Relations et fonctions.
Bijections et réciproques

1. Relations et relations réciproques

Rappel. Le produit cartésien de *A* par *B*, noté $A \times B$, est l'ensemble de tous les couples (a,b), où $a \in A$ et $b \in B$. Donc $A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Définition. Une ***relation*** $\mathcal{R}$ d'un ensemble *A* vers un ensemble *B* est un triplet $(A,B,\mathcal{G})$ où :
- *A* est l'***ensemble de départ*** de la relation ;
- *B* est l'***ensemble de d'arrivée*** de la relation ;
- $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$; $\mathcal{G}$ est appelé le ***graphe*** de la relation $\mathcal{R}$.

Notations : $\mathcal{R} : A \to B$ signifie que *A* est l'ensemble de départ de la relation $\mathcal{R}$ et que *B* est l'ensemble d'arrivée est *B*. On écrira $a\mathcal{R}b$ ou $a \mapsto b$ au lieu de $(a,b) \in \mathcal{G}$. La flèche met en évidence le fait que relation $\mathcal{R}$ fait ***correspondre*** l'élément $a \in A$ à l'élément $b \in B$. Dans la suite, les ensembles de départ *A* et d'arrivée *B* d'une relation seront toujours des ***sous-ensembles de*** $\mathbb{R}$.

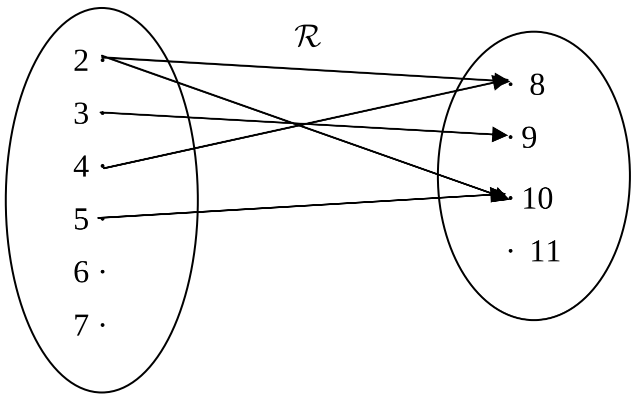
Pour comprendre la définition, nous donnons des exemples :

(1) Soit $A = \{2,3,4,5,6,7\}$ et $B = \{8,9,10,11\}$. La relation

$$\mathcal{R} : A \to B, x \mapsto y \Leftrightarrow x \text{ est un diviseur de } y$$

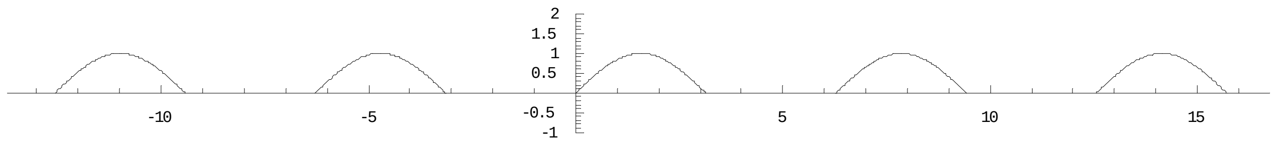
a comme graphe $\mathcal{G} = \{(2,8),(2,10),(3,9),(4,8),(5,10)\}$.

Le diagramme fléché ou diagramme sagittal de cette relation est :



(2) Soit $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}_+$. La relation $f : A \to B, x \mapsto y \Leftrightarrow y = \sin x$

est une fonction car à chaque réel *x* de *A* correspond au plus un réel $y = \sin x$ de *B*. Plus précisément, l'image de x est $\sin x$ si et seulement si $\sin x \geq 0$. La représentation graphique de *f* est donc la partie de la sinusoïde $y = \sin x$ située au-dessus de l'axe des abscisses.

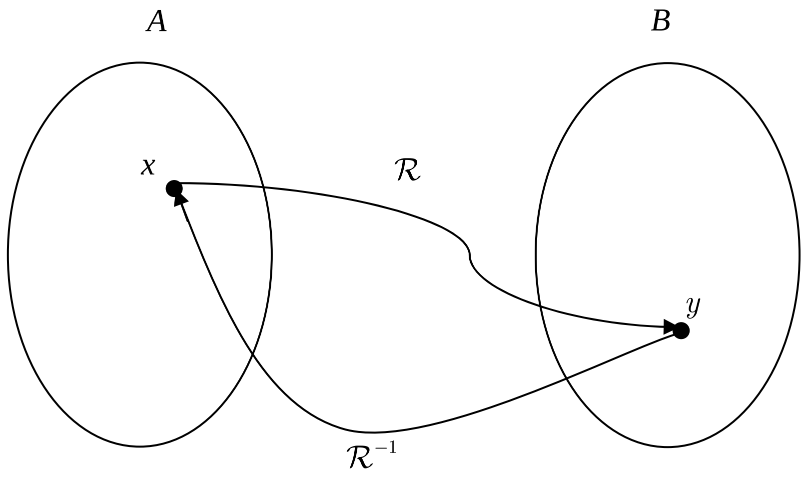


Rappel. Une fonction *f* d'un ensemble *A* vers un ensemble *B* est une relation de *A* vers *B* telle que à chaque élément *x* de *A* correspond au plus un élément *y* de *B*, appelé image de *x* par *f*.

Définition. Soit $\mathcal{R} = (A, B, \mathcal{G})$ une ***relation*** d'un ensemble *A* vers un ensemble *B*, dont le graphe est noté $\mathcal{G}$. La relation réciproque de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^{-1}$, est le triplet $\left(B, A, \mathcal{G}^{-1}\right)$ où :

$$\mathcal{G}^{-1} = \left\{(y,x) \in B \times A \,/\, (x,y) \in \mathcal{G}\right\} .$$

En d'autres termes, pour obtenir $\mathcal{R}^{-1}$ à partir de $\mathcal{R}$, on échange les ensembles de départ et d'arrivée et on inverse le sens des flèches :



Remarquons que : $\left(\mathcal{R}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{R}$.

Pour les exemples (1) et (2) ci-dessus on a respectivement :

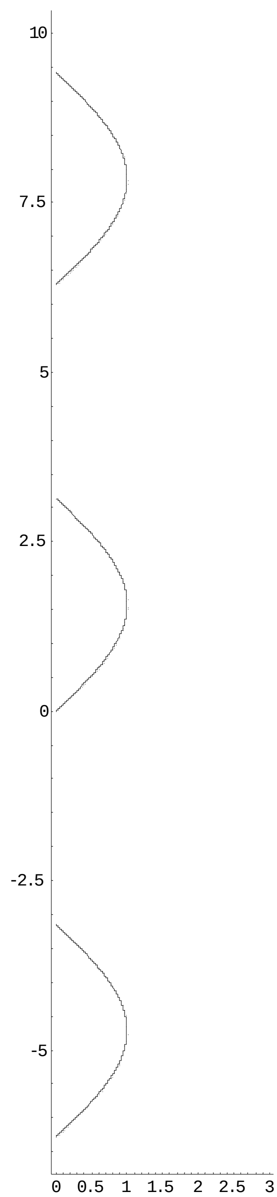
(1) $\mathcal{R}^{-1} : B \to A, y \mapsto x \Leftrightarrow x \text{ est un diviseur de } y \Leftrightarrow y \text{ est un multiple de } x$.
Le graphe de cette relation est :

$$\mathcal{G}^{-1} = \left\{(8,2),(10,2),(9,3),(8,4),(10,5)\right\}.$$

(2) $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, y \mapsto x \Leftrightarrow y = \sin x$. Si l'on veut représenter graphiquement cette relation dans un repère tel que l'axe des abscisses représente l'ensemble de départ $\mathbb{R}_+$ et l'axe des ordonnées représente l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, il convient d'échanger les lettres *x* et *y* dans la définition :

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto y \Leftrightarrow x = \sin y$$

La représentation graphique est ci-contre. Remarquons que f^{-1} n'est pas une fonction, car aux *x* compris entre 0 et 1 correspondent une infinité de *y*.



Remarques :

(1) La relation réciproque d'une fonction n'est pas nécessairement une fonction ! Nous verrons par la suite que la réciproque d'une fonction *f* est une fonction ssi *f* est ***injective***.

(2) Dans un repère orthonormé, les graphes d'une relation $\mathcal{R}$ et de sa réciproque $\mathcal{R}^{-1}$ sont toujours symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$ (1re bissectrice du repère.) En effet :

$$(x, y) \in \mathcal{G} \text{ (graphe de } \mathcal{R}) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{G}^{-1} \text{ (graphe de } \mathcal{R}^{-1})$$

Or, les points (x, y) et (y, x) sont toujours symétriques par rapport à Δ.

2. Fonctions de A dans B. Domaine et image. Restriction et prolongement

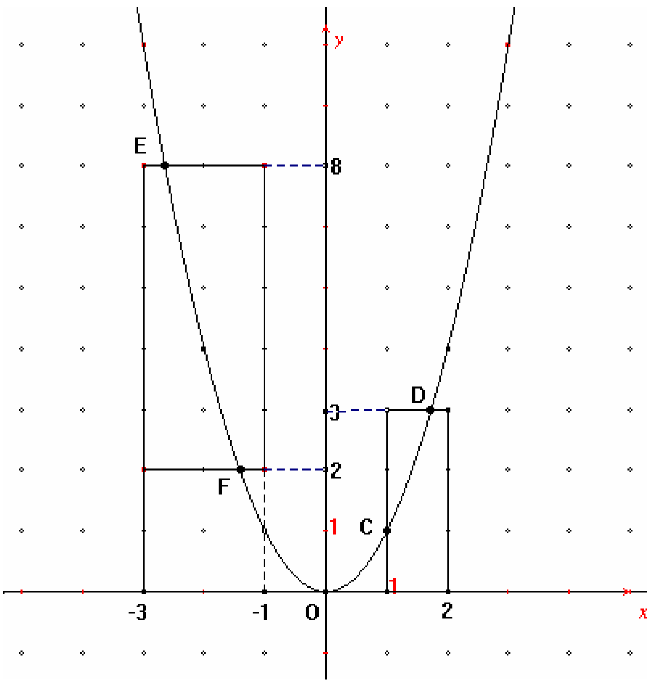
Dans la suite, nous considérons uniquement des relations qui sont des fonctions numériques d'une variable réelle. Les ensembles de départ A et d'arrivée B ne sont pas nécessairement égaux à $\mathbb{R}$. Par exemple, A et B peuvent être des ***intervalles*** de $\mathbb{R}$. Voici deux fonctions de ce genre :

$$f_1 : [1,2] \to [0,3] \qquad f_2 :]-3,-1[\to]2,8[$$
$$x \mapsto x^2 \qquad\qquad x \mapsto x^2$$

Quoique les deux fonctions appliquent x sur x^2, elles ne sont pas égales puisque leurs ensembles de départ et d'arrivée diffèrent. Rappelons l'égalité de deux fonctions en général :

Définition. Deux fonctions f et g sont ***égales*** si et seulement si elles ont le même ensemble de départ A, le même ensemble d'arrivée B, le même domaine D et si $(\forall x \in D)\ \ f(x) = g(x)$.

Représentons graphiquement les deux fonctions f_1 et f_2 :



Traçons d'abord la parabole d'équation $y = x^2$.

La courbe représentative de f_1 est la partie de cette parabole tombant dans le ***rectangle fermé*** $[1,2]\times[0,3]$. C'est donc l'arc de parabole fermé $\overset{\frown}{CD}$. Dessinez cet arc en couleur !

La courbe représentative de f_2 est la partie de la parabole tombant dans le ***rectangle ouvert*** $]-3,-1[\times]2,8[$. C'est donc l'arc de parabole ouvert $\overset{\frown}{EF}$. Dessinez cet arc en couleur !

Intéressons nous à présent aux ***domaines*** des deux fonctions :

- Le domaine de f_1 n'est pas égal à l'ensemble de départ $[1,2]$. En effet, par exemple $2 \notin \text{dom} f_1$ puisque $2^2 = 4$, mais 4 n'est pas un élément de l'ensemble d'arrivée $[0,3]$. Quel est le plus grand x appartenant à $\text{dom} f_1$? Visiblement, c'est l'antécédent de 3 par f_1, i.e. $\sqrt{3}$. Donc : $\text{dom} f_1 = [1,\sqrt{3}]$.

- De même, le domaine de f_2 n'est pas égal à l'ensemble de départ $]-3,-1[$. Il est facile de voir que $\text{dom} f_2 =]-\sqrt{8},-\sqrt{2}[$. C'est un intervalle ouvert cette fois !

Ces exemples montrent qu'il est plus difficile de chercher le domaine d'une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. En fait, si $f : A \to B$ est une fonction, alors :

$$\text{dom} f = \{x \in A \,/\, f(x) \text{ existe et } f(x) \in B\}$$

Introduisons maintenant la notion d'***image d'un ensemble*** par une fonction :

Définition.

- Soit $f : A \to B$ une fonction et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'***image de** E **par** f*, noté $f(E)$ est l'ensemble des réels $f(x)$ appartenant à *B*, tels que $x \in E \cap \mathrm{dom} f$. Donc :
$$f(E) = \{ f(x) \in B \,/\, x \in E \cap \mathrm{dom} f \}$$
Ce sont donc les réels *y* dans *B* qui ont au moins un antécédent *x* dans *E* par *f*.
- On appelle ***image de** f* et on note $\mathrm{im}\, f$ l'ensemble $f(\mathbb{R})$. Donc :
$$\mathrm{im}\, f = \{ f(x) \in B \,/\, x \in \mathrm{dom}\, f \}$$

Exemples.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. La représentation graphique de *f* est la parabole d'équation $y = x^2$, tracée à la page précédente. On a par exemple :
  - $\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{R}) = \{ x^2 \,/\, x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_+$
  - $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$
  - $f([0,2]) = [0,4]$ et $f([-3,-1[) =]1,9]$.
- Reprenons les fonctions f_1 et f_2 de la page précédente :
  - $f_1([1,2]) = [1,3]$. En effet, l'image de $[1,2]$ est nécessairement contenue dans l'ensemble d'arrivée $[0,3]$. Or les *y* dans $[0,3]$ qui ont un antécédent par f_1 sont exactement les éléments de $[1,3]$. Remarquons par ailleurs que : $\mathrm{im}\, f_1 = f_1([1,2]) = [1,3]$.
  - De même : $\mathrm{im}\, f_2 = f_2(]-3,-1[) = f_2(]-\sqrt{8},-\sqrt{2}[) =]2,8[$.
  - $f_2([0,2]) = \varnothing$ car $[0,2]$ ne contient aucun élément du domaine de f_2 : $[0,2] \cap \mathrm{dom} f_2 = \varnothing$.

Définition. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $A \subset A'$ et $(\forall x \in A)\ f(x) = g(x)$, alors on dit que *f* est ***la restriction*** de *g* à *A* et on note $f = g|_A$. On dit aussi que *g* est ***un prolongement*** de *f* à A'.

Exemples.

- Très souvent, $A' = A \cup \{a\}$, où *a* est un réel. Soit par exemple :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{x^2+x-6}{x-2} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+3 \end{aligned}$$

Ces deux fonctions ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de départ. Néanmoins, *g* est un ***prolongement*** de *f* à $\mathbb{R}$ car :
$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})\ f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3 = g(x).$$
La représentation graphique de *f* est la droite d'équation $y = x + 3$ avec un trou en $(2,5)$.

- La fonction $s : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ est la ***restriction*** de la fonction sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Représenter graphiquement les deux fonctions !

3. Applications, injections, surjections et bijections

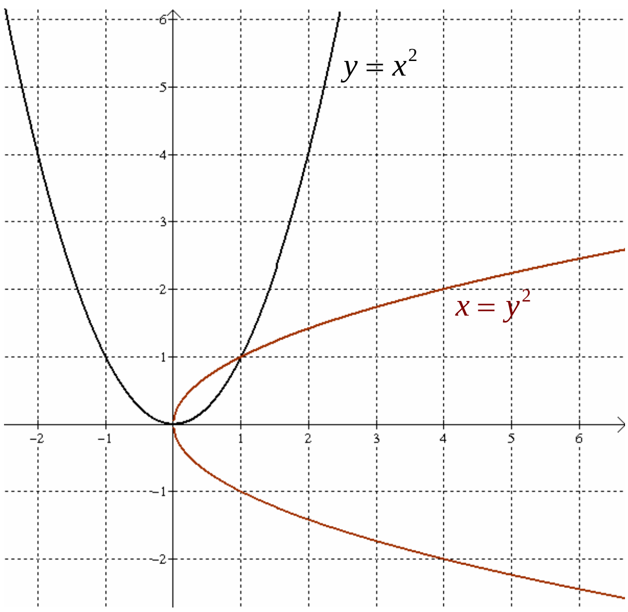
Définition. Soit f une ***fonction*** d'un ensemble A vers un ensemble B.

- f est ***injective*** ssi deux éléments distincts du domaine de f ont des images distinctes, c.-à-d.
  ssi $(\forall x, x' \in \operatorname{dom} f) \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$,
  ssi tout $y \in B$ a ***au plus*** un antécédent $x \in A$ par f,
  ssi $(\forall y \in B)$ l'équation $f(x) = y$ a ***au plus*** une solution $x \in A$.
- f est ***surjective*** ssi $f(A) = B$, c.-à-d.
  ssi tout $y \in B$ a ***au moins*** un antécédent $x \in A$ par f,
  ssi $(\forall y \in B)$ l'équation $f(x) = y$ a ***au moins*** une solution $x \in A$.
- f est une ***application*** ssi $\operatorname{dom} f = A$, c.-à-d.
  ssi tout $x \in A$ a ***une et une seule image*** par f dans B.
- f est une ***injection*** (ou ***application injective***) ssi f est une ***application*** et f est ***injective***.
- f est une ***surjection*** (ou ***application surjective***) ssi f est une ***application*** et f est ***surjective***.
- f est une ***bijection*** (ou ***application bijective***)
  ssi f est à la fois une ***injection*** et une ***surjection***, c.-à-d.
  ssi $\operatorname{dom} f = A$ et tout $y \in B$ a ***exactement*** un antécédent $x \in A$ par f,
  ssi $(\forall y \in B)$ l'équation $f(x) = y$ a ***exactement*** une solution $x \in A$.

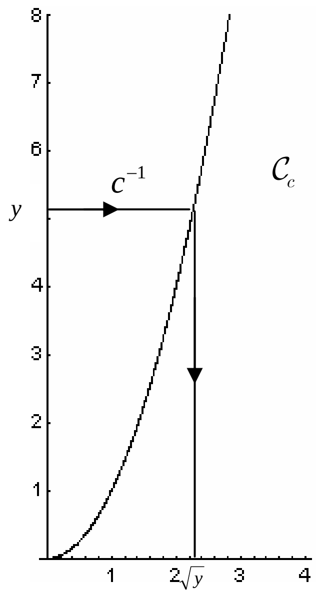
Remarque : La ***condition nécessaire et suffisante*** pour que la réciproque d'une fonction $f : A \to B$ soit encore une fonction est que tout $y \in B$ est au plus une fois image d'un élément de A. En d'autres termes : si $f : A \to B$ est une fonction, alors f^{-1} est encore une fonction ssi f est ***injective***.

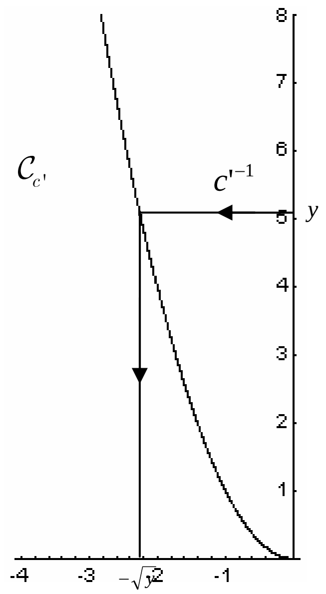
Exemples.

- Reprenons les fonctions exemples f_1 et f_2 du paragraphe 2. Ce ne sont pas des applications car $\operatorname{dom} f_1 \neq [1,2]$ et $\operatorname{dom} f_2 \neq]-3,-1[$. Ce ne sont donc pas non plus des injections, des surjections ou des bijections. Par contre, on peut dire que f_1 et f_2 sont des fonctions injectives. De plus f_2 est surjective mais f_1 n'est pas surjective.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est une application car $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Ce n'est pas une injection car par exemple –2 et 2 ont la même image 9 par f. f n'est pas non plus une surjection car $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$; les réels strictement négatifs n'ont pas d'antécédent par f. f n'est donc pas une bijection. f^{-1} n'est pas une fonction puisque f n'est pas injective.



- La fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$ est une application car $\operatorname{dom} g=\mathbb{R}$. Ce n’est pas une injection car par exemple –3 et 3 ont la même image 9. Par contre *g* est une surjection car $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+$. *g* n'est pas une bijection puisque ce n’est pas une injection.
- La fonction $h:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ x\mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection. En effet, *h* est une application puisque : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right)\ \frac{1}{x}$ existe et $\in\mathbb{R}^*$. De plus : tout $y\in\mathbb{R}^*$ admet un et un seul antécédent par *h*. Pour le trouver, il faut résoudre l'équation $h(x)=y$ où *x* est l'inconnue. Or :
$$\left(\forall y\in\mathbb{R}^*\right)\ h(x)=y\Leftrightarrow \frac{1}{x}=y\Leftrightarrow 1=xy\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}\in\mathbb{R}^*.$$
L'antécédent unique de *y* est donc $\frac{1}{y}$ et appartient bien à l'ensemble de départ $\mathbb{R}^*$.
- Les fonctions $c:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$ et $c':\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$ sont des bijections. En effet, considérons les graphiques de ces fonctions :





c et *c*' sont évidemment des applications car $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2$ existe et $\in\mathbb{R}_+$. De plus, *c* est une bijection car tout $y\in\mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par *c*, à savoir $\sqrt{y}$. *c*' est également une bijection car tout $y\in\mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par c', à savoir $-\sqrt{y}$.

Définition. Toute bijection $f:A\to B$ admet une bijection réciproque $f^{-1}:B\to A$. Par définition, c'est la fonction qui à tout $y\in B$ associe l'unique antécédent de *y* par *f*. Cet antécédent est noté $x=f^{-1}(y)$ et appartient à *A*.

Schéma mémo :

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ x & \xrightarrow{\ f\ } & f(x) \\ \parallel & & \parallel \\ f^{-1}(y) & \xleftarrow{\ f^{-1}\ } & y \end{array}$$

Exemples.

- La bijection réciproque de c est $c^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, y \mapsto \sqrt{y}$, celle de c' est $c'^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, y \mapsto -\sqrt{y}$. En pratique, on remplace la lettre y par la lettre x dans la définition : $c^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ et $c'^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, x \mapsto -\sqrt{x}$.
- La bijection réciproque de h est $h^{-1} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, y \mapsto \frac{1}{y}$. On constate que $h = h^{-1}$. On dit que h est une ***bijection involutive***. C'est donc une bijection qui est égale à sa bijection réciproque.

Proposition. Soit $f : A \to B$ une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est strictement monotone sur A alors f^{-1} est strictement monotone sur $f(A)$ et varie dans le même sens que f.

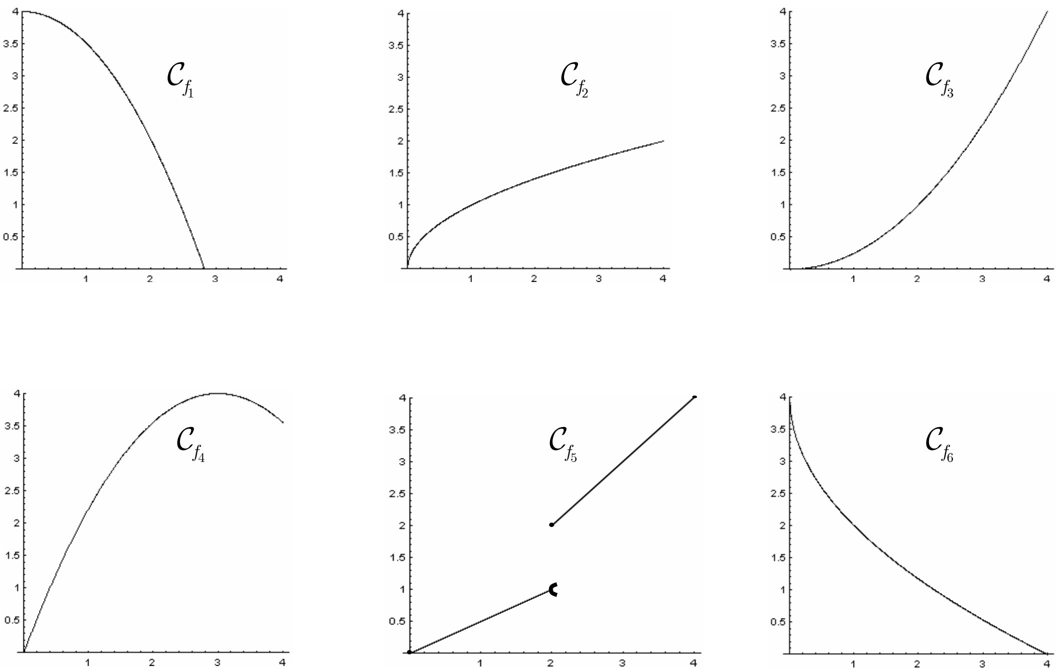
Démonstration. Supposons par exemple que f est strictement croissante sur A. Donc :

$$(\forall x, x' \in A) \quad x < x' \Leftrightarrow f(x) < f(x')$$

Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur $f(A)$. Soit donc $y < y'$ deux réels distincts dans $f(A)$ et soit $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Il faut montrer que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.
Or, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Comme $f(x) < f(x')$ et f est strictement croissante, on a $x < x'$, c.-à-d. $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. On raisonne de même lorsque f est strictement décroissante sur A.

4. Comment reconnaître et construire des bijections

Traçons les courbes représentatives de quelques fonctions dont les ensembles de départ et d'arrivée sont tous égaux à $[0,4]$.



- f_1 n'est pas une bijection car ce n'est pas une application : $\text{dom}\, f_1 \neq [0,4]$
- f_2 n'est pas une bijection car f_2 n'est pas surjective : $\text{im}\, f_2 \neq [0,4]$.
- f_4 n'est pas une bijection car f_4 n'est pas injective. L'application n'est donc pas bijective essentiellement parce qu'elle n'est pas ***strictement monotone***.

- f_5 n'est pas une bijection : elle est strictement monotone mais elle n’est pas surjective.
- f_3 est une bijection car $\operatorname{dom} f_3 = [0,4]$, $\operatorname{im} f_4 = [0,4]$ et f_3 est une application strictement croissante.
- f_6 est une bijection car $\operatorname{dom} f_6 = [0,4]$, $\operatorname{im} f_6 = [0,4]$ et f_6 est une application strictement croissante.

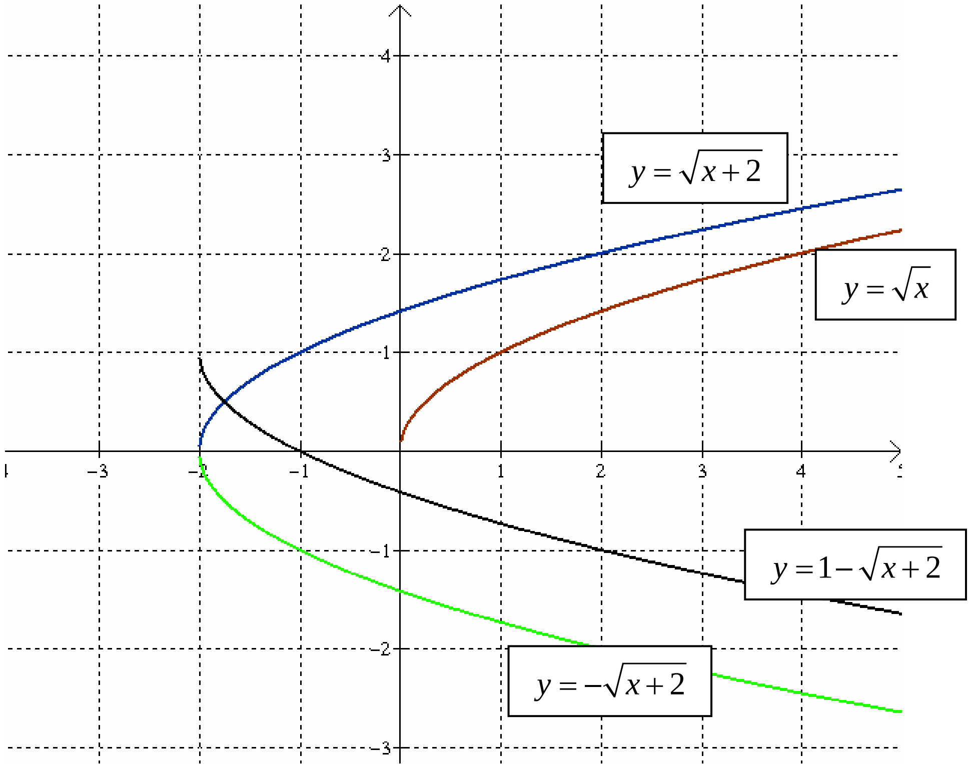
Proposition 1. Si $f : A \to B$ est une fonction telle que
i. *f* est ***strictement monotone,***
ii. $\operatorname{dom} f = A$ et
iii. $\operatorname{im} f = B$,
alors *f* est une bijection.

Démonstration : Comme $\operatorname{dom} f = A$, f est une application. Comme $\operatorname{im} f = B$, f est surjective. Comme *f* est strictement monotone, deux éléments distincts du domaine ont des images distinctes. Donc *f* est aussi injective. Ainsi *f* est une application injective et surjective, donc bijective.

En pratique on dispose de deux moyens simples pour construire des bijections :

Proposition 2.
(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors *f* est une bijection de $A = \operatorname{dom} f$ sur $B = \operatorname{im} f$.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Si A est un intervalle du $\operatorname{dom} f$ tel que $f|_A$ soit strictement monotone, alors *f* est une bijection de *A* sur $B = f(A)$.

Exemples.
(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - \sqrt{x+2}$. Par manipulations au départ de la courbe $y = \sqrt{x}$, on obtient la courbe représentative de *f*.



Il est clair que $\operatorname{dom} f = [-2,+\infty[$ et que f est ***continue et strictement décroissante*** sur ce domaine. Par conséquent, $\operatorname{im} f =]-\infty,1]$. Donc :

$$\begin{aligned} f : [-2,+\infty[&\to]-\infty,1], \\ x &\mapsto 1-\sqrt{x+2} \end{aligned}$$

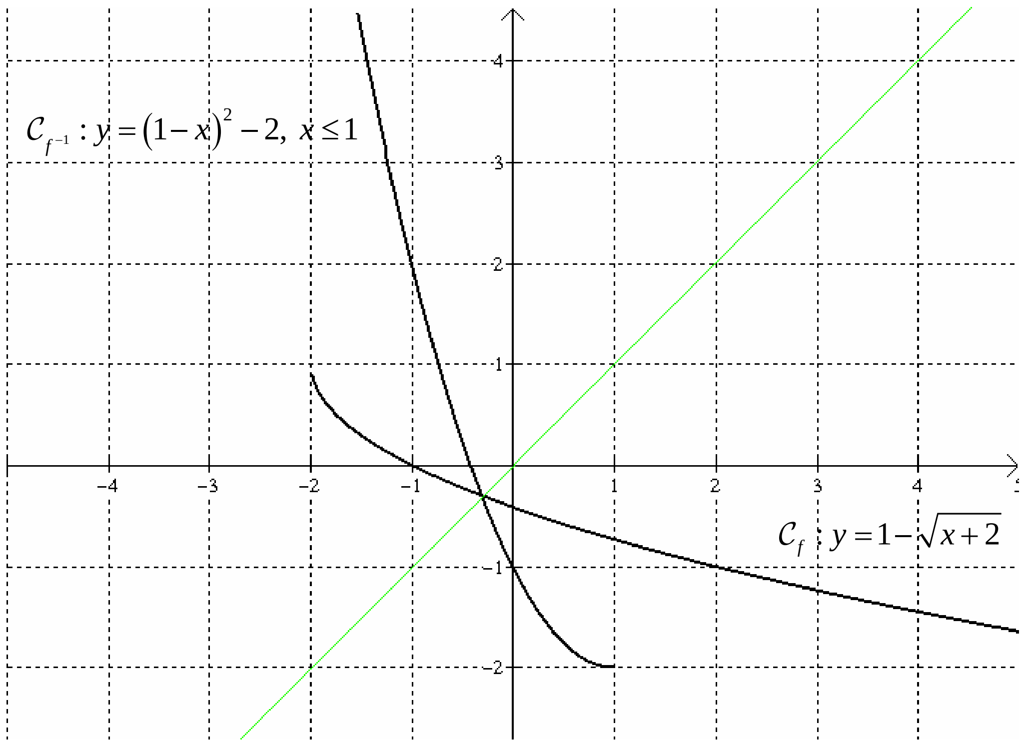
est une bijection. Déterminons sa réciproque :

$$\begin{aligned} (\forall y \in]-\infty,1])(\forall x \in [-2,+\infty[) \qquad & y = 1-\sqrt{x+2} \\ & \Leftrightarrow y-1 = -\sqrt{x+2} \\ & \Leftrightarrow \underbrace{1-y}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \,/(\ )^2 \\ & \Leftrightarrow (1-y)^2 = x+2 \\ & \Leftrightarrow x = (1-y)^2 - 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1} :]-\infty,1] &\to [-2,+\infty[\\ x &\mapsto (1-x)^2 - 2 \end{aligned}$$

Représentons graphiquement f et f^{-1} dans un repère orthonormé :



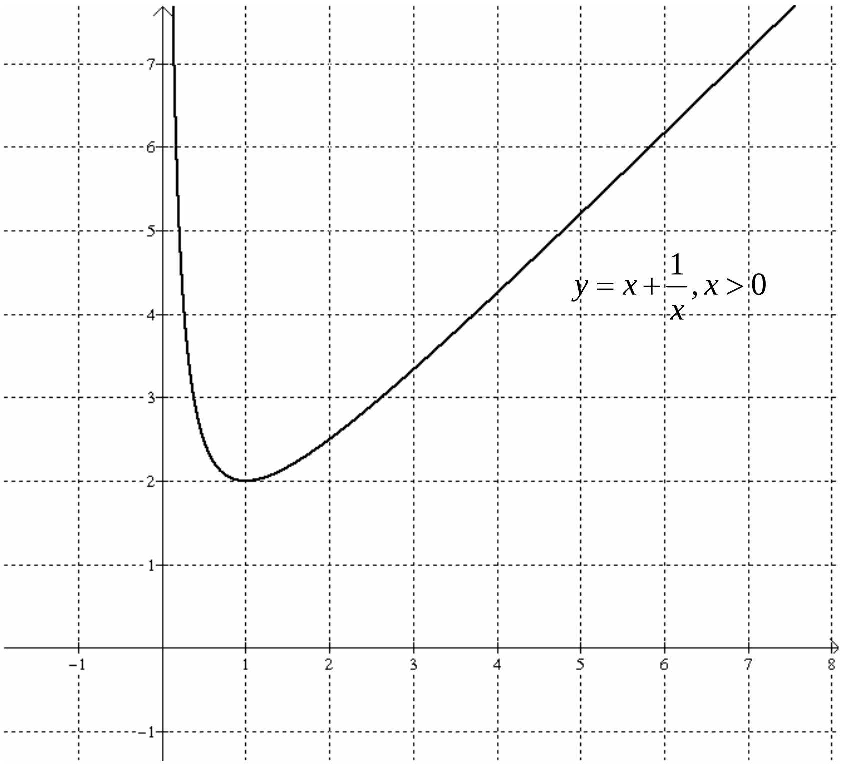
Remarquons que f et f^{-1} sont strictement décroissantes sur leur domaine (d'après la proposition page 6) et que leurs graphes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (d'après la 2e remarque page 2).

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. f est impaire et continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Il en résulte immédiatement que f admet un extremum en $x=1$, que f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$ est donc :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2 (m)	↗ $+\infty$



Par conséquent :

$$f_1 :]0,1] \to [2,+\infty[, x \mapsto x + \frac{1}{x} \text{ et } f_2 : [1,+\infty[\to [2,+\infty[, x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

sont des bijections.

Déterminons leurs bijections réciproques :

$$(\forall y \in [2,+\infty[), (\forall x \in]0,+\infty[)$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

Cette équation est du 2^{e} degré en x et son discriminant vaut :

$$\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \text{ (car } y \geq 2\text{)}$$

Les racines de l'équation sont donc :

$$x_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \in]0,1] \text{ et } x_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \in [1,+\infty[.$$

Evidemment, x_1 est l'antécédent de y par f_1 et x_2 est l'antécédent de y par f_2. (Les deux racines sont confondues lorsque $y = 2$.) D'où les bijections réciproques de f_1 et f_2 :

$$f_1^{-1} : [2,+\infty[\to]0,1], x \mapsto \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} \text{ et}$$

$$f_2^{-1} : [2,+\infty[\to [1,+\infty[, x \mapsto \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$