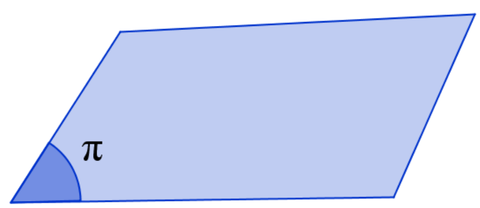
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

A) POINTS, DROITES, PLANS DANS L'ESPACE

1) Notations et premières propriétés

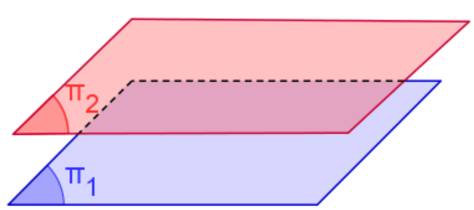
- Les **points** dans l'espace sont notés, comme ceux du plan, par des lettres majuscules : A, B, C, ….
- Les **droites** dans l'espace sont notées, comme celles du plan, par des lettres minuscules : d, a, b, …..
- Par deux points distincts A et B de l'espace il passe exactement une droite (comme dans le plan !) qu'on note (AB) ou (BA).
- On dit que plusieurs points A, B, C, D…. sont **alignés** s'il existe une droite qui passe par tous ces points.
- Les **plans** dans l'espace sont notés par des lettres grecques minuscules : π, α, β, ...
- Par trois points non alignés A, B, C de l'espace il passe exactement un plan qu'on note (ABC).
- On dit que plusieurs points A, B, C, D…. sont **coplanaires** s'il existe un plan qui passe par tous ces points.
- Pour représenter un plan « en perspective » on dessine (à main levée) une sorte de parallélogramme :



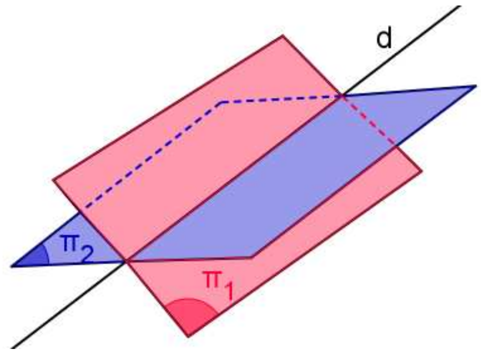
2) Positions relatives de deux plans

Soient π_1 et π_2 deux plans de l'espace. On a trois possibilités :

- $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$: les deux plans sont **confondus**
- $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$: les deux plans sont **strictement parallèles**

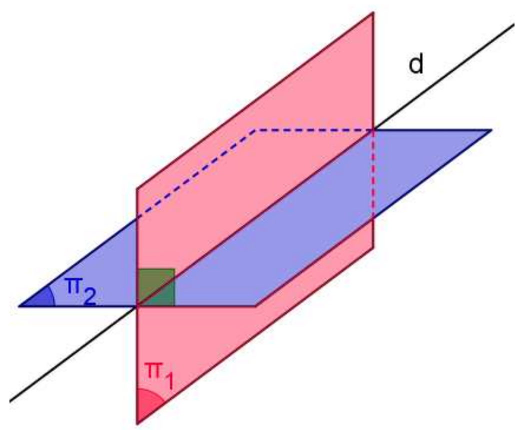


- $\pi_1 \cap \pi_2 = d$ (où d est une droite !) : les deux plans sont **sécants :**



Remarques

- Le terme « sécant » vient du latin « secare » qui veut dire « couper ». Voici une liste de termes ayant la même *étymologie* : bissectrice, intersection, segment, sécateur, sécable (ce qu'on peut couper, et non pas « coupable » qui a un tout autre sens !), secteur, section, sectionner, secte, sectaire, dissection, vivisection, insecte (animal « découpé », dont le corps est formé de plusieurs volumes nettement distincts)
- On dit que deux plans π_1 et π_2 sont **parallèles** et on note $\pi_1 \parallel \pi_2$ si et seulement si ils sont confondus ou strictement parallèles.
- Si deux plans forment un angle de $90°$ on dit qu'ils sont perpendiculaires et on note : $\pi_1 \perp \pi_2$

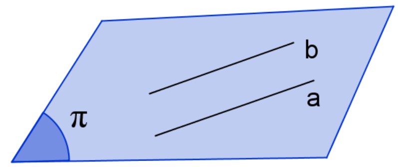


3) Positions relatives de deux droites

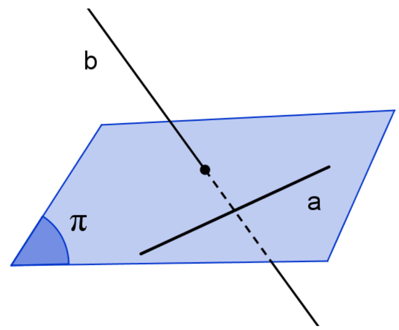
Soient a et b deux droites de l'espace. On a quatre possibilités :

- $a \cap b = a = b$: les deux droites sont **confondues.**
- $a \cap b = \{I\}$: les deux droites sont **sécantes en I** (elles se coupent au point I).

- $a \cap b = \varnothing$ et <u>a et b sont coplanaires</u> : on dit que a et b sont **strictement parallèles**.

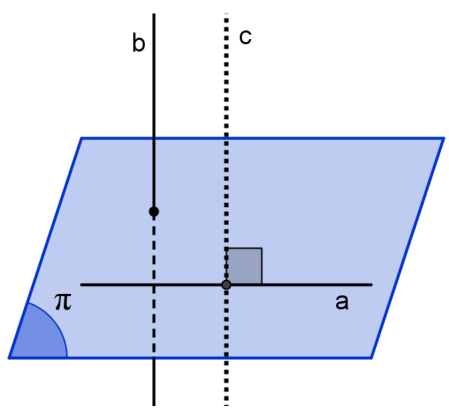


- $a \cap b = \varnothing$ et <u>a et b ne sont pas coplanaires</u> : on dit que a et b sont **gauches**.



Remarques

- Si a et b sont confondues ou strictement parallèles on dit qu'elles sont **parallèles** et on note $a \parallel b$.
- Deux droites sécantes ou parallèles sont toujours coplanaires.
- Dire que deux droites sont gauches revient à dire qu'elles ne sont pas coplanaires.
- Si a et b sont sécantes et forment un angle de $90°$ (angle droit) on dit que a et b sont perpendiculaires et on note $a \perp b$.
- Si a et b sont deux droites gauches et s'il existe une droite c perpendiculaire à a et parallèle à b ($c \parallel a$ et $c \perp b$) on dit que a et b sont **orthogonales** et on note $a \perp b$.

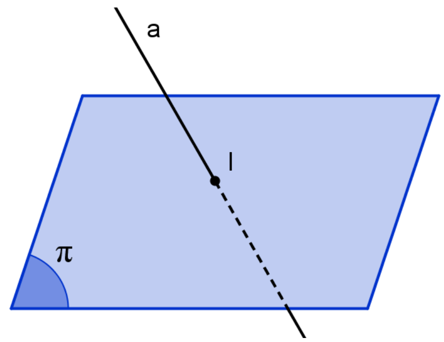


- Deux droites perpendiculaires sont aussi orthogonales mais l'inverse est faux !

4) Positions relatives d’une droite et d’un plan

Soient d une droite et π un plan de l’espace. On a trois possibilités :

- $a \subset \pi$: la droite a est « dans » le plan π.
- $a \cap \pi = \{I\}$: on dit que a et π sont sécants en I ou que a « perce » le plan π au point I



- $a \cap \pi = \varnothing$: on dit que a est **strictement parallèle** à π

Remarques

- Si a et π sont sécants et forment un angle de $90°$ on dit qu’ils sont **perpendiculaires** et on note : $a \perp \pi$. On peut montrer que :

$$a \perp \pi \Leftrightarrow \text{ a est orthogonale à toute droite incluse dans } \pi$$

- Si a est dans π ou strictement parallèle à π on dit que qu’ils sont **parallèles** et on note $a \parallel \pi$.

Exercice 1

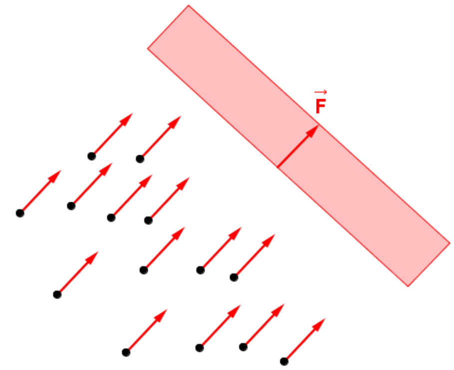
B) VECTEURS DANS L’ESPACE

Les vecteurs dans le plan et les vecteurs dans l’espace sont définis exactement de la même manière et ils ont les mêmes propriétés. Cette partie du cours peut donc être considérée à la fois comme une révision et une généralisation de notions déjà traitées les années précédentes. Nous noterons $\mathcal{E}$ l’ensemble des points de l’espace.

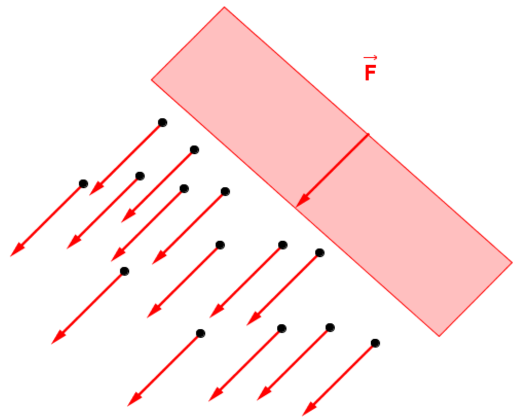
1) Exemple : force exercée par un aimant

Tout le monde sait qu’en plaçant des billes en fer au voisinage d’un aimant (Magnet), celles-ci sont soit attirées, soit repoussées par celui-ci. En physique on parle d’une **force** (d’attraction ou de répulsion), notée $\vec{F}$, exercée par l’aimant sur ces billes et celle-ci est représentée par des flèches partant de chacune de ces billes.

Voici l'exemple d'un aimant (rectangle rouge) qui attire les billes (points noirs) :



… et l'exemple d'un aimant qui les repousse :



On constate que sur chacune de ces deux figures toutes les flèches ont :

- la **même longueur** : celle-ci caractérise en effet **l'intensité** de la force (ainsi les flèches de la 1^re^ figure sont moins longues que celles la 2^e^ figure : c'est que la force d'attraction de la 1^re^ figure est moins importante que la force de répulsion de la 2^e^ figure)
- la **même direction (les flèches sont toutes parallèles)** : celle qui est perpendiculaire à la surface de l'aimant tournée vers les billes et qui indique la direction dans laquelle celles-ci vont se déplacer sous l'impulsion de la force $\vec{F}$
- le **même sens** : sur la 1^re^ figure les flèches sont tournées vers l'aimant pour signifier que les billes sont attirées par l'aimant et vont donc se déplacer vers celui-ci, alors que sur la 2^e^ figure les flèches sont orientées dans le sens opposé pour signifier que les billes sont au contraire repoussées par l'aimant et vont s'éloigner de lui.

La notion de **« force »** en physique correspond à la notion de **« vecteur »** en mathématiques.

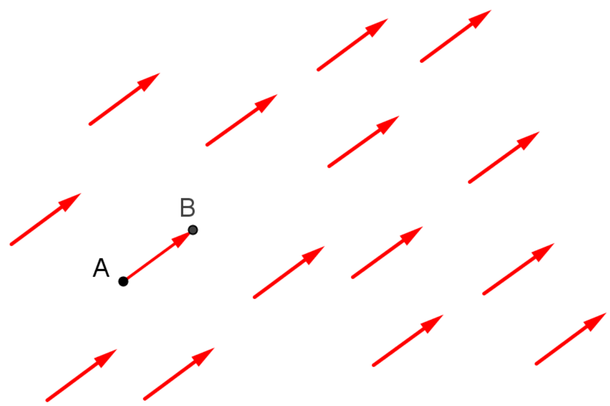
2) Définitions et notations

Définitions

Un **vecteur** est un *ensemble infini de flèches* qui ont toutes :

- même **direction**
- même **sens**
- même **longueur** appelée **norme** du vecteur

Chacune de ces flèches est **un représentant** du vecteur.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Notations

- un vecteur peut être noté de deux manières :
  - une lettre minuscule surmontée d'une flèche, p. ex. : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}, \ldots$
  - deux lettres majuscules, désignant **l'origine et l'extrémité** d'un représentant particulier du vecteur, surmontées d'une flèche, p. ex. : $\overrightarrow{AB}$
- la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$
- l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}$

Remarques

- pour connaître un vecteur *il suffit de connaître un seul représentant* du vecteur !
- la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que la distance de A à B :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \overline{AB}$$

- la norme d'un vecteur est un nombre réel positif ou nul : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$
- En classe de 5^e vous avez vu qu'une translation qui transforme A en B est notée $t_{\overrightarrow{AB}}$: on dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$!

Cas particuliers

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le seul vecteur de norme nulle. En effet :

  $$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$$

  De plus ce vecteur n'a pas de direction (ou toutes les directions, ce qui revient au même…) donc pas de sens non plus ! Ce vecteur est appelé **vecteur nul** et il est note $\vec{0}$:

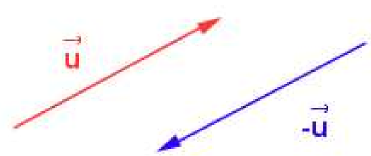
  $$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots \quad \text{et} \quad \left\|\vec{0}\right\| = 0$$

- Un vecteur $\vec{u}$ tel que $\left\|\vec{u}\right\| = 1$ est appelé **vecteur unitaire**.

- Soient A et B deux points distincts, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction (car $(AB) = (BA)$), même norme (car $AB = BA$), mais des sens opposés : on dit que $\overrightarrow{BA}$ est le **vecteur opposé** de $\overrightarrow{AB}$ et on note :

  $$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

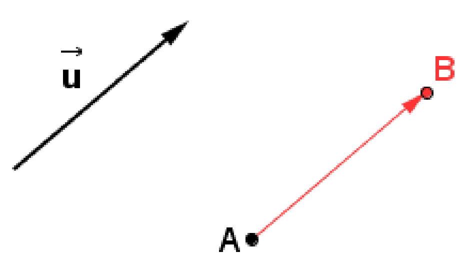
  De manière générale, deux **vecteurs opposés** $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs qui ont même direction, même norme et des sens opposés.



Propriété

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un point A, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire qu'il existe un représentant unique de $\vec{u}$ qui admet A comme origine).

$$\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad \exists! B \in \mathcal{E} \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}}$$



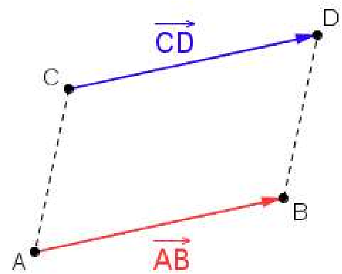
3) Egalité de deux vecteurs

- D'après la définition d'un vecteur, deux **vecteurs** sont **égaux** si et seulement s'ils ont <u>même direction, même sens et même norme</u>.
- Soient A, B, C et D quatre points <u>de l'espace</u>. A quelle condition a-t-on $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\,(*)$?

  Remarquons que (*) signifie que les deux flèches (celle qui va de A vers B et celle qui va de C vers D) sont deux représentant du même vecteur et que ceci n'est possible que si A, B, C et D sont <u>coplanaires</u> puisqu'on doit avoir $(AB)\parallel(CD)$.

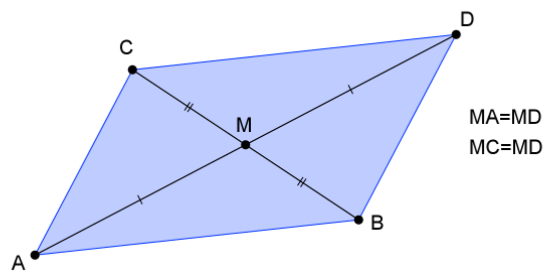
  Supposons pour commencer que A, B, C et D ne sont pas alignés. Il suffit alors de faire une figure pour voir tout de suite que

  $$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (AB\mathbf{DC}) = \#\ (\textit{parallélogramme})$$

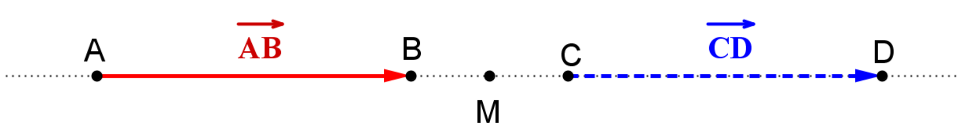


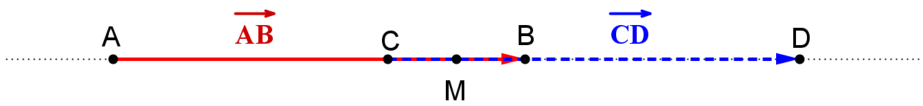
  Or nous savons qu'on peut définir un # en disant que c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu :

  $$\boxed{(ABDC)=\# \Leftrightarrow \text{milieu de }[AD]=\text{milieu de }[BC]=M}$$



  Or cette définition s'applique aussi quand A, B C, D sont alignés : on parle alors d'un « **parallélogramme aplati** ». Ainsi sur les deux figures suivantes (ABDC) est un # puisque M est le milieu à chaque fois des « diagonales » $[AD]$ et $[BC]$ et on voit bien que les deux flèches sont deux représentants du même vecteur :





Conclusion

$$\boxed{\forall A, B, C, D \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#}$$

Remarque

Sur les figures on voit facilement que :

$$\begin{aligned}(ABDC) = \# &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

- *Exemple des aimants :*

  En replaçant un aimant par un aimant 2, 3, … k fois ($k \in \mathbb{R}_+^*$) plus fort, la force exercée sur les billes gardera la même direction et le même sens mais son intensité (c'est-à-dire la longueur des flèches) sera « multipliée » par 2, 3 , … k. La nouvelle force sera alors notée $2 \cdot \vec{F}$, $3 \cdot \vec{F}$, … $k \cdot \vec{F}$, ce qui définit une multiplication d'une force (donc d'un vecteur) par un réel positif.

  Il semble alors naturel de définir $-2 \cdot \vec{F}$, $-3 \cdot \vec{F}$, … , $-k \cdot \vec{F}$ comme les forces (ou vecteurs) *opposées* aux forces $2 \cdot \vec{F}$, … $k \cdot \vec{F}$ et de poser $0 \cdot \vec{F} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, ce qui nous amène à la définition suivante :

- **Définition**

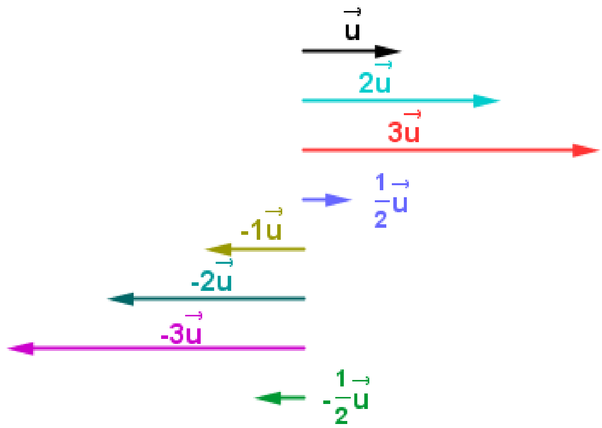
  Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $k \cdot \vec{u}$ est le vecteur défini de la manière suivante :

  - si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors : $0 \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$
  - si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et **$k > 0$** alors :
    - $k \cdot \vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
    - $k \cdot \vec{u}$ a **même sens** que $\vec{u}$
    - $\|k \cdot \vec{u}\| = k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et **$k < 0$** alors :
  - $k \cdot \vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
  - $k \cdot \vec{u}$ a le **sens opposé** de $\vec{u}$
  - $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \cdot \|\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

- *Remarque* : Dans tous les cas on a $\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|}$

- *Exemples*



On voit que toutes ces flèches, c'est-à-dire tous les représentants de $\vec{u}$ et de $k \cdot \vec{u}$, ont même direction. On exprime ceci en disant que $\vec{u}$ et $k \cdot \vec{u}$ sont *colinéaires*.

- **Définition**

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un nombre réel k tel que

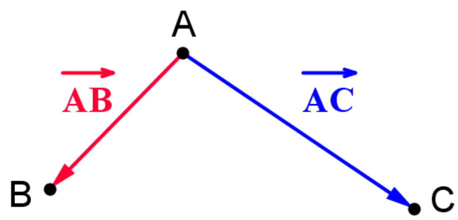
$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

- **Propriétés**
  - $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$
  - si on convient que $\vec{0}$ a *toutes les directions*, alors on peut dire deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont même direction
  - En observant les deux figures suivantes :

    figure 1

A, B, C sont alignés et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

figure 2



A, B, C ne sont pas alignés et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

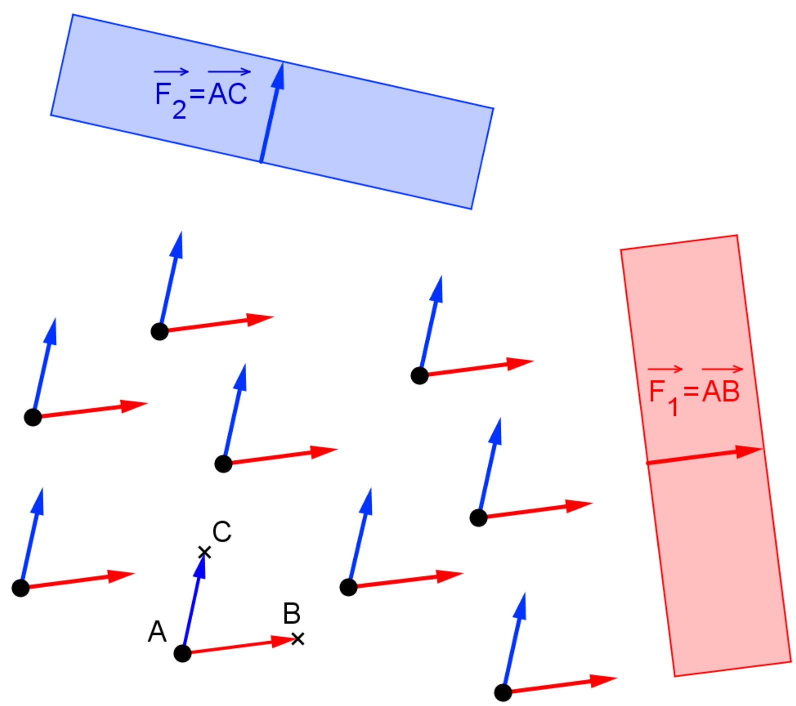
on voit que :

$$\boxed{\forall A, B, C \in \mathcal{E} \quad \text{A, B, C sont alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}}$$

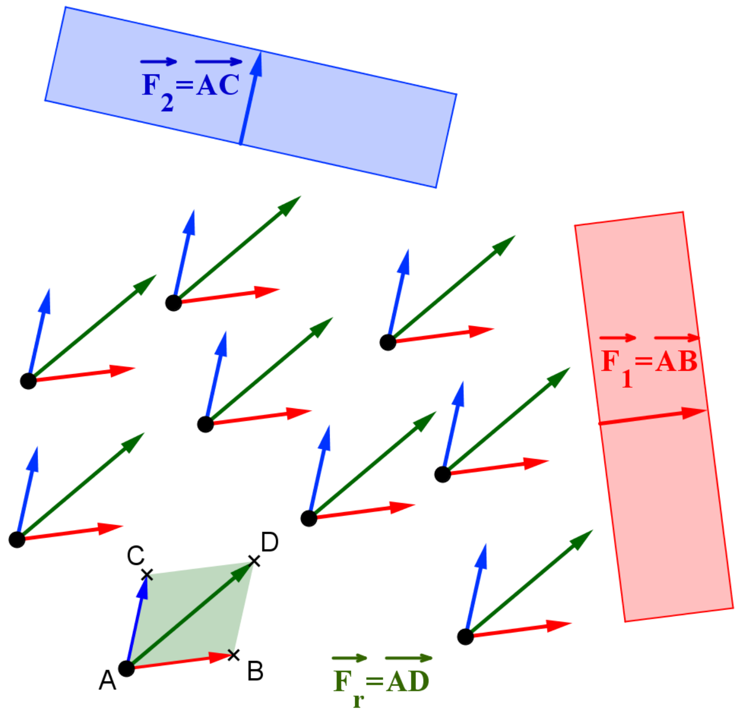
5) Addition et soustraction des vecteurs

- *Exemple*

Reprenons l'exemple des billes soumises à la force $\vec{F_1}$ d'un premier aimant (rouge sur la figure) et rajoutons un deuxième aimant (bleu) qui exerce la force $\vec{F_2}$ de direction différente sur les billes :



Alors l'expérience montre que tout se passe *comme si* les billes étaient attirées par un troisième aimant (invisible) dans une direction « intermédiaire » avec une force $\vec{F_r}$ représentée par les flèches vertes :



De plus cette force $\vec{F_r}$, appelée **force résultante** en physique, est telle que ses représentants forment <u>la diagonale d'un parallélogramme</u> dont les côtés sont formés par les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$:

$$\text{Si } \vec{F_1} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{F_2} = \overrightarrow{AC} \text{ alors } \vec{F_r} = \overrightarrow{AD} \text{ avec (AB}\mathbf{D}\text{C) = \# (*)}$$

Si les deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ont <u>même direction</u> la relation (*) reste valable et (ABDC) est un # aplati.

Si $\vec{F_2} = -\vec{F_1}$ la force résultante sera la force nulle !

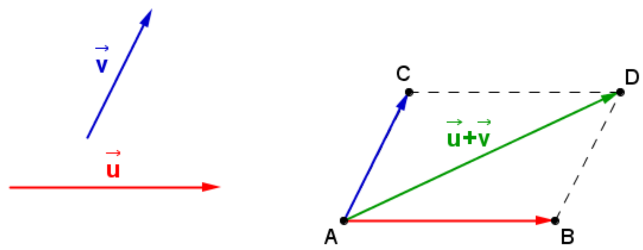
En mathématique cette force résultante est appelée **somme** des deux vecteurs.

- **<u>Définition</u>**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors on appelle **<u>somme de ces deux vecteurs</u>** le vecteur, noté $\vec{u}+\vec{v}$, dont *un représentant* est construit selon l'une des deux règles (équivalentes) suivantes :

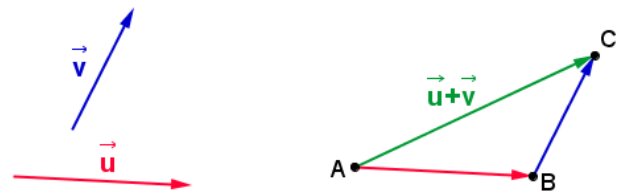
<u>Règle du parallélogramme</u> :

On choisit un point quelconque A, puis on construit <u>le</u> point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, <u>le</u> point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis <u>le</u> point D tel que (AB**D**C) = # (éventuellement aplati, si les deux vecteurs sont colinéaires). Alors $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AD}$:



Règle simplifiée :

Sur la figure précédente $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ puisque (AB**DC**) = #, donc il suffit de construire le représentant de $\vec{v}$ d'origine B, c'est-à-dire le point C tel que $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et on a directement $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, sans passer par le # :



Remarque

La règle du parallélogramme consiste à choisir deux représentants de même origine ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$), alors qu'avec la règle simplifiée on choisit deux représentants consécutifs ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$).

- Il est facile de voir sur ces figures que pour tous $\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{V}$ on a :
  - $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
  - $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens
- La règle simplifiée montre que :

$$\boxed{\forall A,B,C\in\mathcal{E}\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

Cette formule, très importante pour le calcul vectoriel, est appelé **relation de Chasles**.

- **Soustraction dans $\mathcal{V}$**

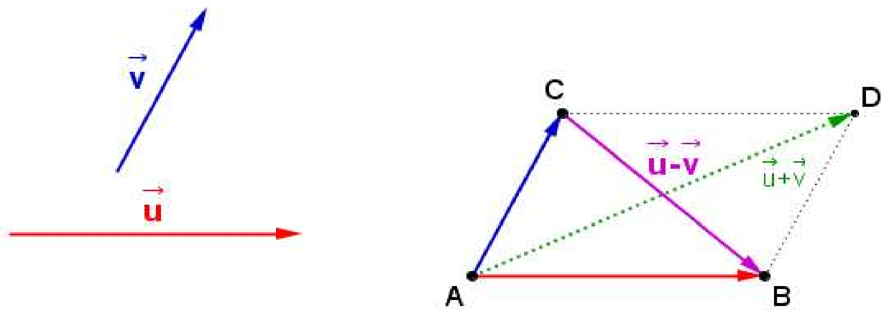
Nous savons qu'on peut définir la soustraction de deux nombres a et b à partir de l'addition en posant : $a-b=a+(-b)$, c'est-à-dire que pour retrancher un nombre b d'un nombre a, on ajoute son opposé. On fait de même pour définir la soustraction des vecteurs :

$$\boxed{\forall\,\vec{u},\vec{v}\in\mathcal{V}\quad \vec{u}-\vec{v}\underset{\text{déf}}{=}\vec{u}+(-\vec{v})}$$

Construction de $\vec{u}-\vec{v}$:

On choisit un point quelconque A, puis on construit <u>le</u> point B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et <u>le</u> point C tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Alors $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{CB}$.

En effet $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\overset{!}{=}\overrightarrow{CB}$.



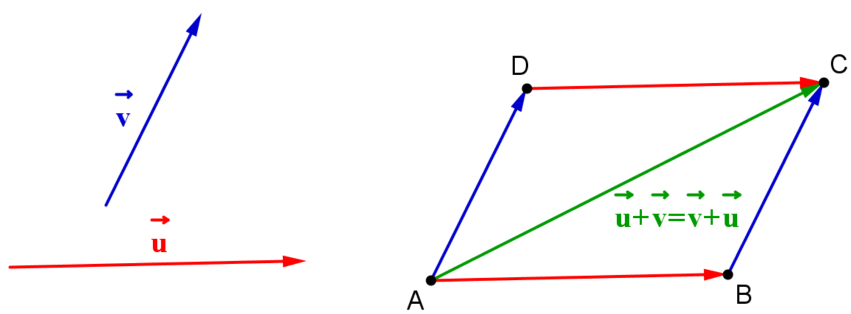
6) <u>Propriétés du calcul vectoriel</u>

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et a, b deux nombres réels.

- L'addition des vecteurs est **commutative** : $\boxed{\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$

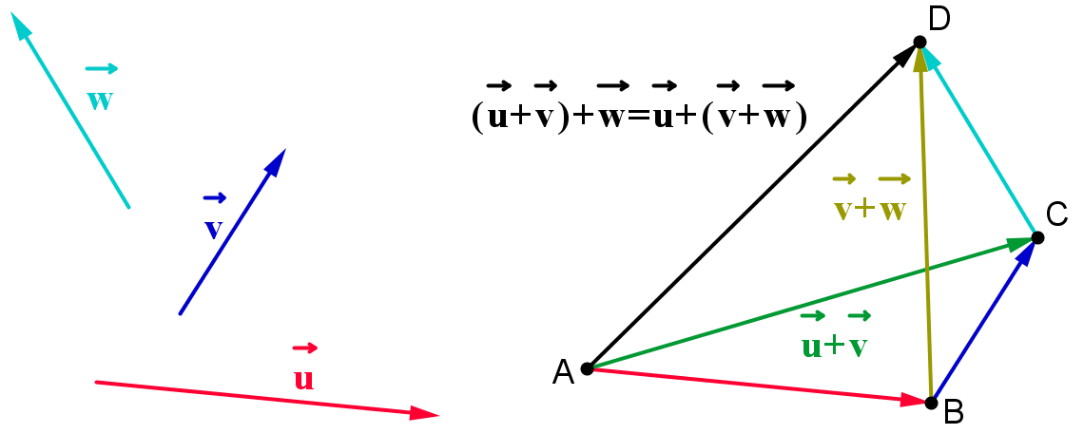
  En effet soient A, B, C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et D le point tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{DC}$, alors d'après la relation de Chasles on a :

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$



- L'addition des vecteurs est **associative** : $\boxed{(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}$

  En effet soient A, B, C, D quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$, alors $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles et on a de même : $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.



- Comme l'addition des vecteurs est commutative et associative, on peut écrire une somme de plusieurs vecteurs <u>sans parenthèses et dans l'ordre qu'on veut</u> :

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{u}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{u}+\vec{v}=\dots$$

- $\vec{0}$ est l'**élément neutre** de l'addition des vecteurs : $\boxed{\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}}$

  En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, alors comme $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$ on a : $\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\vec{0}+\vec{u}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ d'après la relation de Chasles.

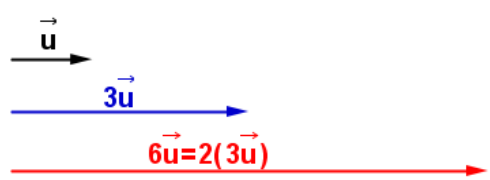
- $\boxed{\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}}$

  En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, alors comme $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ on a : $\vec{u}+(-\vec{u})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ et $(-\vec{u})+\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

- $\boxed{1\cdot\vec{u}=\vec{u} \quad \text{et} \quad (-1)\cdot\vec{u}=-\vec{u} \quad \text{et} \quad 0\cdot\vec{u}=\vec{0}}$ (évident !)

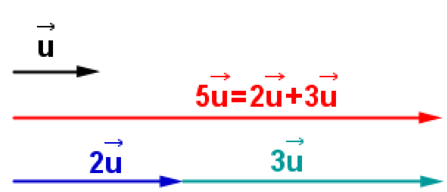
- $\boxed{(ab)\cdot\vec{u}=a\cdot(b\cdot\vec{u})}$ et on écrit simplement : $ab\vec{u}$

  p. ex. $a=2$ et $b=3$



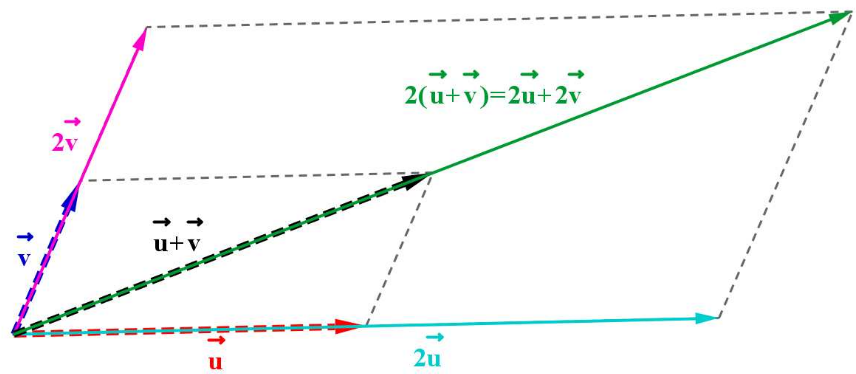
- $\boxed{(a+b)\cdot\vec{u}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u}}$

  p. ex. $a=2$ et $b=3$



- $\boxed{a\cdot(\vec{u}+\vec{v})=a\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}}$

  p. ex. $a=2$

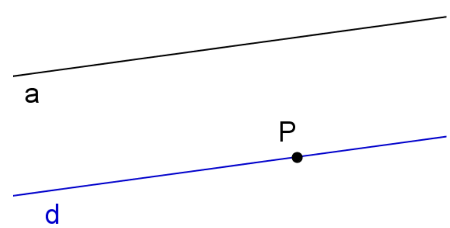


Remarque

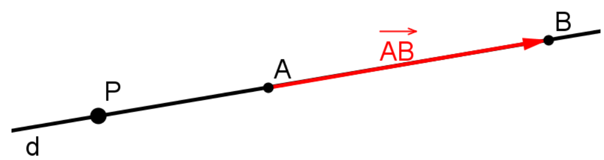
Ces propriétés montrent que les règles de calcul sur les vecteurs « fonctionnent » de la même manière que celles sur les nombres réels, sauf qu'on ne peut PAS multiplier ou diviser deux vecteurs entre eux !

7) Equation vectorielle d'une droite

- Soit un point P et une droite a, alors il existe exactement une seule droite d qui passe par A et qui est parallèle à a comme le montre la figure suivante :



La droite d est donc entièrement déterminée si on connaît un point de d et une droite qui lui est parallèle, c'est-à-dire qui indique sa **direction** ! Or pour indiquer une direction on peut également utiliser un vecteur : la direction de la droite d est connue si on connaît n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ où $A\in d$ et $B\in d$:



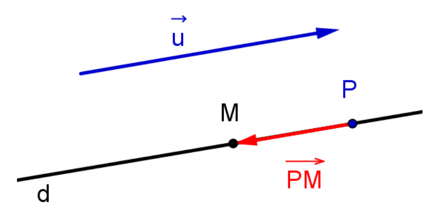
Un tel vecteur est appelé **vecteur directeur** de d.

- Une droite admet une <u>infinité de vecteurs directeurs</u> qui sont tous colinéaires.
- Soient deux droites a et b de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement. Alors on a :

$$\boxed{a \parallel b \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$$

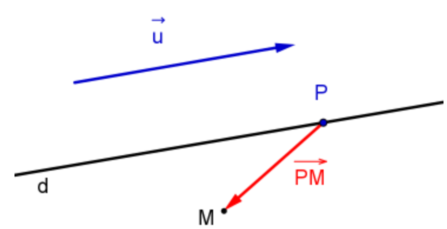
- Soit d une droite définie par un point P et un vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point quelconque du plan. Deux cas peuvent se présenter :

<u>1^er cas</u> : $M \in d$



$\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont colinéaires

<u>2^e cas</u> : $M \notin d$



$\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ ne sont pas colinéaires

Conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall M \quad M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u} \end{aligned}}$$

L'équation $\overrightarrow{PM} = k \cdot \vec{u}$ où P est un point de d, $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et k un réel est appelée **<u>équation vectorielle</u>** de d.

- **<u>Définition</u>**

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux **<u>vecteurs orthogonaux</u>**, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

  - $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
  - $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $a \perp b$ où a et b sont deux droites quelconques de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

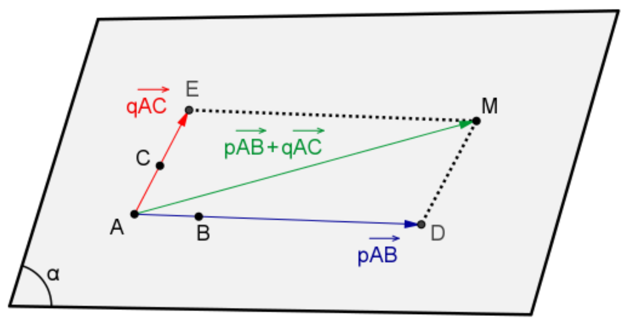
8) Equation vectorielle d'un plan

- **Définition**

  Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur de la forme $p\cdot\vec{u}+q\cdot\vec{v}$

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires* et A, B, C trois points (non alignés) de l'espace tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Alors pour tout réel p il existe un point $D\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{AD}=p\cdot\vec{u}$ et pour tout réel q il existe un point $E\in(AC)$ tel que $\overrightarrow{AE}=q\cdot\vec{v}$. En désignant par M le point de l'espace tel que $(ADME)=\#$ on a :

$$p\cdot\vec{u}+q\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}\ :$$



Comme les sommets d'un # sont coplanaires on a $M\in(ABC)$, d'où:

- **Théorème**Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}$, alors :

$$\boxed{M\in(ABC)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC}}$$

- **Conséquence**

  Soit un plan α et A, B, C trois points non alignés de α. Alors $\alpha=(ABC)$ et $M\in\alpha\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=$ combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire :

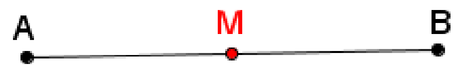
$$\boxed{\alpha=\left\{M\in\mathcal{E}\ /\ \overrightarrow{AM}=p\cdot\overrightarrow{AB}+q\cdot\overrightarrow{AC} \text{ avec } p,\ q\in\mathbb{R}\right\}}$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux **vecteurs directeurs** (non colinéaires) de α et que $\overrightarrow{AM}=p\cdot\overrightarrow{AB}+q\cdot\overrightarrow{AC}$ est une **équation vectorielle** de α.

Ainsi pour connaître un plan il suffit de connaître un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

9) Milieu d'un segment

- Soit M le milieu de $[AB]$:

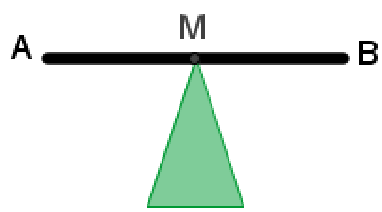


Il est alors évident que :

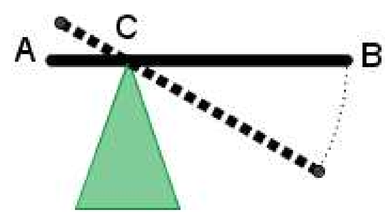
$$\boxed{\forall A,B,M \quad M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}}$$

- **Interprétation physique :**

Plaçons un bâton [AB] sur la pointe d'un cône en position parfaitement horizontale, puis lâchons-le : si le bâton repose en son milieu M sur la pointe du cône, le bâton reste en <u>équilibre</u>, si par contre il repose sur un point C différent du milieu, il y a <u>déséquilibre</u> et il va tomber.



(équilibre)



(déséquilibre)

Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ (respectivement $\overrightarrow{MB}$) représente la force exercée par l'extrémité A (resp. B) du bâton sur le point M et l'égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ exprime le fait que la force résultante est la force nulle : il ne se passe rien, le bâton reste en équilibre !

Par contre la force résultante $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ n'étant pas nulle, elle va entraîner le bâton vers le bas (il tombe)…

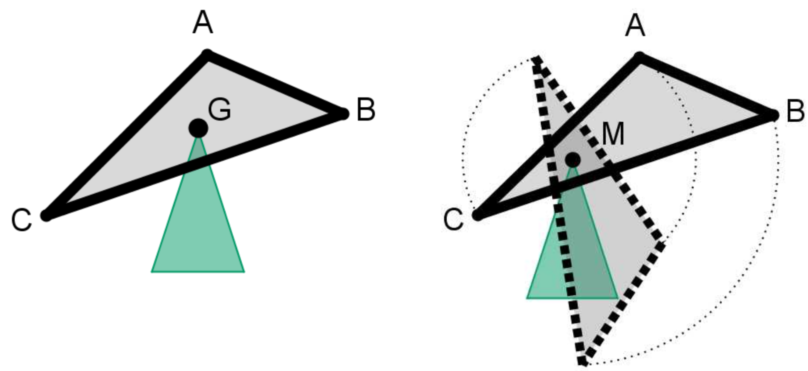
<u>Conclusion</u> :

Le milieu est le point d'équilibre appelé **<u>centre de gravité</u>** du segment (du bâton).

10) Centre de gravité d'un triangle

- **Interprétation physique :**

Soit ABC un triangle (découpé dans une plaque homogène, p. ex. une plaque en bois). Nous allons chercher « le point d'équilibre » de ce triangle, c'est-à-dire le point G tel que le triangle posé horizontalement sur ce point reste en équilibre :



(équilibre) *(déséquilibre)*

Comme pour le bâton, les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ représentent les forces exercées respectivement par les sommets A, B et C sur le point G. Le point d'équilibre est alors caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, alors que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\neq\vec{0}$.

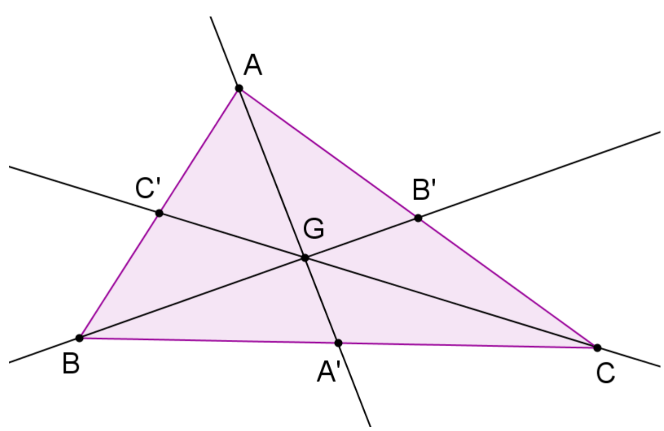
- **Définition**

  On appelle **centre de gravité** d'un triangle $\Delta(ABC)$ le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

- **Propriétés de G**

  Soient un triangle $\Delta(ABC)$, A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ et G le centre de gravité, alors :



o $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'},\quad \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'},\quad \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC'},}$

démonstration :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\ (\text{Chasles})$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3\cdot\overrightarrow{GA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\cdot\overrightarrow{AG}$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot\overrightarrow{AA'}=3\cdot\overrightarrow{AG}\ (\text{voir exercice } 19)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AA'}$$

Les deux autres égalités se démontrent de façon analogue (exercice !)

- $\boxed{G\in(AA')\cap(BB')\cap(CC')}$

démonstration :

Nous venons de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc les points A, A' et G sont alignés (propriété p. 12) et par conséquent $G\in(AA')$. On montre de même que $G\in(BB')$ et $G\in(CC')$, d'où le résultat.

Remarque :

Comme les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les trois **médianes** du triangle, nous venons de montrer que G est le point d'intersection de ces médianes !

Exercices 2 à 11

C) VECTEURS ET COORDONNEES

1) Repères

a) Repères d'une droite

- Soit d une droite et $O, I\in d$ avec $O\neq I$, alors :

$$\forall M\in\mathcal{E}\quad M\in d\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\quad \overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{OI}\ (*)$$

- De plus ce réel k est unique.

En effet s'il existait k et k' tel que $\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}=k'\cdot\overrightarrow{OI}$ alors :

$$k\cdot\overrightarrow{OI}=k'\cdot\overrightarrow{OI}\Leftrightarrow(k-k')\overrightarrow{OI}=\vec{0}\Leftrightarrow k=k' \text{ ou } \overrightarrow{OI}=\vec{0}, \text{ or } \overrightarrow{OI}\neq\vec{0}, \text{ donc } k=k'.$$

- **Définition**

  L'unique réel k tel que $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}$ est appelé l'**abscisse** du point M dans le **repère** $\left(O, \overrightarrow{OI}\right)$ d'**origine O**. On note $M(k)$.

  Ainsi : $\boxed{M(k) \text{ dans } \left(O, \overrightarrow{OI}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OI}}$

b) Repères d'un plan

- Soit α un plan et O, I, J trois points non alignés de α, alors on a d'après le théorème page 19 :

  $$M \in (OIJ) = \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \text{ est une combinaison linéaire de } \overrightarrow{OI} \text{ et } \overrightarrow{OJ}$$
  $$\Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$$

- De plus le couple (p, q) est unique.

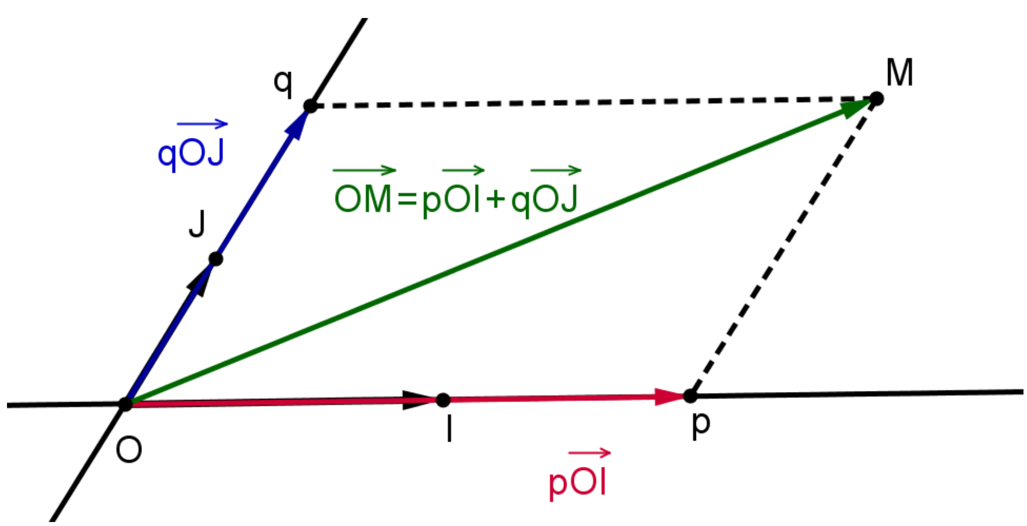
  En effet si $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OM} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ}$ alors :

  $p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} = p' \cdot \overrightarrow{OI} + q' \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow (p - p') \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ}$ (*).

  Mais alors $p - p' = 0$ car sinon on aurait $\overrightarrow{OI} = \dfrac{q' - q}{p - p'} \cdot \overrightarrow{OJ}$ et O, I, J seraient alignés (puisque $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ colinéaires) ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent $\boxed{p = p'}$ et (*) devient :

  $0 \cdot \overrightarrow{OI} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow \vec{0} = (q' - q) \cdot \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow q' - q = 0 \text{ ou } \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

  donc $q' - q = 0$ puisque $\overrightarrow{OI} \neq \vec{0}$ et on a également $\boxed{q = q'}$, cqfd.



- **Définition**

  L'unique couple de réels (p,q) tel que $\overrightarrow{OM} = p\cdot\overrightarrow{OI} + q\cdot\overrightarrow{OJ}$ est appelé le couple des **coordonnées** du point M dans le **repère** $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ de α d'**origine O**. On note $M(p,q)$, p est appelé l'**abscisse** et q l'**ordonnée** de M. Ainsi :

$$\boxed{M(p,q) \text{ dans } \left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p\cdot\overrightarrow{OI} + q\cdot\overrightarrow{OJ}}$$

- **Cas particuliers**

  Si $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$ on dit que $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ est un repère **orthogonal** et si de plus les deux vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = \left\|\overrightarrow{OJ}\right\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

c) Repères de l'espace

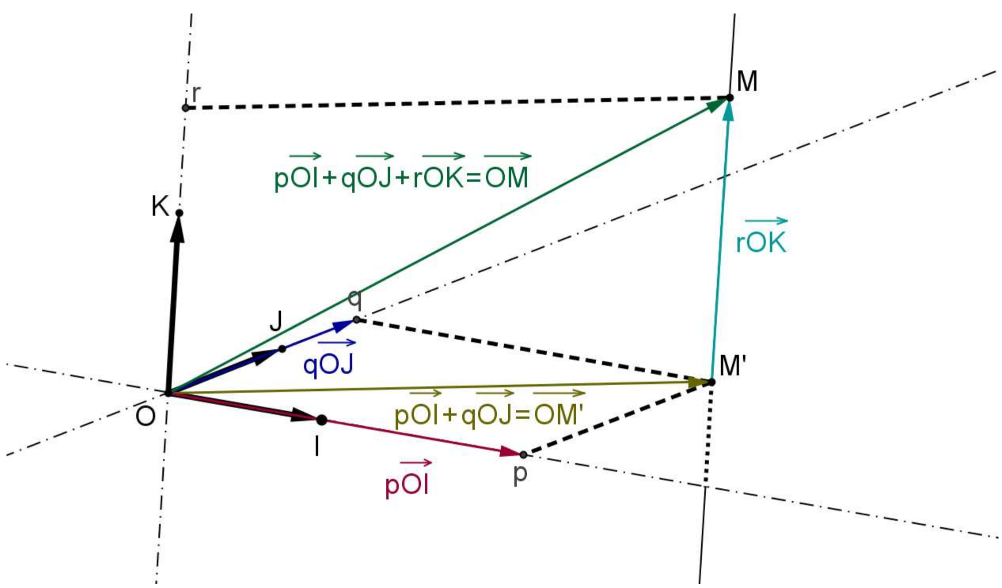
- Soient O, I, J, K quatre points non coplanaires (OIJK = tétraèdre) et M un point quelconque dans l'espace.

  Alors il existe une droite d unique qui passe par M et qui est parallèle à OK : cette droite coupe le plan OIJ en M' et on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ (1).

  Dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ du plan OIJ : $M'(p,q)$ donc $\overrightarrow{OM'} = p\cdot\overrightarrow{OI} + q\cdot\overrightarrow{OJ}$ (2).

  D'autre part $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires (puisque $M'M = d \parallel OK$) donc il existe un réel r unique tel que $\overrightarrow{M'M} = r\cdot\overrightarrow{OK}$ (3).

  En remplaçant (2) et (3) dans (1) il vient : $\overrightarrow{OM} = p\cdot\overrightarrow{OI} + q\cdot\overrightarrow{OJ} + r\cdot\overrightarrow{OK}$.



- **Définition**

L'unique triplet de réels (p,q,r) tel que $\overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}$ est appelé le triplet des **coordonnées** du point M dans le **repère** $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ d'**origine O** de l'espace. On note $M(p,q,r)$, p est appelé l'**abscisse**, q l'**ordonnée** et r la **cote** de M. Ainsi :

$$\boxed{M(p,q,r) \text{ dans } (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = p \cdot \overrightarrow{OI} + q \cdot \overrightarrow{OJ} + r \cdot \overrightarrow{OK}}$$

Les trois vecteurs du repère sont souvent notés $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ et le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- **Cas particuliers**

Si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux on dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère **orthogonal** et si de plus les trois vecteurs sont unitaires, c'est-à-dire si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, on dit qu'on a un **repère orthonormé** : on note **R.O.N.**

- **Conclusion**

Un repère est toujours constitué d'un point fixe appelé origine du repère et :

  - d'un vecteur directeur $\overrightarrow{OI}$ dans le cas d'une droite
  - de deux vecteurs directeurs non colinéaires dans le cas d'un plan
  - de trois vecteurs dont aucun n'est une combinaison linéaire des deux autres (ce qu'on exprime en disant qu'ils sont *linéairement indépendants*) dans le cas de l'espace.

Pour repérer un point M il faut donc

  - 1 abscisse si $M \in d : M(p)$
  - 2 coordonnées si $M \in \alpha : M(p,q)$
  - 3 coordonnées si $M \in \mathcal{E} : M(p,q,r)$

On exprime cette dernière propriété en disant qu'une droite est de **dimension** 1, un plan de dimension 2 et l'espace de dimension 3.

Exercice 12 - 14

2) Coordonnées d'un vecteur

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère quelconque de $\mathcal{E}$, nous venons de voir que chaque point de l'espace est repéré par 3 coordonnées dans ce repère. Nous allons voir maintenant qu'on peut également repérer un vecteur de l'espace par 3 coordonnées dans ce repère !

a) Définition

Soit $\vec{u}\in\mathcal{V}$ et $M(p,q,r)$ le point de $\mathcal{E}$ qui vérifie $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ *(voir propriété p 8)*, alors :

$$\vec{u}=\overrightarrow{OM}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}$$

On dit que (p,q,r) est le triplet des **coordonnées** de $\vec{u}$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et on note :

$$\vec{u}(p,q,r) \text{ ou } \vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} \text{dans} \left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right) \Leftrightarrow \vec{u}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k}}$$

Remarques :

- Prendre les mêmes coordonnées pour le point M et pour le vecteur $\vec{u}$ se justifie par le fait qu'un vecteur $\vec{u}$ est entièrement déterminé quand on connaît un de ses représentants $\overrightarrow{OM}$.
- La notation « verticale » des coordonnées est utilisée exclusivement pour les vecteurs et servira souvent à remplacer dans un « calcul vectoriel » un vecteur par cette « parenthèse en hauteur »contenant ses coordonnées.
- Il résulte de ce qui précède que deux vecteurs (ou deux points) sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées dans un repère donné.

b) Formules valables dans n'importe quel repère

- Soient $A(x_A,y_A,z_A)\in\mathcal{E}$ et $B(x_B,y_B,z_B)\in\mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}\right)\\&=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$

Exemple : $A(5;-3;7)$, $B(-1;0;9)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha\left(x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}\right) = \alpha x_u\vec{i} + \alpha y_u\vec{j} + \alpha z_u\vec{k}$, d'où :

$$\boxed{\alpha \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \\ \alpha z_u \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k} + x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k} \\ &= (x_u + x_v)\vec{i} + (y_u + y_v)\vec{j} + (z_u + z_v)\vec{k} \end{aligned}$$

d'où : $$\boxed{\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}}$$

Exemples : $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors : $3 \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -21 \end{pmatrix}$, $-7\vec{v}\begin{pmatrix} 56 \\ -77 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$$2 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ -55 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -65 \\ -29 \end{pmatrix}.$$

- Milieu d'un segment $[AB]$:

$$\begin{aligned} M = \text{milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \\ z_A - z_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_M \\ y_B - y_M \\ z_B - z_M \end{pmatrix} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B - 2x_M \\ y_A + y_B - 2y_M \\ z_A + z_B - 2z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B - 2x_M = 0 \\ y_A + y_B - 2y_M = 0 \\ z_A + z_B - 2z_M = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

D'où : $$\boxed{M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)}$$

- Centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x_G \\ y_A - y_G \\ z_A - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_G \\ y_B - y_G \\ z_B - z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_G \\ y_C - y_G \\ z_C - z_G \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A + x_B + x_C - 3x_G \\ y_A + y_B + y_C - 3y_G \\ z_A + z_B + z_C - 3z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{G = \text{centre de gravité de } \Delta(ABC) \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)}$$

Exemples :

$A(-17;8;-9)$, $B(23;0;-11)$, $C(-2;15;-24)$ alors :

milieu de $[AB]$: $M(3;4;-10)$

centre de gravité du $\Delta(ABC)$:

$$G\left(\frac{-17+23-2}{3}; \frac{8+0+15}{3}; \frac{-9-11-24}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{3}; -\frac{44}{3}\right)$$

c) Formules valables uniquement dans un R.O.N.

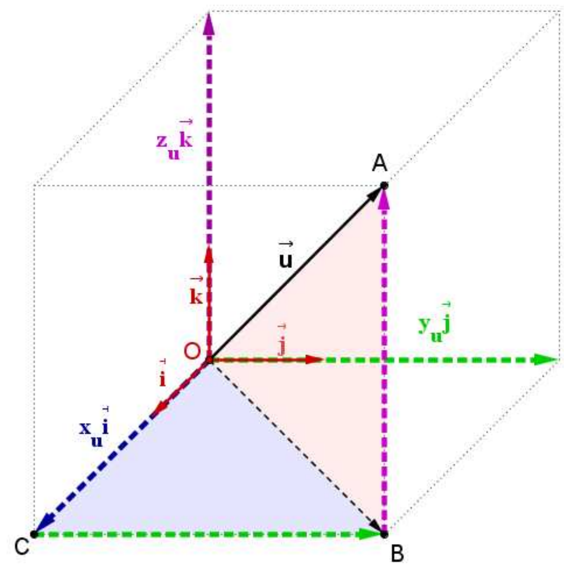
On suppose maintenant que $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un R.O.N..

- **Norme d'un vecteur**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et les points $A\left(x_u ; y_u ; z_u\right)$, $B\left(x_u ; y_u ; 0\right)$ et $C\left(x_u ; 0 ; 0\right)$.

Alors $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ et comme $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un R.O.N :

- le triangle $\Delta(OCB)$ est rectangle en C donc $\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2$ (Pythagore)
- le triangle $\Delta(OAB)$ est rectangle en B donc $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BA}^2$ (Pythagore)
- D'où $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{BA}^2$ (1).



Or : $\overline{OC} = \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \left\|x_u\vec{i}\right\| = |x_u|\left\|\vec{i}\right\| = |x_u| \cdot 1 = |x_u|$ (2),

$\overline{CB} = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \left\|y_u\vec{j}\right\| = |y_u|\left\|\vec{j}\right\| = |y_u| \cdot 1 = |y_u|$ (3),

$\overline{BA} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|z_u\vec{k}\right\| = |z_u|\left\|\vec{k}\right\| = |z_u| \cdot 1 = |z_u|$ (4).

En remplaçant (2), (3), (4) dans (1) il vient :

$$\left\|\vec{u}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 = \overline{OA}^2 = |x_u|^2 + |y_u|^2 + |z_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

d'où :

$$\boxed{\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}$$

Exemple :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}7\\ \sqrt{6}\\ -3\end{pmatrix},\ \|\vec{u}\|=\sqrt{7^2+\sqrt{6}^2+(-3)^2}=\sqrt{49+6+9}=8$$

- **Distance de deux points**

  Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors :

$$\boxed{\overline{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

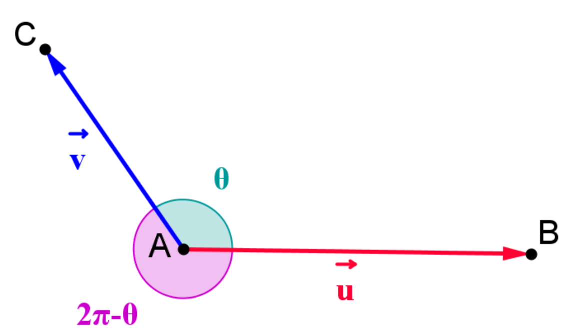
Exercices 15 – 21

D) PRODUIT SCALAIRE

1) Définitions

a) Angle formé par deux vecteurs non nuls

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A, B, C trois points (non alignés) de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$:



L'angle $\theta=\widehat{BAC}$, indépendant des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ choisis, est appelé **angle formé par les vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté parfois $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$. En fait $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment deux angles : θ et $2\pi-\theta$, dont l'un est <u>saillant</u> (c'est-à-dire de mesure comprise entre 0 et π radians), l'autre <u>rentrant</u> (c'est-à-dire de mesure strictement comprise entre π et 2π radians). Or comme on va le voir tout de suite, nous ne nous intéresserons qu'au *cosinus* de cet angle et comme $\cos(2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$, nous choisirons toujours celui des deux angles qui est saillant : $\boxed{0\leq\theta\leq\pi}$

b) Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$** le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (*on lit* : « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), défini par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}}$$

où $\theta = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ étant l'angle (saillant) formé par les deux vecteurs.

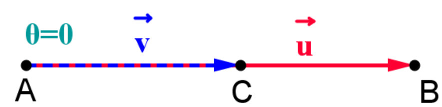
Exercices 22 et 23

2) Interprétation géométrique

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ et $\theta = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

- **1^er cas :** $\theta = 0$

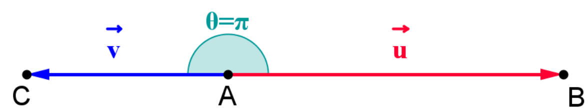
  Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos 0 = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot 1 = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| = \overline{AB}\cdot\overline{AC}$.



- **2^e cas :** $\theta = \pi$

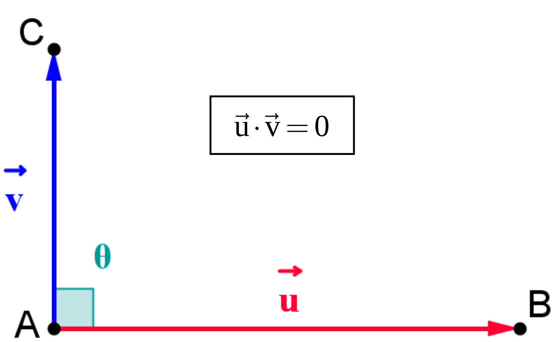
  Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, des sens opposés et

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\pi = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot(-1) = -\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| = -\overline{AB}\cdot\overline{AC}.$$



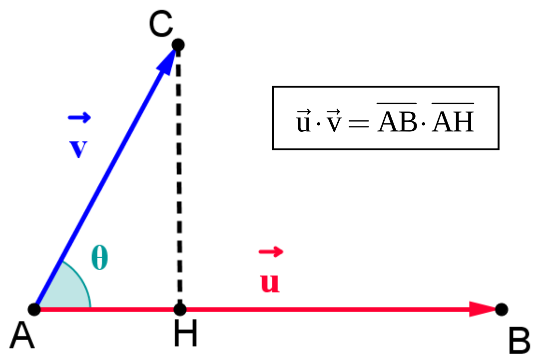
- **3^e cas :** $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

  Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\dfrac{\pi}{2} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot 0 = 0$.



- **4^e^ cas :** $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

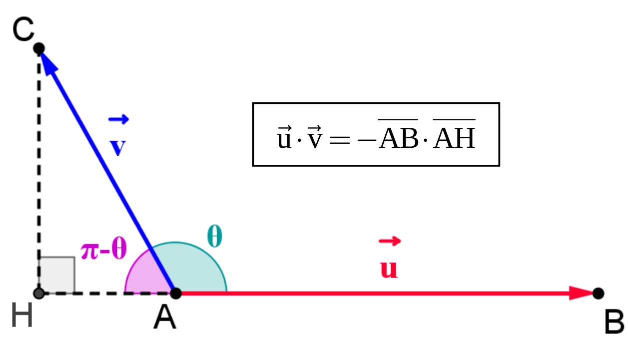
  Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\Delta(AHC)$ est rectangle en H donc $\cos\theta = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$ et par conséquent : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta = \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \overline{AB}\cdot\overline{AH}$.



- **5^e^ cas :** $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

  Soit H la projection orthogonale de C sur AB, alors $\Delta(AHC)$ est rectangle en H donc $\cos(\pi-\theta) = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow -\cos\theta = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos\theta = -\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$ et par conséquent :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta = \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\left(-\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}\right) = -\overline{AB}\cdot\overline{AH}.$$



3) Expression analytique

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un R.O.N., $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$, A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\theta = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$. Nous supposerons d'abord que les deux vecteurs sont non nuls, alors trois cas peuvent se présenter :

1^er cas : $\theta = 0$

Alors il existe un réel <u>positif</u> k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_v = k \cdot x_u \\ y_v = k \cdot y_u \\ z_v = k \cdot z_u \end{cases}$ et on a :

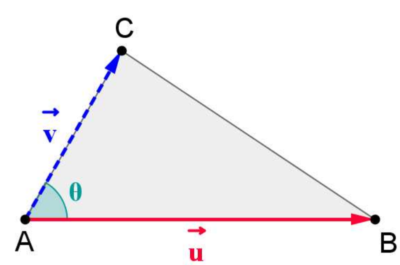
$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos 0 \\
&= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot 1 \\
&= \|\vec{u}\| \cdot k \|\vec{u}\| \quad (\text{car } k > 0) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\
&= k\left(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2\right) \\
&= kx_u^2 + ky_u^2 + kz_u^2 \\
&= x_u kx_u + y_u ky_u + z_u kz_u \\
&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v
\end{aligned}$$

2^e cas : $\theta = \pi$

Alors il existe un réel <u>négatif</u> k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \pi \\
&= \|\vec{u}\| \cdot \|k \cdot \vec{u}\| \cdot (-1) \\
&= \|\vec{u}\| \cdot (-k)\|\vec{u}\| \cdot (-1) \quad (\text{car } |k| = -k \text{ puisque } k < 0) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \cdot k \\
&= \cdots \quad (\text{voir } 1^{\text{er}} \text{ cas}) \\
&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v
\end{aligned}$$

- **3^e cas :** $0 < \theta < \pi$



Alors ABC est un triangle et d'après le théorème du cosinus on a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\theta \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\theta = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 .$$

Or $\quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\theta = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$,

$\quad \overline{AB}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$,

$\quad \overline{AC}^2 = \|\vec{v}\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$,

$$\overline{BC}^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2 = \left(x_v - x_u\right)^2 + \left(y_v - y_u\right)^2 + \left(z_v - z_u\right)^2,$$

$$2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - \left(x_v - x_u\right)^2 - \left(y_v - y_u\right)^2 - \left(z_v - z_u\right)^2$$

d'où : $\Leftrightarrow 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} = 2x_u x_v + 2y_u y_v + 2z_u z_v$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$

Nous avons donc montré que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad (*)$$

Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (par définition) et d'autre part $x_u = y_u = z_u = 0$ donc $0\cdot x_v + 0\cdot y_v + 0\cdot z_v = 0$, ce qui montre bien que la formule (*) reste valable pour $\vec{u}=\vec{0}$. D'où :

Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}$ dans un **R.O.N.** on a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}$$

Remarque

L'expression analytique de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ permet de calculer $\theta = \widehat{\left(\vec{u},\vec{v}\right)}$. Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ dans un R.O.N. alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot(-3)+(-2)\cdot 4 + 3\cdot 0 = -11$ et d'autre part $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\theta = \sqrt{1+4+9}\sqrt{9+16+0}\cos\theta = 5\sqrt{14}\cos\theta$, d'où $-11 = 5\sqrt{14}\cos\theta$ et par conséquent $\theta \simeq 126{,}01°$.

Exercices 24

4) Propriétés

a) $\boxed{\forall \vec{u},\vec{v}\in\mathcal{V}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}}$

En effet : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \left\|\vec{u}\right\|=0 \text{ ou } \left\|\vec{v}\right\|=0 \text{ ou } \cos\theta=0$

$\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \text{ ou } \theta=\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

b) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \text{ (non nuls)} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi}$

En effet le signe de $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le même que celui de $\cos\theta$ puisque $\|\vec{u}\| > 0$ et $\|\vec{v}\| > 0$.

c) $\boxed{\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$ (le produit scalaire est **symétrique**)

En effet en se plaçant dans un R.O.N. on a :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = x_v x_u + y_v y_u + z_v z_u = \vec{v}\cdot\vec{u}$

d) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} \\ \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) \end{array}}$$

(on dit que le produit scalaire est **linéaire**)

Ces deux propriétés se vérifient facilement en se plaçant dans un R.O.N. (*exercice !*).

e) $\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$

En effet $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$.

Définition

Le nombre réel positif $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ et il est noté $\vec{u}^2$.

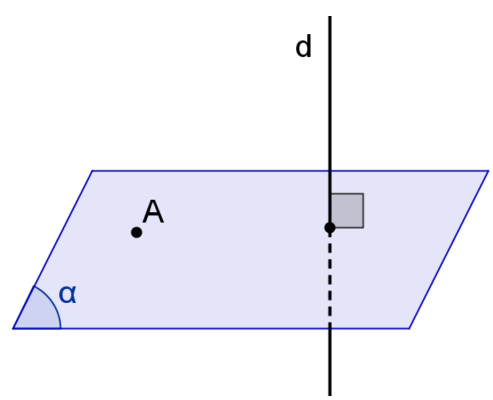
Remarques

- Ainsi on a : $\boxed{\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} \Leftrightarrow \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2}$
- On ne parle pas de « cube scalaire » ou de « $\vec{u}^n$ » où $n > 2$!

Exercices 25 - 28

5) Equations d'un plan

- Soit A un point et d une droite de l'espace. Alors il existe exactement un plan α qui passe par A et qui est perpendiculaire à d :



- Pour connaître un plan α il suffit donc de connaître un point $A \in \alpha$ et une droite d telle que $d \perp \alpha$. Or pour connaître une telle droite il suffit de connaître un vecteur directeur $\vec{n}$ de cette droite qui sera alors orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan α ! Ceci nous amène à poser le définition suivante :
- **Définition**

  Soit un plan α et un vecteur $\vec{n}$ dans l'espace. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à α si et seulement si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite $d \perp \alpha$.

  Remarque

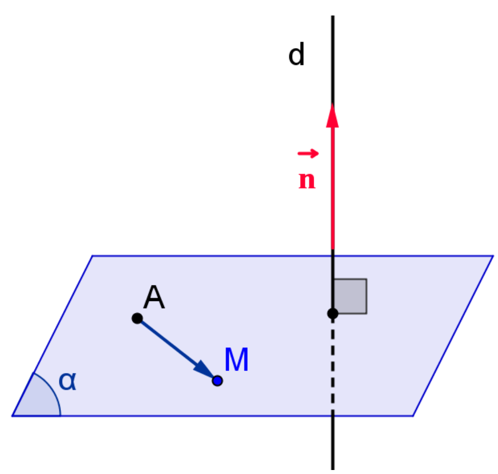
  Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à α, alors l'ensemble des vecteurs normaux à α est égal à l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\vec{n}$! Un plan a donc une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires.
- **Propriété 1**

  Soit un plan α de vecteur normal $\vec{n}$ et $A \in \alpha$, alors :

  $$\boxed{\forall M \in \mathcal{E} \quad M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}}$$

  Démonstration :

  $M \in \alpha \Leftrightarrow d \perp AM \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$



- **Propriété 2**

  Soit un plan α de l'espace muni d'un R.O.N., $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à α et $A(x_A, y_A, z_A) \in \alpha$, alors :

  $$\boxed{\begin{array}{r} \forall M(x,y,z) \in \mathcal{E} \quad M(x,y,z) \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \ (*) \\ \text{où } d = -ax_A - by_A - cz_A \end{array}}$$

Définition : On dit que $ax+by+cz+d=0$ est **<u>une</u> équation cartésienne** du plan α.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in\alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \quad (\text{d'après propriété } 1)\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{d'après C4a})\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=0 \quad (\text{d'après B2b})\\
&\Leftrightarrow (x-x_A)\cdot a+(y-y_A)\cdot b+(z-z_A)\cdot c=0 \quad (\text{d'après C3})\\
&\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A+cz-cz_A=0\\
&\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \quad (\text{en posant: } d = -ax_A-by_A-cz_A)
\end{aligned}$$

<u>Exemple</u>

Soit α le plan passant par $A(-2,3,5)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\ 4\\ -6\end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in\alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2\\ y-3\\ z-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7\\ 4\\ -6\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x+2)\cdot(-7)+(y-3)\cdot 4+(z-5)\cdot(-6)=0\\
&\Leftrightarrow -7x-14+4y-12-6z+30=0\\
&\Leftrightarrow -7x+4y-6z+4=0
\end{aligned}$$

On note : $\alpha\equiv -7x+4y-6z+4=0$. Cette équation permet de vérifier facilement si le plan passe par un point donné ou non : $B(2,1,-1)\in\alpha$ car $-7\cdot 2+4\cdot 1-6\cdot(-1)+4\overset{!}{=}0$ et $C(-5,3,0)\notin\alpha$ car $-5\cdot 2+4\cdot 3-6\cdot 0+4=6\neq 0$.

- **<u>Propriété 3 (réciproque de la propriété 2)</u>**

Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tel que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, alors l'ensemble :

$E=\{M(x,y,z)/\,ax+by+cz+d=0\}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$.

Démonstration :

Comme $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ l'un au moins des nombres a, b, c est différent de 0, par exemple $a\neq 0$, d'où $A\left(-\dfrac{d}{a},0,0\right)\in E$ car $a\left(-\dfrac{d}{a}\right)+b\cdot 0+c\cdot 0+d=-d+d\overset{!}{=}0$.

Appelons α le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$, alors :

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\alpha &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+\frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow ax+d+by+cz=0 \\ &\Leftrightarrow M(x,y,z)\in E \end{aligned}$$

Par conséquent $E=\alpha$, c.q.f.d.

Exemple

$9x-5y-z+8=0$ est une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Remarque

Nous avons vu en **B8)** que pour connaître un plan α il suffit de connaître un point $A\in\alpha$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de ce plan. Nous verrons plus tard qu'on peut déterminer une équation cartésienne de α à partir d'un point et de deux vecteurs directeurs non colinéaires.

Exercices 29 à 31

6) Equations d'une sphère

- **Définition**

Soit A un point de l'espace et r un nombre réel strictement positif, alors on appelle **sphère** de **centre A** et de **rayon r** l'ensemble des points M tel que $\overline{AM}=r$.

Notation : $\mathcal{S}(A,r)=\left\{M\in\mathcal{E}\,/\,\overline{AM}=r\right\}$.

- **Propriété 1**

Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace muni d'un R.O.N. et $r\in\mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\boxed{M(x,y,z)\in\mathcal{S}(A,r)\Leftrightarrow(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(y-y_A)^2=r^2\ (*)}$$

Définition : On dit que (*) est **une équation de la shère** $\mathcal{S}(A,r)$.

Démonstration :

$$M(x,y,z)\in\mathcal{S}(A,r)\Leftrightarrow \overline{AM}=r$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(y-y_A)^2}=r\quad(\text{d'après B2c})$$
$$\Leftrightarrow(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$$

- **Propriété 2**

Soient A et B deux points de l'espace muni d'un R.O.N., alors l'ensemble des points $M\in\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$ est la sphère de diamètre $[AB]$, c'est-à-dire la sphère de centre $I=\text{milieu de}[AB]$ et de rayon $r=\overline{AI}=\overline{BI}$.

Démonstration :

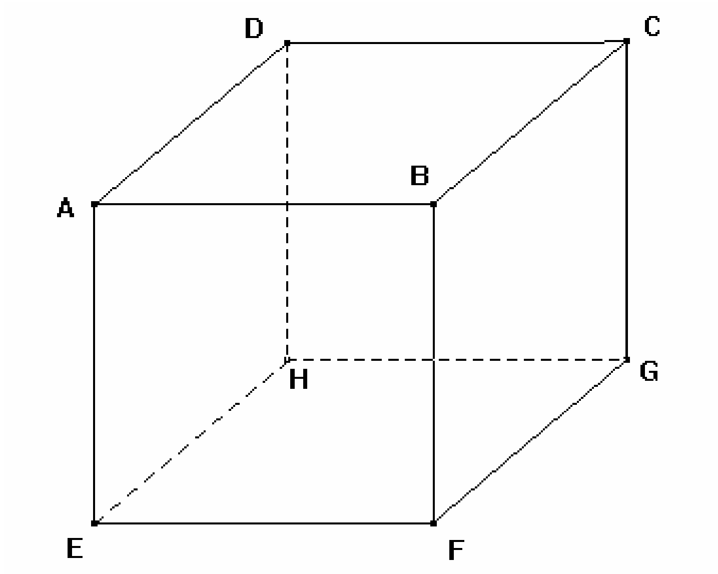
Soient $M\in\mathcal{E}$ et I le milieu de $[AB]$, alors :

$$\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\quad(\text{d'après C4a})$$
$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0\quad(\text{relation de Chasles})$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0\quad(\text{d'après C4d})$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\cdot\left(-\overrightarrow{IA}\right)=0\quad(\text{d'après C4c et I = milieu de }[AB])$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)-\overrightarrow{IA}^2=0\quad(\text{d'après C4d})$$
$$\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2+\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}=\left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2\quad(\text{car I = milieu de }[AB]\text{ et d'après C4e})$$
$$\Leftrightarrow\overline{MI}^2+0=\overline{IA}^2$$
$$\Leftrightarrow\overline{MI}=\overline{IA}$$
$$\Leftrightarrow M\in\mathcal{S}\left(I,\overline{IA}\right)$$

Exercices 32 à 33

EXERCICES

1) Soit ABCDEFGH un cube :



En utilisant les points A, B, C, …., H indiquez :

a) des plans parallèles.

b) des plans perpendiculaires.

c) des plans sécants mais pas perpendiculaires.

d) des droites parallèles.

e) des droites perpendiculaires.

f) des droites orthogonales mais *pas* perpendiculaires.

g) des droites sécantes mais *pas* perpendiculaires.

h) des plans et des droites parallèles.

i) des plans et des droites perpendiculaires.

j) des plans et des droites sécants mais pas perpendiculaires.

2) Soient A, B et M trois points, montrez que :

a) M = milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

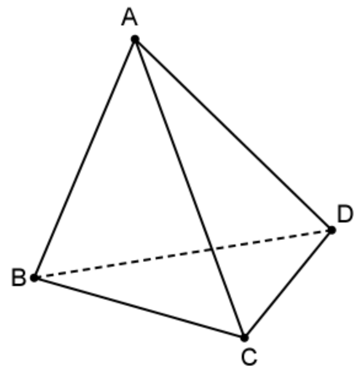
b) M = milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$

3) Soit un triangle quelconque ABC et I le milieu de [BC]. Montrez que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

TETRAEDRE

Soient A, B, C, D quatre points <u>non coplanaires</u> de l’espace. En reliant ces points par des segments on obtient un solide à 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces triangulaires appelé **tétraèdre** (on peut dire aussi : un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire).

Si les 6 arêtes ont la même longueur on dit qu’on a un **tétraèdre régulier**.



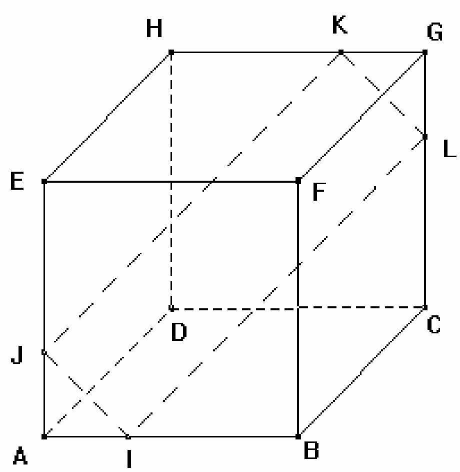
4) Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M, N les milieux de $[DB]$, $[DC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ respectivement (figure !).

a) Montrez que $(\text{IJNL}) = \#$ et que $(\text{MLKJ}) = \#$.

b) Déduisez-en que tous les segments ayant pour extrémités les milieux de deux arêtes opposées (càd qui ne se touchent pas) sont concourants en un point qui est leur milieu commun.

5) Soit ABCDEFGH un cube et I, J, K, L quatre points définis par :

$$3 \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\,,\ \overrightarrow{HK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} \text{ et } \overrightarrow{LC} = 2 \cdot \overrightarrow{GL}$$



Montrez que $(\text{IJKL}) = \#$.

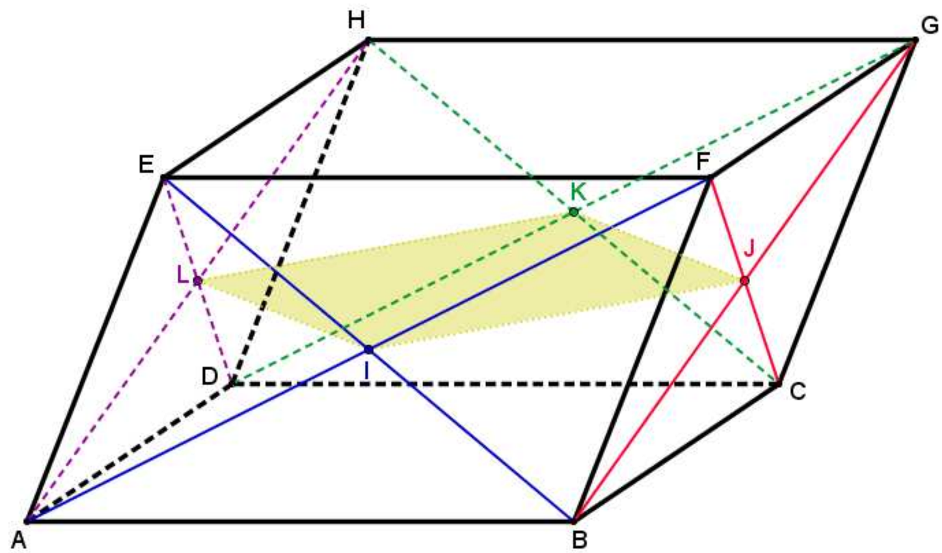
PARALLELEPIPEDE

Un **parallélépipède** est un solide à 8 sommets dont les 6 faces sont des #.

Si les faces sont des rectangles on dit que c'est un **parallélépipède rectangle** ou un **pavé.**

Si les faces sont des carrés c'est un **cube**.

6) Soit ABCDEFGH un parallélépipède et I, J, K, L les points d'intersection des diagonales de ABFE, BCGF, CDHG et ADHE respectivement. Montrez que $(\mathrm{IJKL}) = \#$.



7) Soit ABCD un tétraèdre, et I, J les milieux de $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ respectivement. Montrez que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

8) Soit ABCD un tétraèdre et R, S, T, U les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SD}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $4 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BT}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ et $4 \cdot \overrightarrow{\mathrm{BU}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

a) Montrez que $(\mathrm{RSTU}) = \#$.

b) Soient I le point d'intersection de (CS) et de (RD) et J le point d'intersection de (DU) et de (CT). Montrez que $(\mathrm{IJ}) \parallel (\mathrm{RST})$.

9) Soient d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles et non coplanaires, A_1, B_1, C_1 trois points sur d_1, A_2 B_2, C_2 trois points sur d_2, A_3, B_3, C_3 trois points sur d_3, F, G, H les centres de gravités des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ respectivement.

Démontrez que :

a) $3\overrightarrow{\mathrm{FG}} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3}$

b) F, G, H sont alignés

10) Soient ABC un triangle quelconque et les points D, F, G définis par :

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \qquad \overrightarrow{GC}=5\cdot\overrightarrow{GA}.$$

a) Figure !

b) Soit $E\in AC$ tel que $(DE)\parallel(BC)$, montrez que :

- $\exists a\in\mathbb{R} \quad \overrightarrow{CE}=a\cdot\overrightarrow{AC}$
- $\exists b\in\mathbb{R} \quad \overrightarrow{DE}=b\cdot\overrightarrow{CB}$

c) Démontrez que $(GF)\parallel(DE)$.

11) Soit ABCD un quadrilatère quelconque (A, B, C, D coplanaires). On appelle **centre de gravité** de ABCD l'unique point G qui vérifie l'équation :

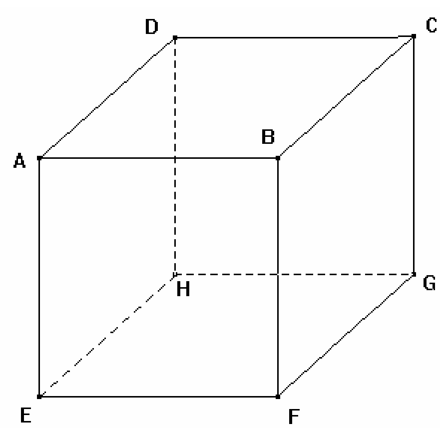
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

a) Construisez un quadrilatère quelconque ABCD et son centre de gravité G après avoir démontré que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

b) Soient M le milieu de $[AB]$ et P celui de $[CD]$. Montrez que $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$ et déduisez-en une construction plus simple de G.

c) Soient N le milieu de $[BC]$ et Q celui de $[AD]$. Etudiez la nature du quadrilatère MNPQ et sa relation avec le point G.

12) Soit ABCDEFGH un cube :



Déterminez les coordonnées des 8 sommets de ce cube

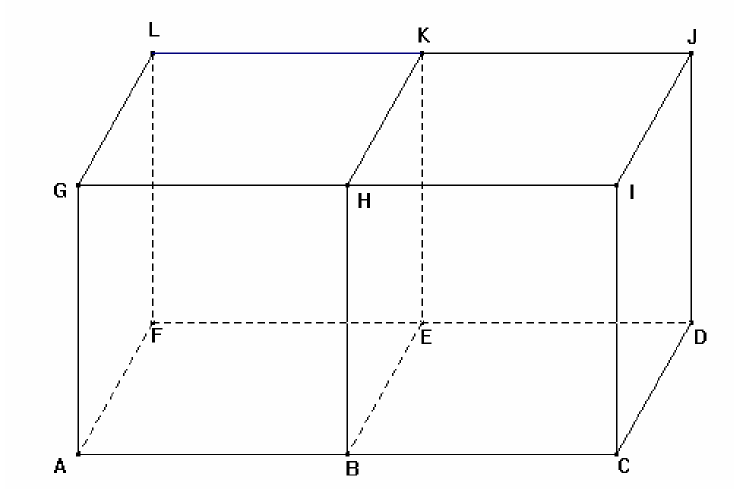
a) dans le repère $\left(H,\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HD}\right)$.

b) dans le repère $\left(H,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{GF}\right)$.

c) dans le repère $\left(B, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GF}\right)$.

d) dans le repère $\left(A, 2\cdot\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}, 3\cdot\overrightarrow{AE}\right)$.

13) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes mesurent une unité :



Pour chacun des repères suivants, déterminez s'il s'agit d'un repère orthogonal ou orthonormé puis donnez les coordonnées des points A, B, C, ….., L dans ce repère :

a) $\left(E, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DJ}\right)$

b) $\left(A, \overrightarrow{LJ}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{IC}\right)$

c) $\left(B, \overrightarrow{HB}, \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}, 4\cdot\overrightarrow{AF}\right)$

14) Soit un triangle ABC, $D \in BC$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BD} = \alpha\cdot\overrightarrow{BC}$. Exprimez les coordonnées de D dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ en fonction de α.

Pour les exercices suivants, s'il n'est pas spécifié il s'agit toujours <u>d'un repère quelconque</u>

15) Dans un repère de l'espace on donne $A(-5;1;4)$, $B(2;3;-6)$ et $C(0;1;7)$.

a) Trouvez D tel que ABCD = #.

b) Trouvez E tel que AECB = #.

16) Examinez s'il existe des réels a et b tels que :

a) les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ 2a+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a+4 \\ a+2 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.

b) les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-b \\ b+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b+3 \\ 3 \\ a+2 \end{pmatrix}$ soient égaux.

c) les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a+1 \\ 2a-4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5-a \\ 6-a \\ 2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

d) les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2a-1 \\ 4-3a \\ 7-a \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3+a \\ 5-2a \\ a \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

17) Examinez si les vecteurs suivants sont colinéaires :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}\begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 35 \end{pmatrix}$$

18) Dans un R.O.N de l'espace on donne $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;5;-1)$. Calculez la norme des vecteurs suivants :

a) $\vec{w}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

b) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

c) $\vec{v}=-\overrightarrow{AC}+2\cdot\overrightarrow{AD}$

19) Soient $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-3)$, $C(0;3;-1)$.

a) Trouvez un point E différent de A et B qui appartient à la droite AB.

b) Montrez que A, B et C ne sont pas alignés.

c) Trouvez un point D différent de A, B et C qui appartient au plan ABC.

20) Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Analysez si $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b) Déterminez λ pour que $\vec{t}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$.

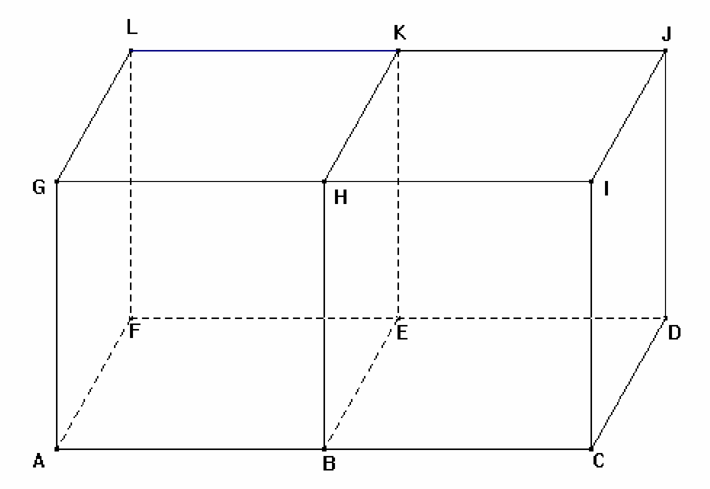
21) Reprenez les exercices 3) à 6) et résolvez-les en utilisant des repères appropriés.

22) Sachant que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ calculez $\theta=\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$.

23) Sachant que $\|\vec{u}\|=5$, $\theta=\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\frac{\pi}{6}$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=10\sqrt{3}$ calculez $\|\vec{v}\|$.

24) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(-3;4;5)$, $B(0;7;-1)$ et $C(2;-1;0)$. Calculez les angles du triangle ABC.

25) Soient ABEFGHKL et BCDEHIJK deux cubes dont les arêtes ont une longueur de 2 unités $\left(\overline{AF}=\overline{AG}=\overline{AB}=\overline{BC}=2\right)$:



Calculez :

a) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{LC}$

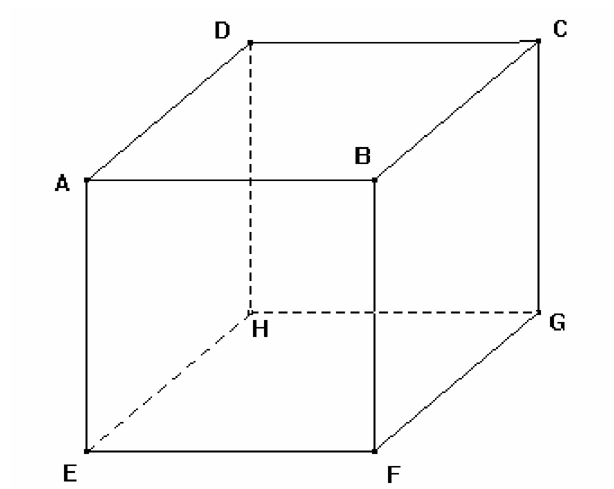
b) $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BL}$

c) $\widehat{LAJ}$

d) $\widehat{CBL}$

e) $\widehat{HCK}$

26) Soit ABCDEFGH un cube d'arête c :



a) Montrez que $EC \perp HF$.

b) Montrez que $EC \perp AF$.

c) Calculez l'amplitude de l'angle $\widehat{AHC}$.

d) Calculez l'amplitude de l'angle $\widehat{DFC}$.

27) Soit ABCD un carré et $M \in [BD]$.

a) Démontrez que $\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DM}$.

b) Déduisez-en que $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{AB}^2 - \overline{AM}^2$.

28) Montrez que dans un # la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

29) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(4;-3;1)$ et $\vec{n}(2;7;-5)$. Déterminez une équation du plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

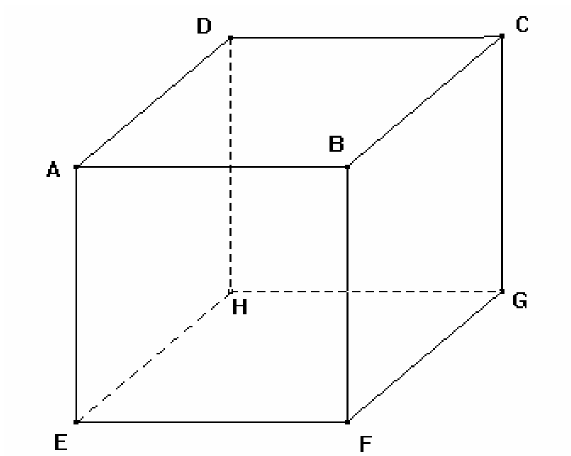
30) Dans un R.O.N. de l'espace on donne l'équation d'un plan π : $3x - 4y + z - 2 = 0$.

a) Est-ce que les points $A(-2,5,-3)$, $B(-4,-3,2)$ appartiennent à π ?

b) Quel est l'ensemble de tous les vecteurs normaux à ce plan ?

c) Trouvez deux points de π.

31) Soit le cube ABCDEFG :



Dans le R.O.N. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ trouvez une équation de chacun des plans suivants :

a) ABC

b) EFG

c) ADE

d) BCG

e) ABF

f) CDG

g) ACG

h) BCH

i) EBG

32) Dans un R.O.N. de l'espace on donne $A(3;-2;4)$ et $B(-1;1;4)$.

a) Déterminez l'équation de la sphère de centre A et de rayon 7.

b) Déterminez l'équation de la sphère de diamètre [AB].

c) Déterminez l'ensemble $J=\left\{M(x,y,z)/\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=2\right\}$.

33) Déterminez les ensembles suivants définis dans un R.O.N. de l'espace :

$$\mathcal{P}=\left\{M(x,y,z)/x^2-6x+y^2+14y+z^2+2z+55=0\right\}$$

$$\mathcal{Q}=\left\{M(x,y,z)/3x^2-6x+3y^2+3z^2+30z-30=0\right\}$$

$$\mathcal{R}=\left\{M(x,y,z)/x^2-x+y^2+\frac{2}{3}y+z^2-2z-\frac{8}{9}=0\right\}$$

$$\mathcal{T}=\left\{M(x,y,z)/x^2-7x+y^2+8y+z^2-z+47=0\right\}$$

$$\mathcal{U}=\left\{M(x,y,z)/4x^2+24x+4y^2-4y+4z^2+8z+41=0\right\}$$