |x_u| \|\vec{i}\| = |x_u| \cdot 1 = |x_u|$ (2),

$CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \|y_u \vec{j}\| = |y_u| \|\vec{j}\| = |y_u| \cdot 1 = |y_u|$ (3),

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \|z_u \vec{k}\| = |z_u| \|\vec{k}\| = |z_u| \cdot 1 = |z_u|$ (4).

En remplaçant (2), (3), (4) dans (1) il vient :

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 = OA^2 = |x_u|^2 + |y_u|^2 + |z_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

d'où :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

Exemple :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{6} \\ -3 \end{pmatrix}, \|\vec{u}\| = \sqrt{7^2 + \sqrt{6}^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 6 + 9} = 8$$

- **Distance de deux points**

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors :

$$\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

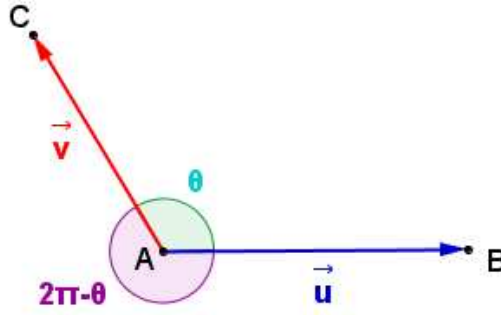
Exercices 14 à 22

C) PRODUIT SCALAIRE

1) Définitions

a) Angle formé par deux vecteurs non nuls

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et A, B, C trois points (non alignés) de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$:



L'angle $\theta = \widehat{BAC}$, indépendant des représentants de \vec{u} et \vec{v} choisis (expliquez pourquoi !), est appelé **angle formé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v}** et est noté parfois $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

En fait \vec{u} et \vec{v} forment deux angles : θ et $2\pi - \theta$, dont l'un est saillant (c'est-à-dire de mesure comprise entre 0 et π radians), l'autre rentrant (c'est-à-dire de mesure strictement comprise entre π et 2π radians). Or comme on va le voir tout de suite, nous ne nous intéresserons qu'au *cosinus* de cet angle et comme $\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta$, nous choisirons toujours celui des deux angles qui est saillant : $\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$.

b) Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, on appelle **produit scalaire de \vec{u} par \vec{v}** le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (on lit : « \vec{u} scalaire \vec{v} »), défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ étant l'angle (saillant) formé par les deux vecteurs.

Exercices 23 et 24

2) Interprétation géométrique

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ et $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$.

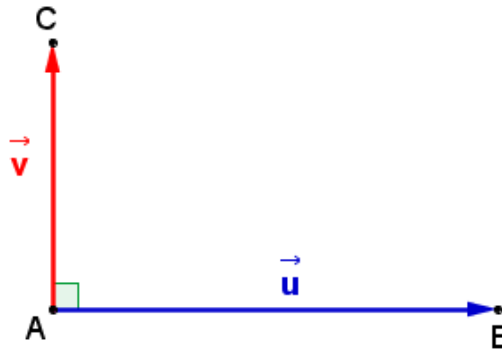
- **1^{er} cas :** $\theta = 0$

Alors \vec{u} et \vec{v} ont même sens et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 1 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = AB \cdot AC > 0$.



- **2^e cas :** $\theta = \frac{\pi}{2}$

Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0 = 0$.



- **3^e cas :** $\theta = \pi$

Alors \vec{u} et \vec{v} ont même direction, des sens opposés et

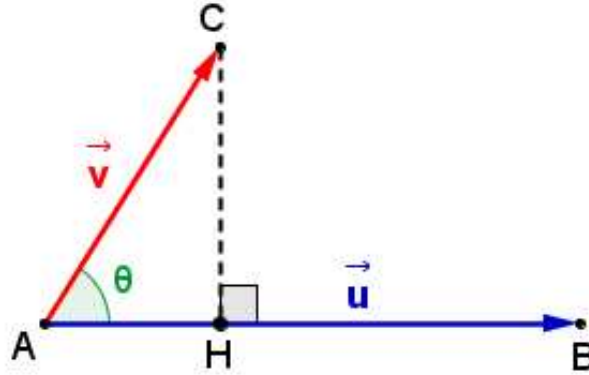
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot (-1) = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = -AB \cdot AC < 0.$$



- **4^e cas :** $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\triangle(AHC)$ est rectangle en H donc

$$\cos \theta = \frac{AH}{AC} \text{ et par conséquent : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = AB \cdot AC \cdot \frac{AH}{AC} = AB \cdot AH > 0.$$

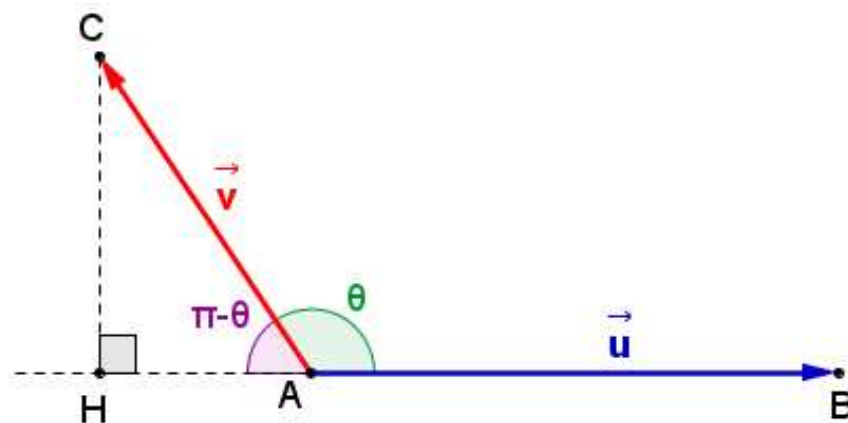


- 5^e cas : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\triangle(AHC)$ est rectangle en H donc

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow -\cos \theta = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{AH}{AC} \text{ et par conséquent :}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = AB \cdot AC \cdot \left(-\frac{AH}{AC}\right) = -AB \cdot AH < 0.$$



Conclusion

En remarquant que dans le 1^{er} et le 3^e cas $H = C$, on voit que :

- si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AH > 0$
- si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AH < 0$
- si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3) Expression analytique

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un **R.O.N.**, $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$, A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Nous supposons d'abord que les deux vecteurs sont non nuls, alors trois cas peuvent se présenter :

- **1^{er} cas** : $\theta = 0$

Alors il existe un réel strictement positif k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_v = k \cdot x_u \\ y_v = k \cdot y_u \\ z_v = k \cdot z_u \end{cases}$ et on a :

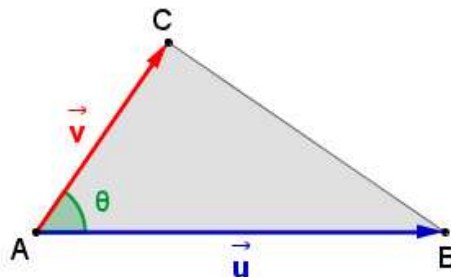
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot 1 \\ &= \|\vec{u}\| \cdot k \|\vec{u}\| \quad (\text{car } k > 0) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\ &= k(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) \\ &= kx_u^2 + ky_u^2 + kz_u^2 \\ &= x_u kx_u + y_u ky_u + z_u kz_u \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \end{aligned}$$

- **2^e cas** : $\theta = \pi$

Alors il existe un réel strictement négatif k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ et on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot (-1) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot (-k) \|\vec{u}\| \cdot (-1) \quad (\text{car } |k| = -k \text{ puisque } k < 0) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\ &= \dots \quad (\text{voir 1^{er} cas}) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \end{aligned}$$

- **3^e cas** : $0 < \theta < \pi$



Alors ABC est un triangle et d'après le théorème du cosinus on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \theta \Leftrightarrow 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \theta = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

Or $AB \cdot AC \cdot \cos \theta = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v},$

$$AB^2 = \|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$AC^2 = \|\vec{v}\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2,$$

d'où : $2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - (x_v - x_u)^2 - (y_v - y_u)^2 - (z_v - z_u)^2$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 2x_u x_v + 2y_u y_v + 2z_u z_v$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Nous avons donc montré que si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad (*)$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (par définition) et d'autre part $x_u = y_u = z_u = 0$ donc

$0 \cdot x_v + 0 \cdot y_v + 0 \cdot z_v = 0$, ce qui montre bien que la formule (*) reste valable pour $\vec{u} = \vec{0}$.

D'où :

Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ dans un **R.O.N.** on a :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}$$

Remarque

L'expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ permet de calculer $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$. Exemple :

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans un R.O.N. alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 0 = -11$ et d'autre part

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \sqrt{1+4+9} \sqrt{9+16+0} \cos \theta = 5\sqrt{14} \cos \theta$, d'où $-11 = 5\sqrt{14} \cos \theta$ et par conséquent $\theta \simeq 126,01^\circ$.

Exercice 25

4) Propriétés

a) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$

En effet : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos \theta = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

b) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \text{ (non nuls)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}$

En effet le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le même que celui de $\cos \theta$ puisque $\|\vec{u}\| > 0$ et $\|\vec{v}\| > 0$.

c) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$ (le produit scalaire est **symétrique**)

En effet en se plaçant dans un R.O.N. on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

d) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) &= (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

(on dit que le produit scalaire est **linéaire**)

Remarque

On ne dit pas que le produit scalaire est « commutatif », « associatif » ou « distributif par rapport à l'addition » car ces termes sont réservés aux opérations internes dans un ensemble (comme par exemple l'addition et la multiplication dans \mathbb{R}) et le produit scalaire est une **opération externe** : le produit de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un nombre réel !

e) $\boxed{\forall A, B, C, D \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} \quad \text{avec } C' = p_{(AB)}(C) \text{ et } D' = p_{(AB)}(D)}$

En effet :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} \\ &= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + 0 \quad \text{car } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'} \text{ et } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{D'D} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} \end{aligned}$$

f) $\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$

En effet $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.

Définition

Le nombre réel positif $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** du vecteur \vec{u} et il est noté \vec{u}^2 .

Remarques

- Ainsi on a : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} \Leftrightarrow \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- On ne parle pas de « cube scalaire » ou de « \vec{u}^n » où $n > 2$!

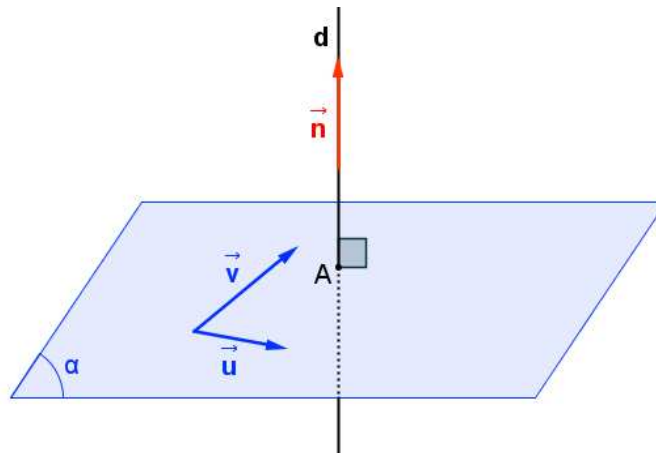
Exercices 26 à 38

5) Vecteur normal et équations d'un plan

- Nous avons vu en A9) que pour connaître un plan α il suffit de connaître un point $A \in \alpha$ et deux vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires de ce plan. En fait un point A et une droite $d \perp \alpha$ suffisent puisqu'il n'existe qu'un seul plan passant par A et qui est orthogonal à d ! Or pour connaître une telle droite il suffit de connaître un vecteur directeur \vec{n} de cette droite qui sera alors orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan α ! Ceci nous amène à poser la définition suivante :

• Définition

Soit un plan α et un vecteur \vec{n} dans l'espace. On dit que \vec{n} est un **vecteur normal** à α si et seulement si \vec{n} est un vecteur directeur d'une droite $d \perp \alpha$.



Remarque

Si \vec{n} est un vecteur normal à α , alors l'ensemble des vecteurs normaux à α est égal à l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à \vec{n} !

- **Propriété 1**

Soit un plan α de vecteur normal \vec{n} et $A \in \alpha$, alors :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$$

Démonstration :

Soit d la droite de vecteur directeur \vec{n} passant par A . Alors $d \perp \alpha$ et pour tout $M \in \alpha$:

$$\begin{aligned} M \in \alpha &\Leftrightarrow (AM) \subset \alpha \quad (\text{car } A \in \alpha) \\ &\Leftrightarrow d \perp (AM) \quad (\text{car } \alpha \text{ est l'unique plan passant par } A \text{ et orthogonal à } d) \\ &\Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

- **Propriété 2**

Soit un plan α de l'espace muni d'un R.O.N., $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à α et

$A(x_A, y_A, z_A) \in \alpha$, alors :

$$\boxed{\forall M(x, y, z) \in \mathcal{E} \quad M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (*)}$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A$

Définition : On dit que (*) est **une équation cartésienne du plan** α .

Démonstration :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \quad (\text{d'après propriété 1}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{d'après C4a}) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{d'après B2b}) \\ &\Leftrightarrow (x - x_A) \cdot a + (y - y_A) \cdot b + (z - z_A) \cdot c = 0 \quad (\text{d'après C3}) \\ &\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{en posant: } d = -ax_A - by_A - cz_A) \end{aligned}$$

Exemple

Soit α le plan passant par $A(-2, 3, 5)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+2) \cdot (-7) + (y-3) \cdot 4 + (z-5) \cdot (-6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -7x - 14 + 4y - 12 - 6z + 30 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -7x + 4y - 6z + 4 = 0
 \end{aligned}$$

On note : $\alpha \equiv -7x + 4y - 6z + 4 = 0$. Cette équation permet de vérifier facilement si le plan passe par un point donné ou non : $B(2, 1, -1) \in \alpha$ car $-7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) + 4 \stackrel{!}{=} 0$ et $C(-5, 3, 0) \notin \alpha$ car $-5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + 4 = 6 \neq 0$.

- **Propriété 3 (réciproque de la propriété 2)**

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'ensemble :

$E = \{M(x, y, z) / ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Démonstration :

Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ l'un au moins des nombres a, b, c est différent de 0, par exemple $a \neq 0$, d'où $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right) \in E$ car $a\left(-\frac{d}{a}\right) + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -d + d \stackrel{!}{=} 0$.

Appelons α le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$, alors :

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + \frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow ax + d + by + cz = 0 \\
 &\Leftrightarrow M(x, y, z) \in E
 \end{aligned}$$

Par conséquent $E = \alpha$, c.q.f.d.

Exercices 39, 40, 41

6) Equations d'une sphère

- Définition

Soit A un point de l'espace et r un nombre réel strictement positif, alors on appelle **sphère** de **centre A** et de **rayon r** le lieu des points M tel que $AM = r$.

Notation : $\mathcal{S}(A, r) = \{M \in \mathcal{E} / AM = r\}$.

- Propriété 1

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace muni d'un R.O.N. et $r \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S}(A, r) \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{S}(A, r) &\Leftrightarrow AM = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2} = r \quad (\text{d'après B2c}) \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2 \quad (\text{équation de } \mathcal{S}(A, r)) \end{aligned}$$

- Propriété 2

Soient A et B deux points de l'espace muni d'un R.O.N., alors le lieu des points $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ est la sphère de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire la sphère de centre $I = \text{milieu de } [AB]$ et de rayon $r = AI = BI$.

Démonstration :

Soient $M \in \mathcal{E}$ et I le milieu de $[AB]$, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad (\text{d'après C4a}) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0 \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \quad (\text{d'après C4d}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) = 0 \quad (\text{d'après C4c et } I = \text{milieu de } [AB]) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \quad (\text{d'après C4d}) \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\|^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} = \|\overrightarrow{IA}\|^2 \quad (\text{car } I = \text{milieu de } [AB] \text{ et d'après C4e}) \\ &\Leftrightarrow MI^2 + 0 = IA^2 \\ &\Leftrightarrow MI = IA \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{S}(I, IA) \end{aligned}$$

Exercices 42 et 43

D) EQUATIONS D'UN PLAN ET D'UNE DROITE

1) Equations d'un plan

Nous venons de voir (C5, pages 35 – 37) qu'un plan π est entièrement défini par la donnée d'un point $A \in \pi$ et d'un **vecteur normal** \vec{n} au plan et que ces données permettent de déterminer une **équation cartésienne** du plan π .

Par ailleurs nous avons vu également (A 9, pages 17 – 18) qu'un plan π est entièrement défini par la donnée d'un point $A \in \pi$ et de **deux vecteurs directeurs non colinéaires** \vec{u} et \vec{v} (ou par trois points non alignés $A, B, C \in \pi$ ce qui revient au même puisqu'alors \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont bien deux vecteurs directeurs non colinéaires de π). De manière plus précise nous avons vu qu'un point M est dans le plan si et seulement si \overrightarrow{AM} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , ce qui va nous permettre de déterminer des équations du plan π d'une autre façon.

a) Système d'équations paramétriques d'un plan

Soit π un plan donné par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs directeurs non

colinéaires $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $M(x, y, z)$ un point quelconque, alors :

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \pi &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha \cdot x_u + \beta \cdot x_v \\ y = y_A + \alpha \cdot y_u + \beta \cdot y_v \\ z = z_A + \alpha \cdot z_u + \beta \cdot z_v \end{cases}$$

Ce système est appelé **système d'équations paramétriques** de π de **paramètres** α et β .

Exemples

- $A(7; -3; 2) \in \pi$ de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 7 + 4\alpha \\ y = -3 - 9\alpha + 5\beta \\ z = 2 + 11\alpha - \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- si $\pi \equiv \begin{cases} x = 5 + 3\alpha - 6\beta \\ y = -1 + 8\alpha \\ z = -23\alpha + 7\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ alors π est le plan passant par $A(5; -1; 0)$ et de

$$\text{vecteurs directeurs } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -23 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir d'autres points de π on choisit n'importe quelles valeurs pour α et β :

$$\alpha = 1, \beta = 3 : B(5 + 3 - 18; -1 + 8; -23 + 21) = B(-10; 7; -2) \in \pi,$$

$$\alpha = -2, \beta = 0 : C(5 - 6; -1 - 16; 46) = C(-1; -17; 46) \in \pi, \text{ etc.}$$

b) Equation cartésienne d'un plan

Reprenons les notations précédentes.

- on appelle **déterminant des vecteurs** \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} le déterminant :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

- Nous admettrons sans démonstration la propriété suivante:

$$\vec{w} \text{ est une } \textbf{combinaison linéaire} \text{ de } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ssi } \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

- En utilisant cette propriété on obtient:

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u & x_v \\ y - y_A & y_u & y_v \\ z - z_A & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

En calculant ce déterminant on obtient une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

c'est-à-dire une **équation cartésienne** de π .

Exemple

$$\pi \text{ défini par : } A(3, -5, 1), \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 5 \\ y+5 & 7 & 1 \\ z-1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -28(x-3) - 2(z-1) + 45(y+5) - 35(z-1) - 8(y+5) - 9(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -37x + 37y - 37z + 333 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + y - z + 9 = 0 \equiv \pi$$

Remarques

- La donnée d'un système d'équations paramétrées nous donne immédiatement deux vecteurs directeurs de π alors qu'une équation cartésienne nous fournit le vecteur

$$\text{normal } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} !$$

- Deux plans sont parallèles ssi ils ont les mêmes vecteurs directeurs et les memes vecteurs normaux.
- Deux plans sont orthogonaux ssi leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Exercices 44 - 54

2) Systèmes d'équations d'une droite

Il y a deux façons de déterminer une droite d dans l'espace :

➤ d est donnée par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$.

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$$

et on obtient un **système d'équations paramétriques** de paramètre k de d :

$$M(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \\ z = z_A + k \cdot z_u \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x = 17 - 6k \\ y = 37k \\ z = -5 + 19k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \text{ est la droite passant par } A(17, 0, -5) \text{ de v.d. } \vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 37 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

➤ d est donnée comme intersection de deux plans π_1 et π_2 , chaque plan étant défini par une équation cartésienne.

La droite d est alors déterminée par un système linéaire de deux équations à trois inconnues appelé **système d'équations cartésiennes** :

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Exemple

$$d \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 & (1) \\ 2x + 4y - z = 1 & (2) \end{cases}$$

Pour chercher des points de d il faut résoudre ce système :

$$(1) \Leftrightarrow x = 2 + y - 3z$$

$$\text{dans } (2): 4 + 2y - 6z + 4y - z = 1 \Leftrightarrow 6y - 7z = -3 \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}$$

$$\text{dans } (1): x = 2 + \frac{7}{6}z - \frac{1}{2} - 3z \Leftrightarrow x = -\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{R} \quad M\left(-\frac{11}{6}z + \frac{3}{2}; \frac{7}{6}z - \frac{1}{2}; z\right) \in d$, par exemple pour $z = 0$ on obtient

$$A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \in d, \text{ pour } z = -3 \text{ on obtient } B(7; -4; -3) \in d, \text{ etc.}$$

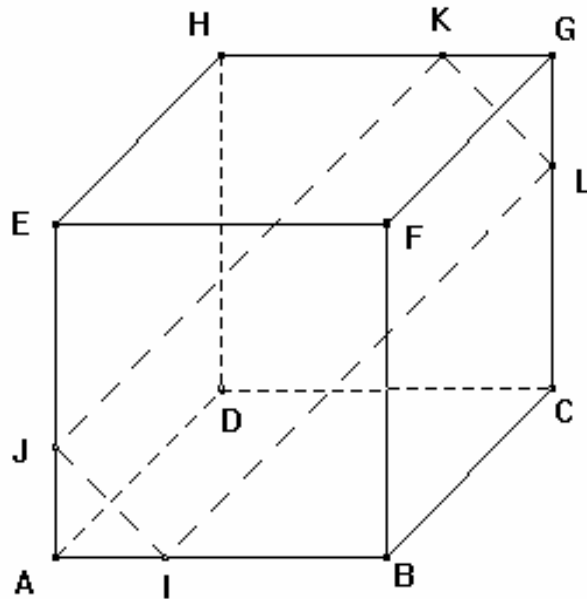
Exercices 55 - 68

EXERCICES

A) VECTEURS DANS L'ESPACE

- 1) Soient A, B et M trois points, montrez que :
 - a) M = milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$
 - b) M = milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$
- 2) Soit un triangle quelconque ABC et I le milieu de $[BC]$. Montrez que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.
- 3) Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M, N les milieux de $[DB]$, $[DC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ respectivement (figure !).
 - a) Montrez que $IJNL = \#$ et que $MLKJ = \#$.
 - b) Déduisez-en que tous les segments ayant pour extrémités les milieux de deux arêtes opposées (càd qui ne se touchent pas) sont concourants en un point qui est leur milieu commun.
- 4) Soit ABCDEFGH un cube et I, J, K, L quatre points définis par :

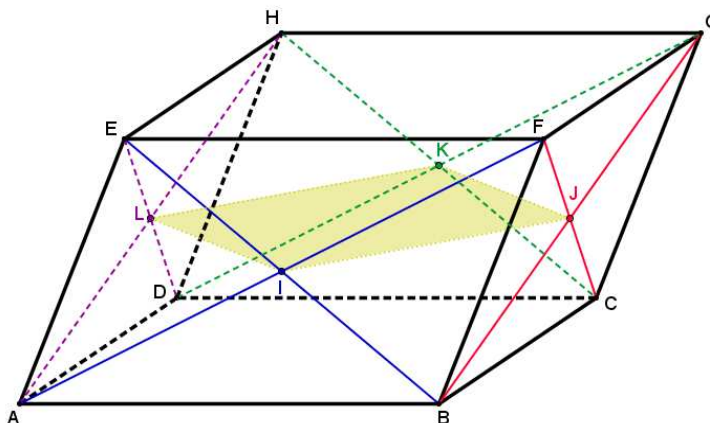
$$3 \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{HK} = \frac{2}{3} \overrightarrow{HG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{LC} = 2 \cdot \overrightarrow{GL}$$



Montrez que $(IJKL) = \#$.

- 5) *Définition :* Un **parallélépipède** est un solide à 8 sommets dont les 6 faces sont des #. Si les faces sont des rectangles on dit que c'est un **parallélépipède rectangle ou pavé** et si les faces sont des carrés c'est un **cube** !

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et I, J, K, L les points d'intersection des diagonales de ABFE, BCGF, CDHG et ADHE respectivement. Montrez que IJKL = #.



- 6) Soit ABCD un tétraèdre, et I, J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement. Montrez que \overline{IJ} est une combinaison linéaire de \overline{AD} et \overline{CB} .
- 7) Soit ABCD un tétraèdre et R, S, T, U les points définis par $\overline{AR} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, $\overline{SD} = \frac{3}{4}\overline{AD}$, $4 \cdot \overline{BT} = \overline{BD}$ et $4 \cdot \overline{BU} = \overline{BC}$.
- a) Montrez que $(RSTU) = \#$.
- b) Soient I le point d'intersection de (CS) et (RD) et J le point d'intersection de (DU) et (CT) . Montrez que $(IJ) \parallel (RST)$.
- 8) Soient d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles et non coplanaires, A_1, B_1, C_1 trois points sur d_1 , A_2, B_2, C_2 trois points sur d_2 , A_3, B_3, C_3 trois points sur d_3 , F, G, H les centres de gravités des triangles $\Delta(A_1A_2A_3)$, $\Delta(B_1B_2B_3)$, $\Delta(C_1C_2C_3)$ respectivement.
- Démontrez que :
- a) $3\overline{FG} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3}$
- b) F, G, H sont alignés
- 9) Soient A, B, C, D quatre points de l'espace et M, N, P, Q les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement. Démontrez que :

$$2(\|\overline{MP}\|^2 + \|\overline{NQ}\|^2) = \|\overline{AC}\|^2 + \|\overline{BD}\|^2$$

- 10)** Soient ABC un triangle quelconque et les points D, F, G définis par :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} \quad \overrightarrow{GC} = 5 \cdot \overrightarrow{GA}.$$

a) Figure !

b) Soit $E \in (AC)$ tel que $(DE) \parallel (BC)$, trouvez $a, b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\triangleright \quad \overrightarrow{CE} = a \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\triangleright \quad \overrightarrow{DE} = b \cdot \overrightarrow{CB}$$

c) Démontrez que $(GF) \parallel (DE)$.

- 11)** Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque (A, B, C, D coplanaires). On appelle **centre de gravité** de ABCD l'unique point G qui vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

a) Construisez un quadrilatère quelconque ABCD et son centre de gravité G après avoir démontré que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

b) Soient M le milieu de $[AB]$ et P celui de $[CD]$. Montrez que $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ et déduisez-en une construction plus simple de G.

c) Soient N le milieu de $[BC]$ et Q celui de $[AD]$. Étudiez la nature du quadrilatère (MNPQ) et sa relation avec le point G.

- 12)** Soient ABC un triangle quelconque, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit \mathcal{C} , A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et H le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

a) Montrez que $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA'}$ et déduisez-en que H appartient à une droite remarquable du triangle $\Delta(ABC)$.

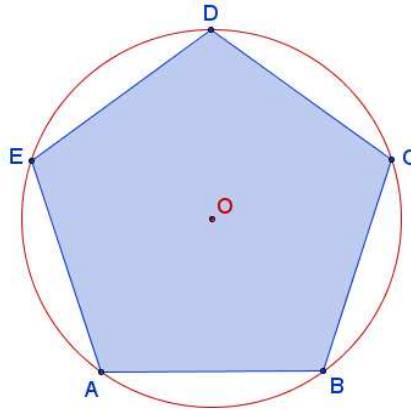
b) Que peut-on dire du point H ?

c) Énoncez le théorème que vous venez de démontrer et rappelez le nom du point H.

d) Montrez que les points O, G et H appartiennent à une même droite appelée **droite d'Euler**.

e) Montrez que les symétriques $H_1 = s_{A'}(H)$, $H_2 = s_{B'}(H)$ et $H_3 = s_{C'}(H)$ du point H par rapport aux milieux A', B' et C' appartiennent à \mathcal{C} .

13) Soit ABCDE un pentagone régulier de centre O :



a) Montrez que :

$$\triangleright \exists a \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = a \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$\triangleright \exists b \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = b \cdot \overrightarrow{OD}$$

b) Déduisez-en que : $\exists c \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = c \cdot \overrightarrow{OD}$

c) Déduisez-en que O est le centre de gravité du pentagone.

d) Calculez :

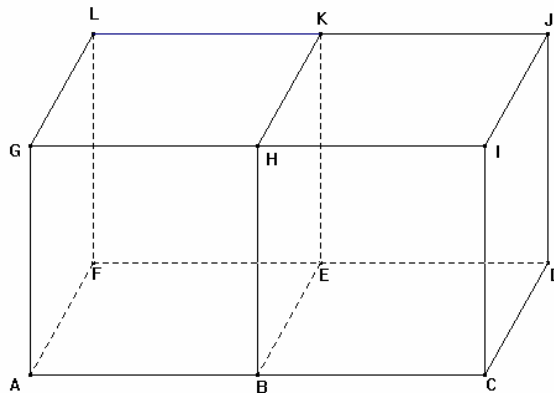
$$\triangleright \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB}$$

$$\triangleright \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC}$$

B) VECTEURS ET COORDONNEES

14) Soit un triangle ABC, $D \in (BC)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BD} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$. Exprimez les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de α .

15) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes mesurent une unité :



Pour chacun des repères suivants, déterminez s'il s'agit d'un repère orthogonal ou orthonormé puis donnez les coordonnées des points A, B, C,, L dans ce repère :

- a) $(E, \overline{FA}, \overline{BC}, \overline{DJ})$
- b) $(A, \overline{LJ}, \overline{DC}, \overline{IC})$
- c) $(B, \overline{HB}, \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}, 4 \cdot \overline{AF})$

Pour les exercices suivants, si le repère n'est pas spécifié il s'agit d'un repère quelconque

16) Dans un repère de l'espace on donne $A(-5;1;4)$, $B(2;3;-6)$ et $C(0;1;7)$.

- a) Trouvez D tel que $(ABCD) = \#$.
- b) Trouvez E tel que $(AECB) = \#$.

17) Déterminez les réels a et b pour que :

- a) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 2a+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a+4 \\ a+2 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.
- b) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-b \\ b+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} b+3 \\ 3 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.
- c) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ a-1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
- d) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2a \\ 5a-2 \\ b-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ b+2a+3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
- e) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 4-3a \\ 7-a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3+a \\ 5-2a \\ a \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

18) Examinez si les vecteurs suivants sont colinéaires :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 35 \end{pmatrix}$$

19) Dans un R.O.N de l'espace on donne $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;5;-1)$. Calculez la norme des vecteurs suivants :

a) $\vec{w} = -\frac{1}{3}\vec{DC}$

b) $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{CD}$

c) $\vec{v} = -\vec{AC} + 2 \cdot \vec{AD}$

20) Soient $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -3)$, $C(0; 3; -1)$.

a) Trouvez un point E différent de A, de B et du milieu de $[AB]$ tel que $E \in (AB)$.

b) Montrez que A, B et C ne sont pas alignés.

c) Trouvez un point D n'appartenant à aucune des droites (AB) , (AC) , (BC) et différent du centre de gravité du $\Delta(ABC)$ qui appartient au plan (ABC) .

21) Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Analysez si \vec{w} peut s'écrire comme combinaison linéaire de \vec{u} et de \vec{v} .

b) Déterminez λ pour que \vec{t} soit combinaison linéaire de \vec{u} et de \vec{w} .

22) Reprenez les exercices 3) à 6) et résolvez-les en utilisant des repères appropriés.

C) PRODUIT SCALAIRE

23) Sachant que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ calculez $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

24) Sachant que $\|\vec{u}\| = 5$, $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{6}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10\sqrt{3}$ calculez $\|\vec{v}\|$.

25) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(-3; 4; 5)$, $B(0; 7; -1)$ et $C(2; -1; 0)$. Calculez les angles du triangle $\Delta(ABC)$.

26) Soient A, B deux points du plan.

a) Déterminez le lieu des points M du plan tel que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2$.

b) Comment faut-il choisir les points M et N pour que $\vec{NM} \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2$?

c) Mêmes questions si A et B sont deux points de l'espace.

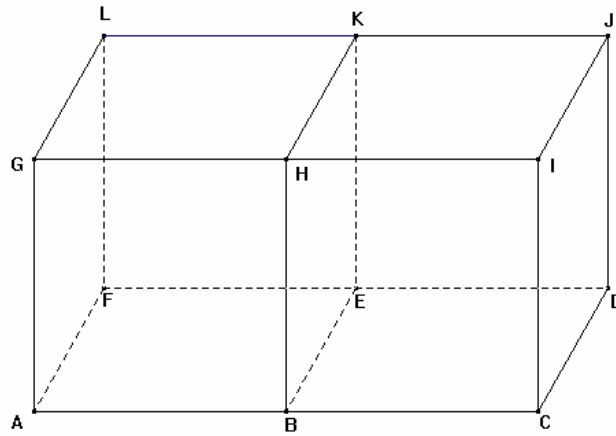
27) Soient $A, B \in \mathcal{E}$ avec $\|\vec{AB}\| = 2$. Déterminez les ensembles suivants :

a) $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} / \vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0\}$

b) $\mathcal{I} = \{M \in \mathcal{E} / \vec{AM} \cdot \vec{AB} = 4\}$

- c) $\mathcal{J} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\}$
- d) $\mathcal{K} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -1\}$
- e) $\mathcal{L} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM}^2 = 9\}$
- f) $\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \text{ et } AM = 4\}$
- g) $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \text{ et } BM = 5\}$

- 28) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes ont une longueur de 2 unités ($AF = AG = AB = BC = 2$) :



Calculez :

- a) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{LC}$
- b) $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{BL}$
- c) \widehat{LAJ}
- d) \widehat{CBL}
- e) \widehat{HCK}
- 29) Soit $\triangle(ABC)$ un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$ et $AC = 1$. Déterminez le lieu des points M du plan (ABC) tel que :

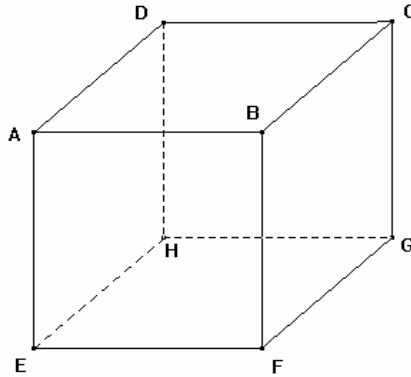
- | | |
|---|--|
| a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ | e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = 1$ |
| b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 3$ | f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = 2$ |
| c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ | g) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}$ |
| d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$ | |

- 30)** Mêmes questions qu'à l'exercice 29 en prenant M dans l'espace \mathcal{E} .
- 31)** Soit ABC un triangle rectangle en B avec $AB = 4$ et $BC = 3$. Déterminez les ensembles suivants (dans l'espace, $M \in \mathcal{E}$) :

a) $\mathbb{A} = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2} \right\}$

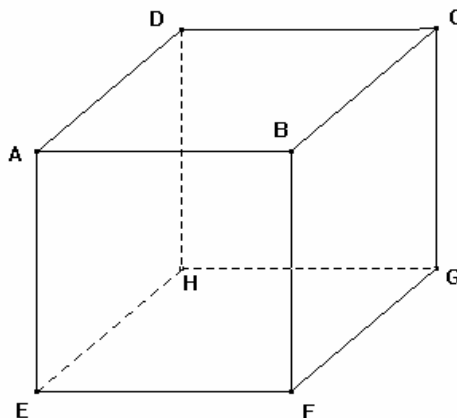
b) $\mathbb{B} = \left\{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = -5 \right\}$

- 32)** Soit ABCDEFGH un cube d'arête c :



- a) Montrez que $(EC) \perp (HF)$ et $(EC) \perp (AF)$.
- b) Calculez l'amplitude de l'angle \widehat{AHC} .
- c) Calculez l'amplitude de l'angle formé par les droites (AG) et (BH) .
- 33)** Soit ABCD un carré et $M \in [BD]$.
- a) Démontrez analytiquement et vectoriellement que $\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DM}$.
- b) Déduisez-en que $MB \cdot MD = AB^2 - AM^2$.
- 34)** a) Montrez l'égalité suivante appelée égalité d'EULER :
- $$\forall A, B, C, D \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$
- b) *Application 1 :*
- Dans un tétraèdre ABCD il y a trois paires d'arêtes opposées : $[AB]$ et $[CD]$, $[AC]$ et $[BD]$, $[AD]$ et $[BC]$. Montrez que si deux de ces paires sont formées de segments orthogonaux, alors la troisième l'est aussi.
- c) *Application 2 :*
- Montrez que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (théorème de l'orthocentre)

- 35)** Soit ABCD un # et O le point d'intersection de ses diagonales.
- Montrez que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow AB = AD$.
 - Enoncez la propriété ainsi démontrée.
- 36)** Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête c et I le milieu de $[AB]$. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}$.
- 37)** Soient ABC un triangle, P et Q les pieds des hauteurs issues de A et de B et M le point d'intersection des hauteurs. Démontrez que $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BM}$.
- 38)** Montrez que dans un # la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.
- 39)** Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(4; -3; 1)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Déterminez une équation du plan passant par A de vecteur normal \vec{n} .
- 40)** Dans un R.O.N. de l'espace on donne l'équation d'un plan $\pi: 3x - 4y + z - 2 = 0$.
- Est-ce que les points $A(-2, 5, -3)$, $B(-4, -3, 2)$ appartiennent à π ?
 - Quel est l'ensemble de tous les vecteurs normaux à ce plan ?
 - Trouvez deux points de π .
- 41)** Soit le cube ABCDEFG :



Dans le R.O.N. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ trouvez une équation de chacun des plans suivants :

- | | | |
|----------|----------|----------|
| a) (ABC) | d) (BCG) | g) (ACG) |
| b) (EFG) | e) (ABF) | h) (BCH) |
| c) (ADE) | f) (CDG) | i) (EBG) |

42) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(3; -2; 4)$ et $B(-1; 1; 4)$.

- Déterminez l'équation de la sphère de centre A et de rayon 7.
- Déterminez l'équation de la sphère de diamètre [AB].
- Déterminez l'ensemble $J = \{M(x, y, z) / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2\}$.

43) Déterminez les ensembles suivants définis dans un R.O.N. de l'espace :

$$\mathcal{P} = \{M(x, y, z) / x^2 - 6x + y^2 + 14y + z^2 + 2z + 55 = 0\}$$

$$\mathcal{Q} = \{M(x, y, z) / 3x^2 - 6x + 3y^2 + 3z^2 + 30z - 30 = 0\}$$

$$\mathcal{R} = \left\{M(x, y, z) / x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y + z^2 - 2z - \frac{8}{9} = 0\right\}$$

$$\mathcal{T} = \{M(x, y, z) / x^2 - 7x + y^2 + 8y + z^2 - z + 47 = 0\}$$

$$\mathcal{U} = \{M(x, y, z) / 4x^2 + 24x + 4y^2 - 4y + 4z^2 + 8z + 41 = 0\}$$

D) EQUATIONS D'UN PLAN ET D'UNE DROITE

44) Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan

passant par le point $A(-3; 1; 2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

45) Déterminez une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan passant par les points $P(5; -3; 7)$, $Q(0; 2; -9)$ et $R(5; 0; 0)$

46) Soient (Ox), (Oy) et (Oz) les trois axes d'un R.O.N. d'origine O, a, b et c les bissectrices des angles \widehat{yOz} , \widehat{xOz} et \widehat{xOy} respectivement. Déterminez les équations cartésiennes :

- des plans (xOy), (yOz) et (xOz).
- du plan π_1 contenant a et (Ox).
- du plan π_2 contenant b et (Oy)
- du plan π_3 contenant c et (Oz)

- 47)** Dans un repère de l'espace on donne les points $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-3)$, $C(0;3;-1)$, $D(-7;10;13)$ et $E(4;-5;1)$.
- a)** Vérifiez que A, B et C ne sont pas alignés.
- b)** Les points D et E appartiennent-ils au plan (ABC) ?
- 48)** Les points $K(2;1;0)$, $L(1;-2;-1)$, $M(0;1;-2)$ et $P(2;-5;4)$ sont-ils coplanaires ?
- 49)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(3;-4;1)$ et parallèle au plan π' donné par le système d'équations paramétriques : $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$
- 50)** Trouvez un système d'équations paramétriques du plan d'équation cartésienne : $\pi \equiv x - 2y + z = 1$.
- 51)** Trouvez une équation cartésienne du plan donné par le système d'équations paramétriques : $\pi \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 - \alpha + 3\beta \\ z = 5 - 3\alpha \end{cases}$.
- 52)** Analysez si parmi les plans suivants donnés par leurs équations cartésiennes il y en a qui sont orthogonaux :
- $$\pi_1 \equiv 2x - 7y - 2z + 1 = 0$$
- $$\pi_2 \equiv 4x - 2y + 11z - 5 = 0$$
- $$\pi_3 \equiv x + 13y + 2z + 37 = 0$$
- 53)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2;5;-7)$ et parallèle au plan $\pi' \equiv 3x - 5y + 7z - 4 = 0$.
- 54)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2;5;-7)$ et parallèle au plan (ABC) avec $A(2;1;-3)$, $B(1;2;-4)$ et $C(1;0;1)$.
- 55)** Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes :
- a)** de la droite passant par $A(5;2;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.
- b)** de la droite passant par $A(1;-4;3)$ et par $B(0;1;-2)$.
- c)** des axes (Ox), (Oy) et (Oz).

56) Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite d orthogonale au plan $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ et passant par le point $P(2; 1; -1)$.

57) Analysez si les droites d et d' sont parallèles avec :

$$d \equiv \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = -k - 1 \\ z = 3k + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = -\frac{6}{7}k - 1 \\ y = \frac{3}{7}k \\ z = \frac{9}{7}k - 8 \end{cases}$$

58) Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(1; -2; 3)$ et contenant

$$\text{la droite } d \equiv \begin{cases} x = -3 + k \\ y = 2 - k \\ z = -1 + 2k \end{cases}.$$

59) Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point

$$P(3; -1; 4) \text{ et parallèle à la droite } d' \equiv \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases}$$

60) On donne les points $A(3; 2; -1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(5; 6; -3)$ et $D(6; 8; 4)$.

a) Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

b) Le point T appartient à la droite (AB) et son abscisse vaut -4 . Calculez ses autres coordonnées.

61) On donne la droite $d \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$ et le plan $\pi \equiv x - y + z = 5$. La droite d perce-t-elle le plan π ? Si oui en quel point ?

62) Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 2k \\ z = 2 \end{cases}.$$

63) Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x = k - 1 \\ y = 3 + 2k \\ z = -k \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -3 - \alpha - \beta \end{cases}$.

- 64)** Discutez, en fonction du réel α , la position de la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3 + \alpha k \\ y = 2 + 2k \\ z = \alpha - k \end{cases}$ et du plan

$$\pi \equiv 3x - 2y + 5z = 1.$$

- 65)** Déterminez l'intersection des droites

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad d' \equiv \begin{cases} x = 3\beta - 1 \\ y = -\beta - 4 \\ z = \beta + 2 \end{cases}$$

- 66)** Déterminez l'intersection de la droite $d \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ -y - 3z = 1 \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = -2\alpha - \beta - 1 \\ z = \alpha - \beta - 2 \end{cases}$.

- 67)** Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $P(1; 0; -1)$ et parallèle à la droite $d' \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$.

- 68)** Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(2; -11; -5)$ et

$$\text{orthogonal à la droite } d \equiv \begin{cases} x = 2\alpha - 8 \\ y = 3\alpha \\ z = 5\alpha - 2 \end{cases}.$$

- 69)** Dans un R.O.N. on donne les points $\Omega(-2; 1; -5)$, $A(11; 8; 3)$, $B(9; 0; -5)$, $C(-7; 0; 11)$ et $D(9; 5; 4)$.

a) Ecrivez l'équation de la sphère \mathcal{S} de centre Ω et de rayon 13.

b) Déterminez $\mathcal{S} \cap (AB)$.

c) Déterminez $\mathcal{S} \cap (AC)$.

d) Déterminez $\mathcal{S} \cap (AD)$.

- 70)** Dans un R.O.N. on donne les points $\Omega(1; -3; -4)$ et $A(-2; 1; -4)$.

a) Donnez une équation de la sphère \mathcal{S} de centre Ω et de rayon 5 puis vérifiez que A appartient à \mathcal{S} .

b) Déterminez une équation cartésienne du plan π passant par A et perpendiculaire à la droite (ΩA) . Ce plan est appelé **plan tangent** à la sphère \mathcal{S} au point A .

c) Déterminez $\mathcal{S} \cap \pi$.