Formules de dérivation

A. Fonctions usuelles :

Remarques/hypothèses	$f(x)$	dom f	$f'(x)$	dom f'
$n \in \mathbb{Q}$	x^n	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^n \text{ existe}\}$ [1]	nx^{n-1}	$\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^{n-1} \text{ existe}\right\}$
<u>Cas particuliers</u>:	1	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
	x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$
	$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$
	$\operatorname{Arcsin} x$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
	$\operatorname{Arccos} x$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	a^x	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
	$\ln x$, $\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$
$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\log_a x, \log_a \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}^*$

B. Opérations sur les fonctions :

Remarques/hypothèses	f	dom f	$f\,'$	f est dérivable sur [2]
$u,\ v$ fonctions $\mathcal{R}(v) = \{x \,/\, v(x) = 0\}$ $= \{\text{racines de } v\}$	$u + v$	$\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$	$u' + v'$	$\operatorname{dom} u' \cap \operatorname{dom} v'$
	$u - v$		$u' - v'$	
	$u \cdot v$		$u'v + uv'$	
	$\dfrac{u}{v}$	$(\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v) \setminus \mathcal{R}(v)$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\big(\operatorname{dom} u' \cap \operatorname{dom} v'\big) \setminus \mathcal{R}(v)$
<u>Cas particuliers</u> : $k =$ constante	$\dfrac{1}{v}$	$\operatorname{dom} v \setminus \mathcal{R}(v)$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\operatorname{dom} v' \setminus \mathcal{R}(v)$
	$k \cdot u$	$\operatorname{dom} u$	$k \cdot u'$	$\operatorname{dom} u'$
	$\dfrac{u}{k}$	$\operatorname{dom} u$	$\dfrac{u'}{k}$	$\operatorname{dom} u'$
	$\dfrac{k}{v}$	$\operatorname{dom} v \setminus \mathcal{R}(v)$	$-\dfrac{kv'}{v^2}$	$\operatorname{dom} v' \setminus \mathcal{R}(v)$
$f,\ u$ fonctions	$f(u) = f \circ u$	$\operatorname{dom} u \cap \{x \,/\, u(x) \in \operatorname{dom} f\}$	$f\,'(u) \cdot u'$	$\operatorname{dom} u' \cap \{x \in \operatorname{dom} u \,/\, u(x) \in \operatorname{dom} f\,'\}$
<u>Cas particuliers</u>: $n \in \mathbb{Q}$	u^n		$nu^{n-1}u'$	
	$\dfrac{1}{u}$		$-\dfrac{u'}{u^2}$	
	$\sqrt{u}$		$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	
	$\sin u$		$u' \cos u$	
	$\cos u$		$-u' \sin u$	
	$\tan u$		$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'\big(1 + \tan^2 u\big)$	
	$\operatorname{Arcsin} u$		$\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	
	$\operatorname{Arccos} u$		$-\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	
	$\operatorname{Arctan} u$		$\dfrac{u'}{1 + u^2}$	

Remarques / hyp.	f	dom f	f'	f est dérivable sur
Suite cas particuliers:	e^u		$u'e^u$	
$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	a^u		$u'a^u \ln a$	
	$\ln u$, $\ln\lvert u\rvert$		$\dfrac{u'}{u}$	
	$\log_a u, \log_a \lvert u\rvert$		$\dfrac{u'}{u \ln a}$	
u continue, dérivable, str. monotone sur son domaine	u^{-1} (réciproque)	$\operatorname{dom} u^{-1} = \operatorname{im} u$	$\dfrac{1}{u' \circ u^{-1}}$	$\left\{x \in \operatorname{dom} u^{-1} / u'\left(u^{-1}(x)\right) \neq 0\right\}$

[1] On prolonge de façon naturelle les domaines lorsque les exposants sont rationnels : p.ex. pour $n = \frac{1}{3}$, on a $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Cette fonction peut être définie sur $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. La dérivée $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ est définie sur $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}^*$.

[2] f est dérivable sur un ensemble I signifie seulement que $I \subset \operatorname{dom} f'$ et non pas que $I = \operatorname{dom} f'$.