CHAPITRE V

PROBABILITES

COURS

1) Rappels sur les ensembles

- Un **ensemble** est une collection d'objets clairement définis appelés **éléments** de cet ensemble. Pour *définir un ensemble* on a deux possibilités :
  - On *énumère* tous les éléments de cet ensemble en les entourant de deux accolades : c'est la définition **par énumération** ou **en extension**. Ceci n'est possible que pour un **ensemble fini** càd un ensemble qui n'a qu'un nombre fini d'éléments (et de préférence pas trop grand….)

    p.ex. $A = \{a, o, i, u, e, y\}$
  - On *décrit* les éléments en donnant une propriété qui les caractérise et les distingue de tous les éléments qui n'appartiennent pas à cet ensemble : c'est la définition **en compréhension**.

    p.ex. *A est l'ensemble des voyelles de l'alphabet*, ou de manière plus « formelle » : $A = \{x \ / \ x \text{ est une voyelle de l'alphabet}\}$
- Le **cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E et il est noté :

  Card E ou # E

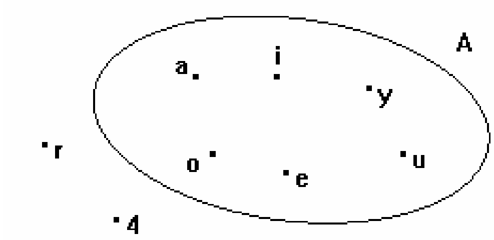
  p.ex. Card A = 6
- Il n'existe qu'un seul ensemble de cardinal 0 : c'est **l'ensemble vide** noté $\varnothing$

  p.ex. $P = \{x \ / \ x \text{ est un triangle rectangle équilatéral}\} = \varnothing$
- Un ensemble de cardinal 1 est appelé **singleton**.

  p.ex. $L = \{x \ / \ x \text{ est un entier qui a une infinité de diviseurs}\} = \{0\}$

- Pour *représenter* un ensemble E on dessine une ligne fermée et on met les éléments de E à l'intérieur de cette ligne, les autres à l'extérieur. Un tel schéma est appelé **diagramme de Venn**.

  p.ex.



- Les symboles $\boxed{\in \text{ et } \notin}$

  Pour un *ensemble* E et un *élément* x :

  $x \in E$ signifie que x est un élément de E

  $x \notin E$ signifie que x n'est pas un élément de E

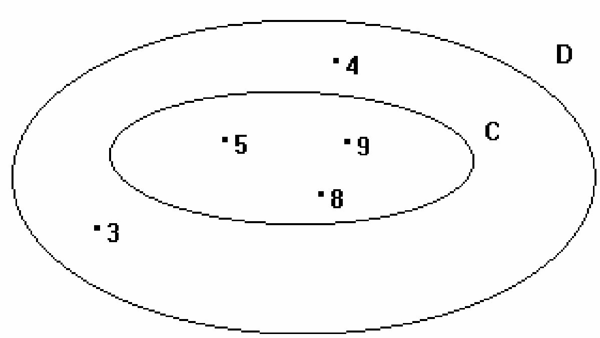
  p.ex. $e \in A$, mais $4 \notin A$

- Les symboles $\boxed{\subset \text{ et } \not\subset}$

  Pour *deux ensembles* E et F :

  $E \subset F$ signifie que *tous* les éléments de E sont aussi des éléments de F, c'est-à-dire que E est une **partie** ou un **sous-ensemble** de F

  p.ex. $C = \{5,\ 8,\ 9\}$, $D = \{3, 4, 5, 8, 9\}$, $C \subset D$



  $E \not\subset F$ signifie que E n'est pas un sous-ensemble de F, c'est-à-dire qu'il existe *au moins un* élément de E qui n'est pas dans F

Remarque : Pour tout ensemble E on a : $\varnothing \subset E$ (c'est la **partie vide** de E) et $E \subset E$ (c'est la **partie pleine** de E). Toute partie de E qui n'est ni vide, ni pleine est appelée **partie propre** de E

- **L'ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}$**(E)**.

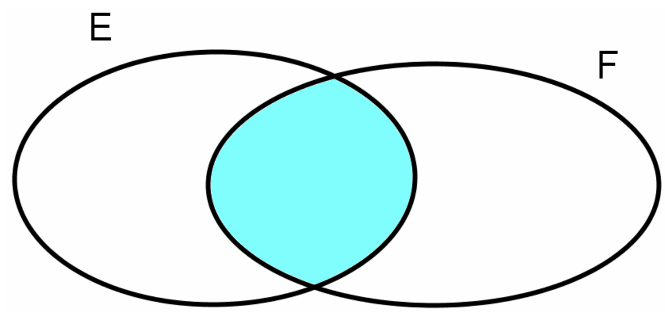
p.ex. $G = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathcal{P}(G) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, G\}$

Attention : on écrit $2 \in G$ car 2 est un *élément* de l'ensemble G, alors que $\{2\} \subset G$ car $\{2\}$ est un sous-*ensemble* de G et enfin $\{2\} \in \mathcal{P}(G)$ car $\{2\}$ est un *élément* de l'ensemble $\mathcal{P}(G)$!

Remarque : L'ensemble vide $\varnothing$ n'a qu'un seul sous-ensemble : lui-même ! Ainsi $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, ce qui montre en en particulier que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$!.

- On appelle **intersection** de deux ensembles E et F l'ensemble, noté $E \cap F$, des éléments qui appartiennent à E **et** à F.

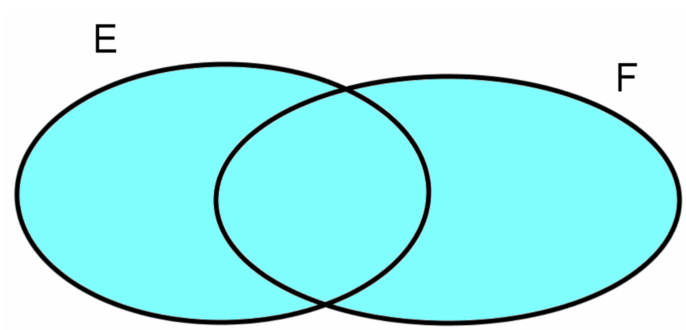
$$\boxed{E \cap F = \{x \,/\, x \in E \text{ et } x \in F\}}$$



Si $E \cap F = \varnothing$, on dit que E et F sont **disjoints**.

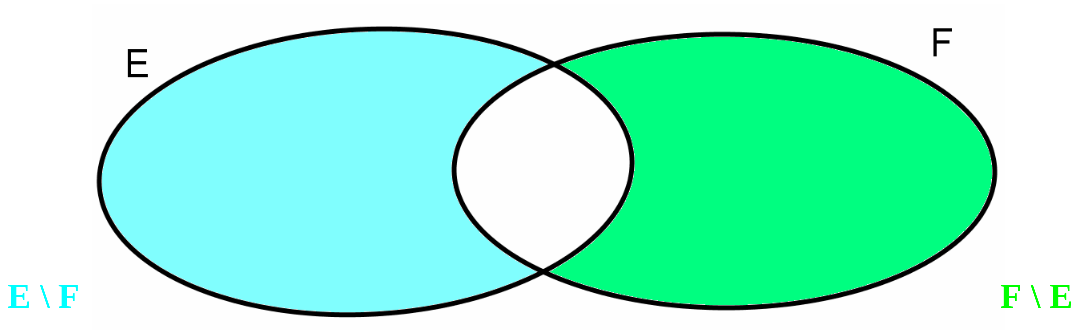
- On appelle **réunion** de deux ensembles E et F l'ensemble, noté $E \cup F$, des éléments qui appartiennent à E **ou** à F.

$$\boxed{E \cup F = \{x \,/\, x \in E \text{ ou } x \in F\}}$$



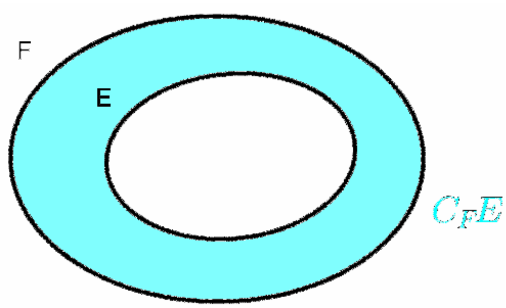
- On appelle **différence** de l'ensembles E et de l'ensemble F l'ensemble, noté $E \setminus F$, des éléments qui appartiennent à E mais pas à F.

$$\boxed{E \setminus F = \{x / x \in E \text{ et } x \notin F\}}$$



On voit que $E \setminus F$ et $F \setminus E$ sont deux ensembles disjoints !

- Si $E \subset F$ l'ensemble F \ E est appelé **complémentaire** de E *dans* (ou *par rapport à*) F et est noté $C_F E$.



<u>*Remarque*</u> : Si l'ensemble de référence F est évident d'après le contexte, le complémentaire de E (dans F) est souvent noté plus simplement : $\overline{E}$

- On vérifie facilement les <u>propriétés</u> suivantes :
  - L'intersection et la réunion sont commutatives et associatives :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

  - L'ensemble vide est neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$
  - L'intersection est distributive pour la réunion et la réunion est distributive pour l'intersection :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Si A, B sont des sous-ensembles de E, alors :

$$C_E(A\cap B)=C_E A\cup C_E B \text{ et } C_E(A\cup B)=C_E A\cap C_E B.$$

en notations simplifiées : $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

- $\#(E\cup F)=\#E+\#F-\#(E\cap F)$

- **Correspondances entre propositions logiques et ensembles.**

  - La **conjonction « et » correspond à l'intersection**.

    p.ex. « Pierre joue au tennis **et** au football » correspond à : $\text{Pierre}\in T\cap F$ où T est l'ensemble des joueurs de tennis et F l'ensemble des joueurs de football.

  - La **disjonction « ou » correspond à la réunion**.

    p.ex. « je ne sais pas si Pierre joue au tennis **ou** au football » correspond à : « je ne sais pas si $\text{Pierre}\in T\cup F$ »

  - **L'exclusion « mais pas » correspond à la différence.**

    p.ex. « Pierre joue au tennis **mais pas** au football » correspond à : : $\text{Pierre}\in T\setminus F$ où T est l'ensemble des joueurs de tennis et F l'ensemble des joueurs de football.

  - **La négation correspond au complémentaire**.

    p.ex. « Pierre **ne** joue **pas** au tennis » correspond à : $\text{Pierre}\in\overline{T}$, le complémentaire étant pris par rapport à un plus grand ensemble, par exemple l'ensemble des hommes.

- **Produit cartésien** de plusieurs ensembles.

  - Soient A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble, noté $A\times B$, des couples dont le premier élément appartient à A et le deuxième à B.

$$A\times B=\{(x,y)/x\in A \text{ et } y\in B\}$$

Attention :

Dans un couple l'ordre est essentiel, p. ex. $(3,4)\neq(4,3)$, donc $A\times B\neq B\times A$

Remarque :

Le produit cartésien d'un ensemble A par lui-même, $A\times A$, peut être noté également : A^2

- D'une manière générale, le produit cartésien de n ensembles $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ est l'ensemble des **n-uplets** défini par :

  $$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / x_i \in A_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n\}$$

  si $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n = A$, on note $A \times A \times \cdots \times A = A^n$

- **Cardinal d'un produit cartésien**

  Si les ensembles $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ sont finis, alors :

  $$\#(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n) = \# A_1 \cdot \# A_2 \cdot \cdots \cdot \# A_n = \prod_{i=1}^{n} \#(A_i)$$

  Exemples : $\#(A \times B) = \# A \cdot \# B$, $\#(A^2) = (\# A)^2$, etc.

2) Notion de « probabilité »

- En jetant une pièce de monnaie non truquée (jeu de « pile ou face ») on sait par avance que les ***résultats possibles*** sont « pile » ou « face », mais on est incapable de *prédire* exactement lequel de ces résultats va « sortir » ! Pour désigner une expérience de ce genre, on parle de « hasard » ou de **« phénomène aléatoire »**, deux mots qui ont la même signification puisque « hasard » vient de l'arabe « az-zar » qui veut dire « dé » et que « aléatoire » vient du latin « alea » qui veut dire la même chose ! La théorie des probabilités (du latin « probare », mettre à l'épreuve, essayer, mais aussi : prouver, démontrer) a pour but de construire des modèles mathématiques de **phénomènes aléatoires** c'est-à-dire d'expériences qu'on peut répéter, dans des conditions identiques, autant de fois qu'on le veut. Ceci bien entendu dans le but de rendre ces phénomènes *incertains* plus « probabilis », c'est-à-dire dignes d'approbation, acceptables et peut-être même un peu plus « prévisibles » ou « calculables »….

- *Approche pratique (statistique descriptive)* :

  On réalise l'expérience un certain nombre de fois (n fois) et on note le nombre de fois (p fois, avec $p \leq n$) qu'un certain résultat est sorti. La **fréquence** de ce résultat est alors le nombre réel positif : $f = \frac{p}{n} \in [0,1]$.

  p.ex. On lance n fois une pièce de monnaie, on note p le nombre de fois que « pile » est sorti, puis on calcule la fréquence f de « pile ». Le résultat d'une telle expérience pourrait être le suivant :

n	10	250	5700	500000
p	7	103	3024	261357
f	$\frac{7}{10} = 0,7$	$\frac{103}{250} \simeq 0,41$	$\frac{3024}{5700} \simeq 0,53$	$\frac{261357}{500000} \simeq 0,52$

  Parfois on multiplie la fréquence par 100 pour obtenir la fréquence en pourcentage (p.ex . $100 \cdot 0,41 = 41\%$ de « pile »)

- *Approche théorique (probabiliste)* :

  A chaque résultat possible on donne ***a priori*** (c'est-à-dire *sans réaliser l'expérience*) une certaine fréquence appelée **probabilité**.

  p.ex. pour le jeu de « pile ou face » il n'y a aucune raison *a priori* de penser que « pile » (P) sorte plus ou moins souvent que « face » (F), donc chacun des deux résultats a autant de « *chances* » de sortir que l'autre, c'est-à-dire « 1 chance sur 2 ». On dit alors que « pile » (P) et « face » (F) on chacun une probabilité de $\frac{1}{2}$ et on note : $p(P) = p(F) = \frac{1}{2}$.

- Le *lien* entre les deux approches est alors assuré par la **loi des grands nombres** qui affirme que plus le nombre n de fois que l'expérience est réalisée est grand, plus la fréquence (réelle) d'un certain résultat est proche de sa probabilité. *La probabilité d'un résultat serait en quelque sorte sa fréquence si on réalisait l'expérience une infinité de fois !* Cette affirmation de bon sens n'a jamais été contredite par la réalité, même s'il est bien sûr impossible de la vérifier en pratique…

3) Construction d'un modèle mathématique

- La première étape consiste à déterminer *de façon claire et précise* les résultats possibles de l'expérience aléatoire et de les compter !

  L'ensemble ou *univers* des **résultats possibles** ou **éventualités** ou encore **évènements élémentaires** sera noté Ω.

  Dans ce cours nous ne verrons que des exemples où Ω est un *ensemble fini* !

  Exemples

  (a) On joue à « pile ou face » : $\Omega=\{P, F\}$ et $\#\Omega=2$

  (b) On lance un dé normal et on note le nombre indiqué par la face supérieure du dé : $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\#\Omega=6$

  (c) On lance un dé deux fois de suite et on note la suite des deux nombres obtenus ou, ce qui revient au même, on lance deux dés de couleurs différentes : $\Omega=\{(x, y)\,/\,x \text{ est le résultat du } 1^{er} \text{ dé et } y \text{ celui du } 2^{e} \text{ dé}\}$ et $\#\Omega=6^2=36$

- La deuxième étape consiste à attribuer à toute éventualité (c'est-à-dire à tout élément de Ω) sa probabilité c'est-à-dire un nombre réel compris entre 0 et 1. Ceci revient à définir une application p, appelée **loi de probabilité,** qui à tout $x\in\Omega$ associe sa « probabilité » $p(x)\in[0,1]$ avec $\sum_{x\in\Omega} p(x)=1$.

  Cas particulier important : **équiprobabilité**

  Si $\#\Omega=n$ et si toutes les éventualités ont a priori la même chance de se réaliser, on posera : $\boxed{\forall x\in\Omega \quad p(x)=\frac{1}{n}}$

  Exemples

  (a) On a équiprobabilité : $p(P)=p(F)=\frac{1}{2}$

  (b) On a équiprobabilité : $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)=\frac{1}{6}$

  (c) On a équiprobabilité : $\forall(x,y)\in\Omega \quad p((x,y))=\frac{1}{36}$

  (d) On lance un dé dont trois faces portent le 1, deux faces le 3 et une face le 2. Alors $\Omega=\{1, 2, 3\}$ et $\#\Omega=3$, mais il serait très peu raisonnable de donner la même probabilité à chaque éventualité si on veut que le modèle mathématique représente correctement la réalité ! On pose donc : $p(1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(2)=\frac{1}{6}$ et $p(3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (on a bien : $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$!).

- On appelle **évènement** tout sous-ensemble de Ω et on dit qu'un évènement A *se produit* ou *se réalise* si le résultat de l'expérience appartient à A. La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités de ses éléments :

$$\boxed{\forall A \subset \Omega \quad p(A)=\sum_{x\in A} p(x)}$$

Dans le cas de l'équiprobabilité on obtient la fameuse **formule de Laplace** :

$$\boxed{\forall A \subset \Omega \quad p(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Il y a deux évènements « extrêmes » :

- L'évènement **certain :** Ω avec $p(\Omega)=1$

  p.ex. il est certain qu'en jetant un dé on va obtenir un entier inférieur à 7.

- L'évènement **impossible :** $\varnothing$ avec $p(\varnothing)=0$

  p.ex. il est impossible qu'en jetant un dé normal on obtienne 2,85 !

Un évènement peut être présenté soit par énumération (p.ex. $A=\{2, 4, 6\}$), soit en compréhension par une phrase (p.ex. A : « obtenir un nombre pair en jetant un dé »)

Exemples

(a) A part l'évènement certain et l'évènement impossible il n'y a que deux évènements qui correspondent aux deux éventualités : $\{P\}$ et $\{F\}$.

(b) $A=\{2, 4, 6\}$ et $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

B : « obtenir un nombre premier impair », $B=\{3, 5\}$ et $p(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

C : « obtenir un nombre inférieur à 6 », $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $p(C)=\frac{5}{6}$

(c) A : « obtenir deux fois le même résultat », $p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

B : « obtenir un nombre plus grand au deuxième jet qu'au premier » $p(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

(d) A : « obtenir un nombre impair », $p(A)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

- **Propriétés des évènements :**

Soient A et B deux évènements, alors :

- L'évènement $A\cap B$ se produit si A **et** B se produisent
- L'évènement $A\cup B$ se produit si A **ou** B se produisent
- $\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$
- si $A\cap B=\varnothing$ on dit que A et B sont **incompatibles** et on a :

$$\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$$

- L'évènement $\overline{A}=\complement_{\Omega}A=\Omega\setminus A$ est appelé évènement **contraire** de A et :

$$\boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$$

Cette formule est très utile quand l'évènement contraire est beaucoup plus simple à calculer que l'évènement lui-même, ce qui arrive souvent !

Exercices 1-15

4) Evènements indépendants et probabilité conditionnelle

- *Exemple 1*

Une urne contient une boule noire (N), une jaune (J) et une rouge (R). On tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule. Alors $\Omega=U\times U=U^2$ avec $U=\{N,\ J,\ R\}$ ou plus simplement en notant p.ex ; NR au lieu de (N,R) : $\Omega=\{NN,\ NJ,\ NR,\ JN,\ JJ,\ JR,\ RN,\ RJ,\ RR\}$, donc $\#\Omega=3^2=9$ et toutes les éventualités sont équiprobables. Considérons les évènements suivants :

A : « obtenir une boule noire N au 1^er tirage » càd $A=\{NN,\ NJ,\ NR\}$

B : « obtenir une boule jaune J au 2^e tirage », càd $B=\{NJ,\ JJ,\ RJ\}$

$A\cap B$: « obtenir N au 1^er tirage **et** J au 2^e tirage », càd $A\cap B=\{NJ\}$

Alors : $p(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $p(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{9}$

- *Exemple 2*

Reprenons la situation de l'exemple 1, mais sans remettre la première boule dans l'urne avant de tirer la deuxième. Dans ce cas $\Omega=\{NJ, NR, JN, JR, RN, RJ\}$, $\#\Omega=6$, $A=\{NJ, NR\}$, $p(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $B=\{NJ, RJ\}$, $p(B)=\cdots=\frac{1}{3}$, $A\cap B=\{NJ\}$ et $p(A\cap B)=\frac{\#(A\cap B)}{\#\Omega}=\frac{1}{6}$.

- *Commentaire*
  - Dans le premier exemple les évènements A et B sont *indépendants* dans le sens où le résultat du premier tirage n'influe en aucune manière sur le déroulement ou le résultat du deuxième tirage : il y a « 1 chance sur 3 » de tirer N au 1^{er} et de tirer J au 2^e tirage ! On constate que $p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=p(A\cap B)$.
  - Dans le deuxième exemple par contre, si on tire J au 1^{er} tirage, la probabilité de tirer J au 2^e est nulle, alors que si on tire N ou R au 1^{er} tirage, on a 1 chance sur 2 de tirer J au 2^e tirage, par conséquent les deux évènements A et B ne sont pas indépendants et de plus : $p(A)\cdot p(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\neq p(A\cap B)$

- *Définition*

On dit que A et B sont deux **évènements indépendants** si et seulement si

$$\boxed{p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)}$$

- *Problème*

Supposons que N est le résultat du 1^{er} tirage : quelle est alors la probabilité de tirer J au 2^e tirage ? En d'autres termes : quelle est la probabilité de B sachant que A est déjà réalisé ? Nous noterons cette probabilité : $p(B/A)$.

Dans la situation de l'exemple 1 : $p(B/A)=p(B)=\frac{1}{3}$.

Dans la situation de l'exemple 2 : $p(B/A)=\frac{1}{2}\neq p(B)$.

De plus on a :

  - dans l'exemple 1 : $p(B/A)\cdot p(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=p(A\cap B)$

- dans l'exemple 2 : $p(B/A)\cdot p(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$

Que A et B soient donc indépendants ou non, on a $p(B/A)\cdot p(A)=p(A\cap B)$, ce qui amène à poser la définition suivante :

- *Définition*

Si A et B sont deux évènements avec $p(A)\neq 0$, alors on appelle **probabilité conditionnelle de B en A** ou **probabilité de B sachant A,** la probabilité, notée $p(B/A)$, définie par :

$$\boxed{p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

Remarque : si $p(A)\neq 0$ alors A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(B/A)=p(B)$

Exercices 16-23

EXERCICES

1) Pour chacune des expériences suivantes, déterminez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal, une loi de probabilité p et calculez la probabilité $p(A)$ de l'évènement A proposé :

a) Jeter une pièce de monnaie et observer la face visible. A : « le côté visible est pile ».

b) Tirer une carte d'un jeu de 52 cartes et observer la ***couleur*** : trèfle, pique, cœur, carreau. A : « la couleur tirée est trèfle ».

c) Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes et observer la ***valeur*** : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. A : « la carte tirée est une image ».

d) Tirer une carte d'un jeu de 32 cartes et observer la teinte : rouge, noir. A : « la carte tirée est jaune ».

e) Tirer une boule d'une urne contenant 31 boules numérotées de 1 à 31. A : « tirer une boule impaire ».

f) Tirer une boule d'une urne contenant 5 boules rouges, 2 vertes, 9 bleues, 7 blanches et 3 noires. A : « la boule tirée n'est pas blanche ».

2) On lance un dé pipé (forme irrégulière ou matière non homogène) et on note les résultats obtenus. Après 50 000 lancers on constate que les fréquences des différents résultats se sont stabilisées autour des valeurs suivantes :

résultats	1	2	3	4	5
fréquences	0,2	0,08	0,13	0,09	0,1

En acceptant ces fréquences pour probabilités, quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 6 ?

b) un nombre pair ?

c) un nombre premier ?

3) François a un dé assez irrégulier qui ne donne pas les 6 chiffres avec la même fréquence. Pour établir la probabilité de chaque résultat il a lancé son dé 100000 fois en notant les résultats obtenus. Voici le tableau des fréquences qu'il a obtenues :

x	1	2	3	4	5	6
p({x})	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$

Qu'en pensez-vous ?

4) On jette un dé non pipé. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre :

a) strictement inférieur à 5 ?

b) strictement supérieur à 4 ?

c) pair ?

d) premier ?

e) impair supérieur à 2 ?

5) On fait 3 parties consécutives de « pile ou face » avec une pièce non truquée. :

a) Déterminez l'ensemble Ω, son cardinal et une loi de probabilité p.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir plus de « face » que de « pile » ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois « pile » ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir « pile » au troisième jet ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir « face » au premier et au troisième jet ?

f) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois le même côté ?

g) Quelle est la probabilité d'obtenir autant de « face » que de « pile » ?

6) On jette un dé deux fois de suite et on fait la somme des deux résultats obtenus.

a) Déterminez l'ensemble Ω, son cardinal et une loi de probabilité p.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

b) un nombre pair ?

c) au moins 3 ?

d) au plus 9 ?

Soient les évènements A : « obtenir 1 au premier jet » et B : « obtenir une somme inférieure à 4 », calculez la probabilité de :

e) $A \cap B$

f) $A \cup B$

g) $A \setminus B$

h) $B \setminus A$

7) D'un jeu de 52 cartes on tire 1 carte au hasard. Quel est l'ensemble Ω et la loi de probabilité qui s'impose ? Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) un pique ?

b) une dame ?

c) un 10 ou un roi ?

d) un valet ou un trèfle ?

e) un roi, une dame ou un carreau ?

8) Une urne contient une boule noire, une blanche et une rouge. On effectue successivement 2 tirages d'une boule, la boule tirée en premier étant replacée dans l'urne avant de tirer la deuxième. Quelle est la probabilité :

a) de tirer deux fois la boule rouge ?

b) de tirer exactement une fois la boule blanche ?

c) de tirer au moins une fois la boule noire ?

d) de ne pas tirer la boule jaune ?

9) Reprenez l'exercice 8) mais sans remettre la première boule dans l'urne avant de tirer la deuxième (tirage sans remise ou sans répétition).

10) Un jeu de 32 cartes est distribué carte par carte. Quelle est la probabilité pour que la troisième carte soit la dame de cœur ?

11) D'une une urne contenant 3 boules blanches, 2 noires, 7 rouges et 5 jaunes on tire une boule. Déterminez l'ensemble Ω et une loi de probabilité p. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) une boule qui ne soit pas rouge ?

b) une boule noire ou une boule jaune ?

12) On lance trois fois de suite un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

13) Un dé est pipé de telle façon que la probabilité d'apparaître pour chacune des faces soit proportionnelle au chiffre de cette face (p.ex. le 3 a trois fois plus de chances de sortir que le 1).

a) Définissez l'ensemble Ω des éventualités, son cardinal et la loi de probabilité p qui convient.

b) En jetant ce dé une fois, est-il plus probable d'obtenir un chiffre pair ou impair ?

14) On tire successivement et au hasard 4 lettres du mot PROFITABLES sans remettre les lettres dans l'urne après les avoir tirées. Quelle est la probabilité pour que dans l'ordre du tirage ces lettres forment le mot RATE ?

15) Quatre hommes déposent leurs chapeaux au vestiaire, mais au moment de les récupérer on les leur rend au hasard ! En choisissant judicieusement l'ordre des six questions suivantes, calculez la probabilité pour que :

a) Chacun récupère son propre chapeau ?

b) Personne ne récupère son propre chapeau ?

c) Au moins une personne récupère son propre chapeau ?

d) Exactement 1 personne récupère son propre chapeau ?

e) Exactement 2 personnes récupèrent leur propre chapeau ?

f) Exactement 3 personnes récupèrent leur propre chapeau ?

16) Dans une urne il y a 7 boules noires, 4 boules rouges et 1 boule verte. On tire successivement 2 boules de l'urne.

a) A quelle condition les évènements A : « obtenir une boule rouge au 1er tirage » et B : « obtenir une boule rouge au 2^{e} tirage » sont-ils indépendants ?

b) Définissez l'ensemble Ω des éventualités et la loi de probabilité p qui convient si on fait un tirage *avec remise*.

c) Même question avec un tirage *sans remise*.

17) On joue au jeu suivant : on lance une pièce et si on obtient « pile » on a gagné, sinon on peut lancer la pièce une deuxième fois pour essayer d’obtenir « pile ».

a) Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Dans ce jeu il y a trois résultats possibles :

- on obtient « pile » au premier jet et on a gagné
- on obtient « face » au premier jet et « pile » au deuxième et on a encore gagné
- on obtient deux fois « face » et on a perdu

Par conséquent la probabilité de gagner vaut $2/3$! »

b) Quelle est la bonne solution ?

c) En supposant qu’on peut lancer la pièce jusqu’à ce qu’on obtienne « pile », quelle est la probabilité que le jeu s’arrête au 10^e lancer ? au nième lancer ?

18) Pour faire une photo Anatole, Bernard et Charles sont placés au hasard l’un à côté de l’autre. Analysez si les évènements M : « B. est à droite de A. » et N : « C. est à droite de A. » sont indépendants.

19) En lançant un dé non pipé deux fois de suite, analysez si les évènements A : « obtenir 3 au 1^{er} jet » et B : « la somme des deux nombres obtenus vaut 8 » sont indépendants.

20) D’une urne contenant 4 boules vertes, 3 noires et 3 rouges, on tire successivement 4 boules avec remise. Quelle est la probabilité d’obtenir dans l’ordre :

a) 4 boules vertes ?

b) 3 vertes, puis 1 rouge ?

c) 1 verte, 1 rouge puis 2 noires ?

21) Mêmes questions qu’à l’exercice précédent mais sans remise.

22) Parmi les habitants d’une ville de bord de mer il y a deux fois plus de femmes que d’hommes. Lors d’une élection, 7/8 des femmes et 75 % des hommes ont voté.

a) Calculez la probabilité pour qu’une personne adulte choisie au hasard ait voté dans cette élection.

b) Une personne, choisie au hasard, interrogée par une radio locale affirme avoir voté à cette élection. Calculez la probabilité que ce soit une femme.

23) Combien de fois faudrait-il au moins lancer une pièce de monnaie non truquée pour que la probabilité de n’obtenir que des « face » soit inférieure à 0,01 ?