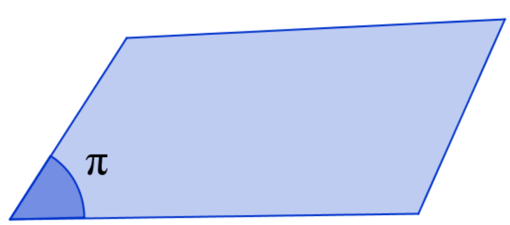
CHAPITRE II

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

COURS

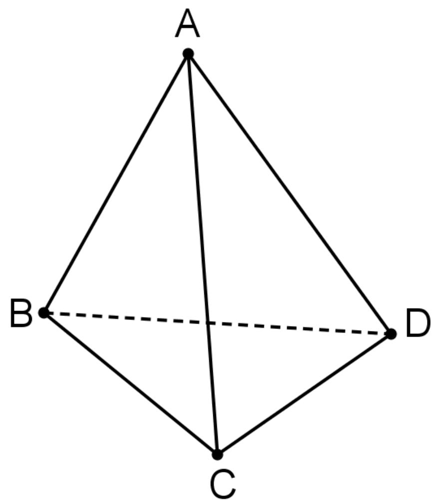
1) Définitions, notations et premières propriétés

- Les **points** dans l'espace sont notés, comme ceux du plan, par des lettres majuscules : A, B, C, ….
- Les **droites** dans l'espace sont notées, comme celles du plan, par des lettres minuscules : d, a, b, …..
- Par deux points distincts A et B de l'espace il passe exactement une droite qu'on note (AB). On définit de même le **segment** de droite $[AB]$ d'extrémités A et B et la **demi-droite** $[AB)$ d'origine A passant par B. La **distance** entre les points A et B sera notée AB, comme dans le plan.
- On dit que plusieurs points A, B, C, D…. sont **alignés** s'il existe une droite qui passe par tous ces points.
- Les **plans** dans l'espace sont notés par des lettres grecques minuscules : π, α, β, ...
- Pour représenter un plan « en perspective » on dessine (à main levée) une sorte de parallélogramme :



- Par trois points non alignés A, B, C de l'espace il passe exactement un plan qu'on peut noter (ABC).
- On dit que plusieurs points A, B, C, D…. sont **coplanaires** s'il existe un plan qui passe par tous ces points. (trois points sont toujours coplanaires !)

- Quatre points non coplanaires forment les **sommets** d'un corps appelé **tétraèdre** (*tétra* veut dire *quatre* en grec, *èdre* vient d'un mot grec signifiant *face*) : ce corps a 4 **faces** triangulaires et 6 **arêtes**. On peut dire aussi que c'est une **pyramide** à base triangulaire.

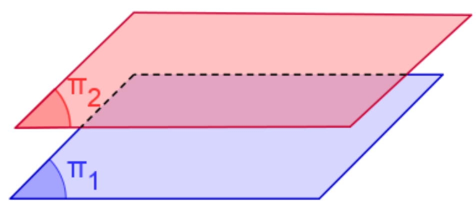


- Un **tétraèdre régulier** est un tétraèdre dont les 6 arêtes ont la même longueur ou, ce qui revient au même, dont les 4 faces sont des triangles équilatéraux.

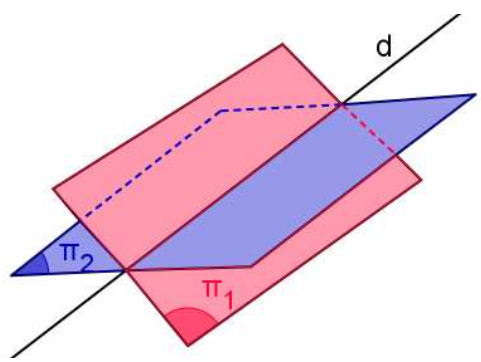
2) Positions relatives de deux plans

Soient π_1 et π_2 deux plans de l'espace. On a trois possibilités :

- $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$: les deux plans sont **confondus**
- $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$: les deux plans sont **strictement parallèles**

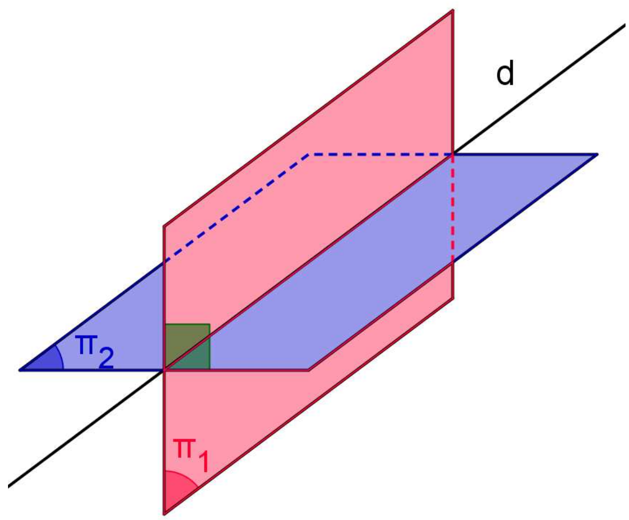


- $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ (où d est une droite !) : les deux plans sont **sécants :**



Remarques

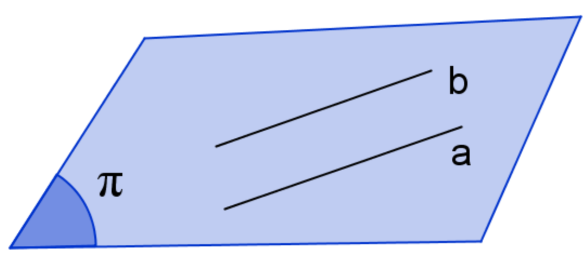
- Comme pour les droites dans le plan, on dit que **deux plans** π_1 et π_2 sont **parallèles** et on note $\pi_1 \parallel \pi_2$ si et seulement si ils sont confondus ou strictement parallèles.
- Si deux **plans** forment un angle de $90°$ on dit qu'ils sont **perpendiculaires** et on note : $\pi_1 \perp \pi_2$
- Le terme « sécant » vient du latin « secare » qui veut dire « couper ». Voici d'autres termes mathématiques ayant la même *étymologie* : bissectrice, intersection, segment.



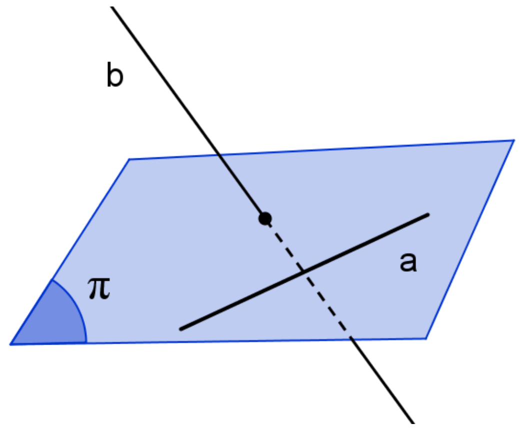
3) Positions relatives de deux droites

Soient a et b deux droites de l'espace. On a quatre possibilités concernant l'intersection des deux droites :

- $a \cap b = a = b$: les deux droites sont **confondues.**
- $a \cap b = \{I\}$: les deux droites sont **sécantes** en I (elles se coupent au point I).
- $a \cap b = \varnothing$ et a et b sont coplanaires : on dit que a et b sont **strictement parallèles**.

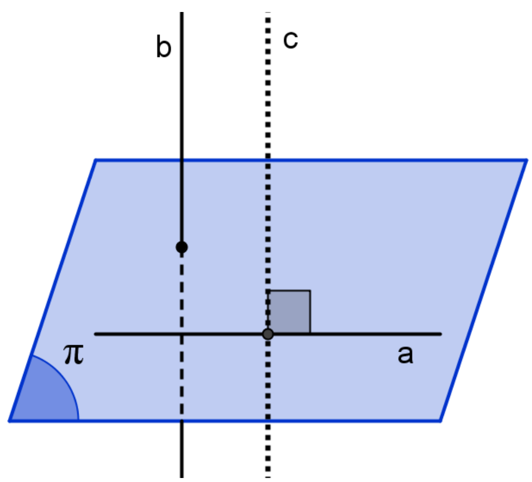


- $a \cap b = \varnothing$ et <u>a et b ne sont pas coplanaires</u> : on dit que a et b sont **gauches**.



Remarques

- Si a et b sont confondues ou strictement parallèles on dit qu'elles sont **parallèles** et on note $a \parallel b$.
- Deux droites sécantes ou parallèles sont toujours coplanaires.
- Dire que deux droites sont gauches revient à dire qu'elles ne sont pas coplanaires.
- Si a et b sont sécantes et forment un angle de $90°$ (angle droit) on dit que a et b sont **perpendiculaires** et on note $a \perp b$.
- Si a et b sont deux droites gauches et s'il existe une droite c perpendiculaire à a et parallèle à b ($c \parallel b$ et $c \perp a$) on dit que a et b sont **orthogonales** et on note $a \perp b$.

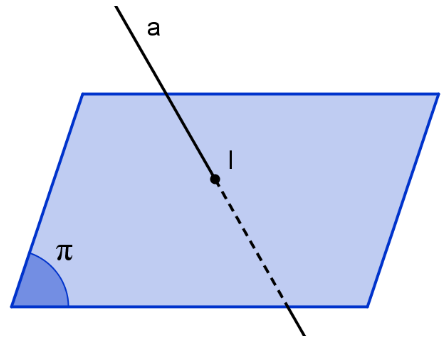


- La notion « d'orthogonalité » est donc un peu plus générale que celle de « perpendicularité » : l'idée étant que deux droites non sécantes peuvent avoir des « *directions perpendiculaires* ». On a la même notation pour les deux notions parce qu'il n'y a pas de confusion à craindre.

4) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soient d une droite et π un plan de l'espace. On a trois possibilités :

- $a \subset \pi$: la droite a est « dans » le plan π.
- $a \cap \pi = \{I\}$: on dit que a et π sont sécants en I ou que a « perce » le plan π au point I



- $a \cap \pi = \varnothing$: on dit que a est **strictement parallèle** à π

Remarques

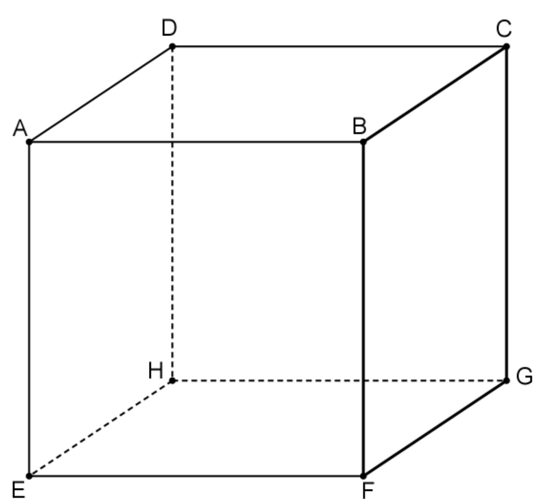
- Si a et π sont sécants et forment un angle de $90°$ on dit qu'ils sont **perpendiculaires** (ou **orthogonaux)** et on note : $a \perp \pi$. On peut montrer que :

$$a \perp \pi \Leftrightarrow \text{ a est orthogonale à toute droite incluse dans } \pi$$

- Si a est dans π ou strictement parallèle à π on dit que qu'ils sont **parallèles** et on note $a \parallel \pi$.

Exemples

Soit un **cube** de sommets A, B, C, D, E, F, G et H :



- Droites parallèles : $(AB) \parallel (EF) \parallel (DC) \parallel \ldots$ $\qquad (EB) \parallel \ldots$ $\qquad (HF) \parallel \ldots$

- Droites gauches : (EF) et $\ldots$ (BH) et $\ldots$ (AC) et $\ldots$
- Droites perpendiculaires : $(AB)\perp\ldots$ $(EG)\perp\ldots$ $(FC)\perp\ldots$
- Droites orthogonales (pas perpendiculaires) : $(AB)\perp\ldots$ $(EG)\perp\ldots$ $(FC)\perp\ldots$
- Plans parallèles : $(ABC)\parallel\ldots$ $(GFC)\parallel\ldots$
- Plans perpendiculaires : $(ABC)\perp\ldots$ $(ECG)\perp\ldots$ $(EDF)\perp\ldots$
- Droites parallèles à un plan : $(AB)\parallel\ldots$ $(FC)\parallel\ldots$
- Droites perpendiculaires à un plan : $(AB)\perp\ldots$ $(FC)\perp\ldots$

5) Propriétés

Les propriétés suivantes sont intuitivement évidentes, elles sont donc données sans démonstration.

a) Soient **un point A et une droite d**, alors combien y a-t-il de droites ou de plans **passant par A** et parallèles ou orthogonales à d ?

- Si $A \notin d$ il existe un seul plan qui contient A et d.
- Il existe une seule droite d' telle que $A \in d'$ et $d \parallel d'$.
- Si $A \notin d$ il existe une seule droite d' telle que $A \in d'$ et d' perpendiculaire à d.

  Si $A \in d$ il existe une infinité de droites passant par A et perpendiculaires à d.
- Il existe une infinité de droites passant par A et orthogonales à d.
- Il existe une infinité de plans passant par A et parallèles à d.
- Il existe un seul plan passant par A et perpendiculaire à d.

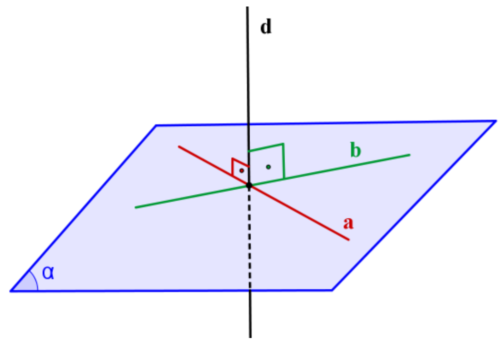
b) Soient **un plan α et un point $A \notin \alpha$**, alors combien y a-t-il de droites ou de plans **passant par A** et parallèles ou orthogonales à α ?

- Il existe une infinité de droites passant par A et parallèles à α.
- Il existe une seule droite d' telle que $A \in d'$ et $d' \perp \alpha$.

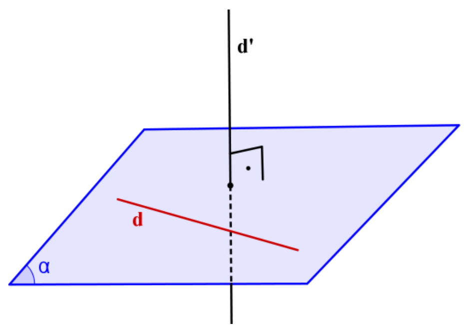
- Il existe un seul plan passant par A et parallèle à α.
- Il existe une infinité de plans passant par A et perpendiculaires à α.

c) Soient les **droites d, d', a, b et trois plans** α, β, γ, alors :

- $d \perp \alpha \Leftrightarrow \exists$ deux droites sécantes a et b de α tel que $a \perp d$ et $b \perp d$

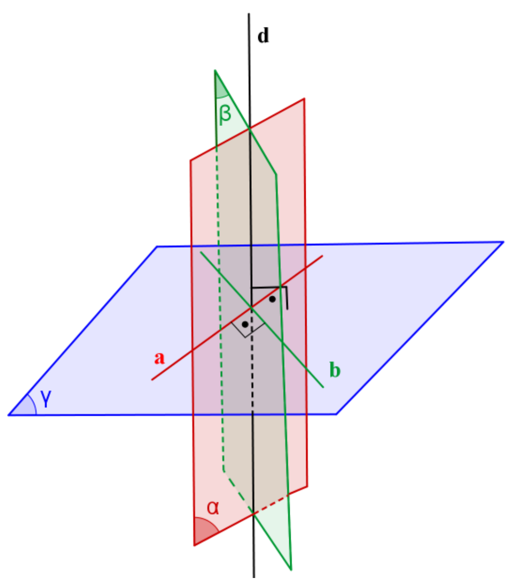


- $d \perp d'$ (orthogonales) $\Leftrightarrow \exists \alpha \quad d \subset \alpha$ et $d' \perp \alpha$



- En posant $d = \alpha \cap \beta$, $a = \alpha \cap \gamma$ et $b = \beta \cap \gamma$ on a :

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \forall \gamma \perp d \quad a \perp b$$

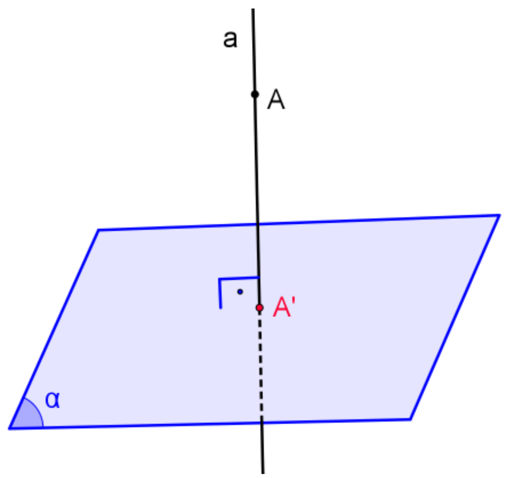


Exercices 1 - 6

6) Projections orthogonales et distances

a) Projections orthogonales sur un plan

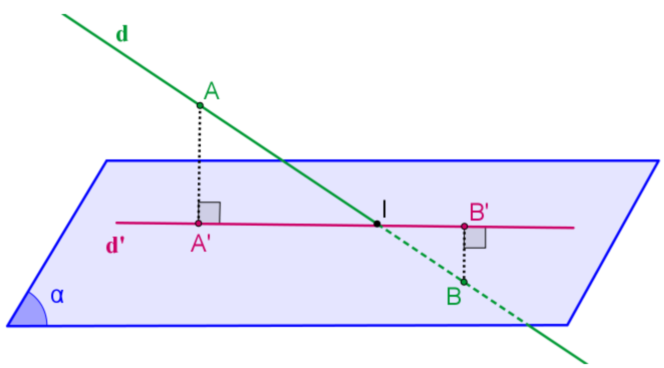
- Soient un point A et un plan α : il existe une seule droite a telle que $A \in a$ et $a \perp \alpha$. Le point d'intersection A' de a et de α est appelé **projection orthogonale de A sur α** et on note : $A' = p_\alpha(A)$.



- $A \in \alpha \Leftrightarrow p_\alpha(A) = A$
- Soient d une droite et α un plan, alors on appelle projection de d sur α l'ensemble défini par : $p_\alpha(d) = \{p_\alpha(M) / M \in d\}$
  - Si $d \perp \alpha$ alors $p_\alpha(d) = \{I\}$ où $I \in d \cap \alpha$

    En effet pour tout $M \in d$ $(MI) \perp \alpha$ donc $p_\alpha(M) = I$
  - Si $d \not\perp \alpha$ alors $p_\alpha(d) = d'$ où d' est une droite de α.

    En effet si A et B sont deux points différents de d, alors leurs projections A' et B' sont différentes puisque $(AB) \not\perp \alpha$, donc $p_\alpha(d) = (A'B')$



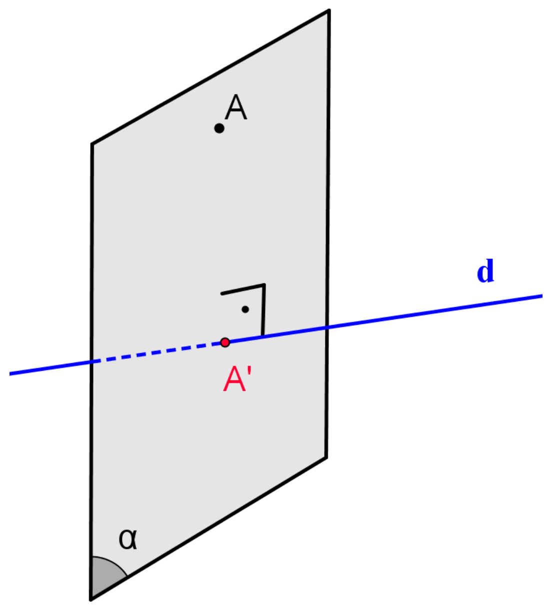
- Soit $A' = p_\alpha(A)$ et $M \in \alpha$ avec $M \neq A'$. Si $A \neq A'$ le triangle $\Delta(AA'M)$ est rectangle en A' donc $AM > AA'$ et si $A = A'$ $AA' = 0$ donc $AM > AA' = 0$. Dans le cas où $M = A'$ on a $AM = AA'$. Ainsi :

  $$\forall M \in \alpha \quad AA' \leq AM$$

  En d'autres termes AA' est la plus petite distance de A à un point de α : on dit que c'est la **distance de A au plan** α et on note $A\alpha$

b) Projections orthogonales sur une droite

- Soit un point A et une droite d : il existe un seul plan α tel que $A \in \alpha$ et $d \perp \alpha$. Le point d'intersection A' de d et de α est appelé **projection orthogonale de A sur d** et on note : $A' = p_d(A)$.



- $A \in d \Leftrightarrow p_d(A) = A$
- $\forall M \in \alpha \quad p_d(M) = A'$
- Soient a et d deux droites, alors on appelle projection de a sur d l'ensemble défini par : $p_d(a) = \{p_d(M) / M \in a\}$
  - Si $a \perp d$ (orthogonale) alors il existe un plan α contenant a et perpendiculaire à d qui coupe d en un point I. Par conséquent pour tout $M \in \alpha$ (donc en particulier pour tout $M \in a$) on a $p_d(M) = I$ donc $p_d(a) = \{I\}$.

- Si $a \not\perp d$ alors tout plan perpendiculaire à d coupe a en un seul point, par conséquent chaque point de a a une projection différente sur d donc $p_d(a) = d$.

- Soit $A' = p_d(A)$ et $M \in d$ avec $M \neq A'$. Si $A \neq A'$ le triangle $\Delta(AA'M)$ est rectangle en A' donc $AM > AA'$ et si $A = A'$ $AA' = 0$ donc $AM > AA' = 0$. Dans le cas où $M = A'$ on a $AM = AA'$. Ainsi :

$$\forall M \in d \quad AA' \leq AM$$

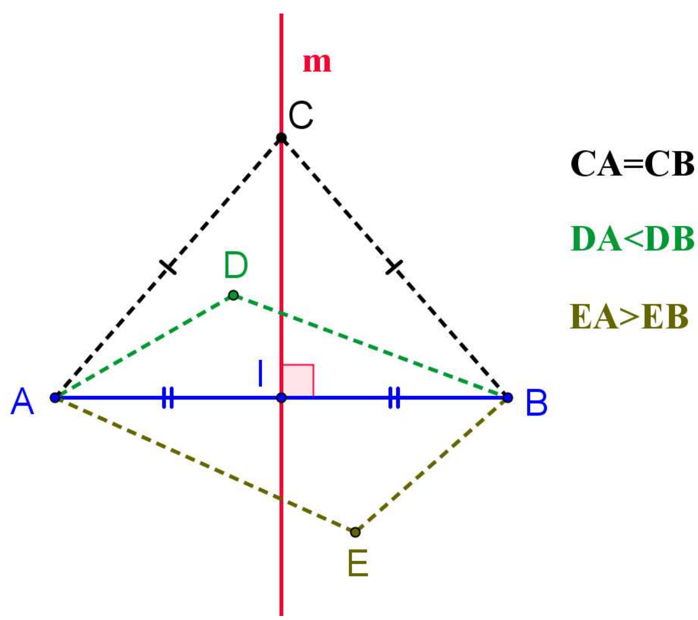
En d'autres termes AA' est la plus petite distance de A à un point de d : on dit que c'est la **distance de A à la droite d** et on note Ad

7) Plan médiateur d'un segment

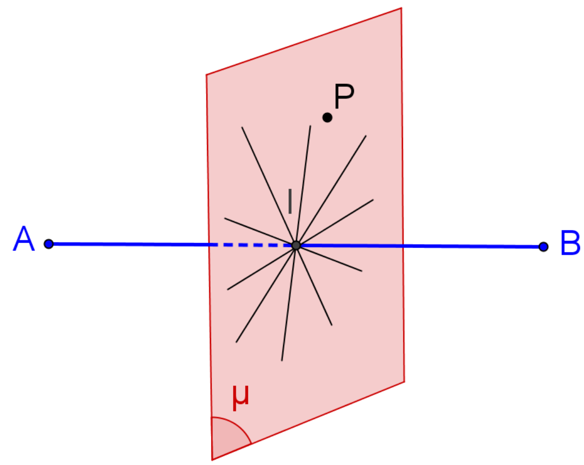
- **Rappel**

La **médiatrice** d'un segment $[AB]$ dans un plan est la droite m qui passe par le milieu I du segment et qui est perpendiculaire à (AB). On montre que m est en fait le lieu des points P du plan qui sont équidistants de A et B, c'est-à-dire que pour tout point P du plan on a :

$$P \in m \Leftrightarrow PA = PB$$



- Si A et B sont deux points de l'espace il existe une infinité de droites passant par le milieu I de $[AB]$ et qui sont perpendiculaires à (AB) : ce sont toutes les droites passant par I et contenues dans le plan μ passant par I et perpendiculaire à (AB). Ce plan est appelé **plan médiateur** du segment $[AB]$



- Soit $P \in \mu$, alors $(AB) \perp (PI)$ (car $(AB) \perp \mu$) donc dans le plan (ABP) (PI) est la médiatrice de $[AB]$ et par conséquent $PA = PB$.

  Réciproquement supposons que P est un point équidistant de A et de B. Si $P \in (AB)$ alors $P = I$ donc $P \in \mu$. Si $P \notin (AB)$ alors dans le plan (ABP) P appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc $(AB) \perp (PI)$ et par conséquent on a encore $P \in \mu$.

  Nous venons de démontrer la propriété caractéristique du plan médiateur de $[AB]$:

$$\boxed{P \in \mu \Leftrightarrow PA = PB}$$

Exercices 7 - 23

EXERCICES

1) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Si deux plans sont perpendiculaires alors toute droite dans l'un des deux plans est perpendiculaire à l'autre plan.

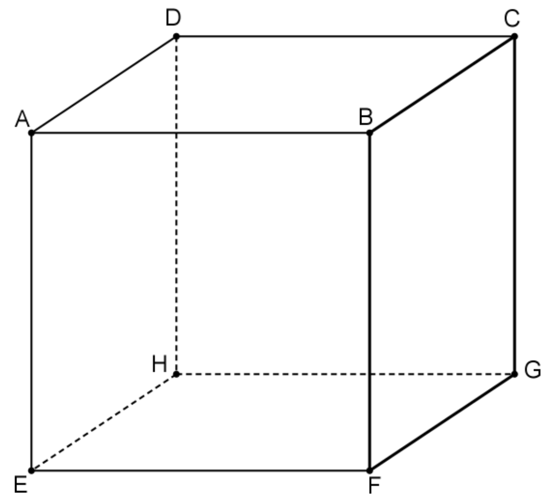
b) Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

c) Si deux plans sont perpendiculaires alors il existe un plan perpendiculaire aux deux plans.

d) Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

2) Expliquez pourquoi deux droites a et b ont toujours une droite orthogonale commune.

3) Soit ABCDEFGH un cube :



Trouvez une orthogonale commune aux droites …

a) (FG) et (AD).

b) (AB) et (DG).

c) (AH) et (CF).

d) (DH) et (AG).

e) (CH) et (DE).

f) (CF) et (AF).

4) Soit un point A, un plan α, la droite a passant par A et orthogonale à α, une droite b passant par A, différente de a et orthogonale à une droite d de α. Montrez qu'alors d est orthogonale au plan β déterminé par les droites sécantes a et b. (figure !)

5) Dans un plan α on a un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ et C un point de $\mathcal{C}$ différent de A et de B. Par A on mène la perpendiculaire a au plan α puis on choisit un point D différent de A sur a (figure).

a) Montrez que $(ACD) \perp (BCD)$.

b) Supposons que $AB = 10$, $CD = \sqrt{61}$ et $DB = 5\sqrt{5}$. Calculez les longueurs des arêtes, les aires des faces et le volume du **tétraèdre** ABCD.

6) Soient a, a' deux droites sécantes et P un point n'appartenant pas au plan déterminé par a et a'. Existe-t-il toujours une droite d passant par P, orthogonale à a et sécante avec a' ? Et si oui, combien y a-t-il de telles droites ?

7) Soient deux points A et B et un plan α. Combien y a-t-il de plans $\beta \perp \alpha$ qui passent par ces deux points ?

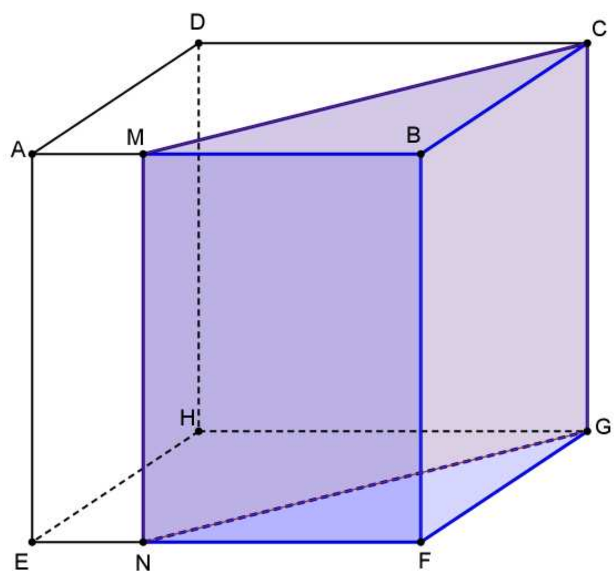
8) Soient deux triangles isocèles non coplanaires $\Delta(ABC)$ et $\Delta(ABD)$ ayant la même base principale $[AB]$ et M le milieu de $[AB]$. Que peut-on dire du plan (MCD) ?

9) Soit ABCD un **tétraèdre régulier** et H l'orthocentre du triangle $\Delta(ABC)$. Montrez que les plans médiateurs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ se coupent en la droite (HD).

10) Soient a et b deux droites orthogonales, A, B deux points de a et C, D deux points de b. Montrez que $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$ (indication : traitez d'abord le cas où a et b sont sécantes).

11) Soit ABCD un carré de côté x, d la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par A et E un point de d tel que $AE = x$ (ABCDE forme donc une **pyramide** de base carrée ABCD et de hauteur x). Calculez EB, EC et ED en fonction de x.

12) Soit ABCDEFGH un cube de côté 10 cm, $M \in [AB]$ et $N \in [EF]$ tel que $AM = EN = 2$ cm (le solide MBCNFG est un **prisme droit** de base triangulaire). Calculez l'aire totale des faces du prisme et son volume.



13) Soient A, B, C, D quatre points non coplanaires. Montrez qu'il existe une seule sphère qui passe par ces quatre points. *(Rappel : si O est un point et r un réel positif on appelle **sphère** de centre O et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace tel que* $OM = r$ *)*

14) Soient deux plans parallèles α et β. Déterminez le **lieu** (càd l'ensemble) des points équidistants de ces deux plans.

15) Soient d et d' deux droites parallèles. Déterminez le **lieu** des points équidistants de ces deux droites.

16) Soient A, B, C trois point non alignés. Déterminez le **lieu** des points équidistants de ces trois points.

17) Soit un plan α, un point $A \notin \alpha$ et k un réel strictement positif. Déterminez le lieu des points M tel que $M \in \alpha$ et $AM = k$ (discutez suivant la valeur du paramètre k).

18) Soit une droite d et un réel strictement positif k. Déterminez le lieu des points M de l'espace tel que $Md = k$ (où Md est la distance du point M à la droite d).

19) Soit une droite d, un point $A \in d$ et un réel positif k. Déterminez le lieu des points M de l'espace tel que $MA = k \cdot Md$ (discutez suivant la valeur de k).

20) Soit ABCD un tétraèdre régulier (les 6 arêtes ont la même longueur c), I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement.

a) Montrez que $(AB) \perp (CD)$.

b) Montrez que $(IJ) \perp (AB)$ et $(IJ) \perp (CD)$.

c) Calculez la hauteur du tétraèdre en fonction de c.

d) Calculez l'aire totale et le volume du tétraèdre en fonction du rayon R de la sphère circonscrite (càd qui passe par A, B, C et D).

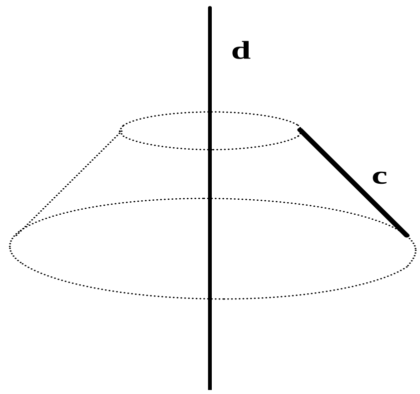
21) Par rotation d'un triangle équilatéral et de son cercle inscrit autour d'une de ses hauteurs, on obtient un cône et sa sphère inscrite. Démontrez que si le volume de la sphère vaut 4 dm^3, alors celui du cône en vaut 9.

22) Une pyramide a pour base un rectangle ABCD et pour sommet S tel que $(SA) \perp (ABC)$

a) Montrez que $\Delta(SAB)$, $\Delta(SAD)$, $\Delta(SBC)$ et $\Delta(SDC)$ sont des triangles rectangles.

b) Montrez que les 5 sommets de la pyramide appartiennent à une même sphère dont vous déterminerez le centre.

23) En coupant un cône de hauteur H et de base de rayon R par un plan perpendiculaire à sa hauteur on obtient un solide appelé **tronc de cône** qui a une grande base de rayon R et une petite de rayon r < R. (ce solide a la forme d'un abat-jour). On peut dire aussi que c'est la surface engendrée par rotation d'un segment de longueur c (appelé génératrice du tronc de cône) autour d'une droite d :



a) Calculez la longueur d'un arc de cercle d'angle α (mesuré en rd)et de rayon r, ainsi que l'aire du secteur angulaire associé (figure).

b) Soit un tronc de cône dont les bases ont comme rayons R et r respectivement et de génératrice c. Calculez son aire en fonction de R, r et c.

c) Calculez le volume du tronc de cône en fonction de R, r et c.