Exemples de limites d'une fonction en un réel.

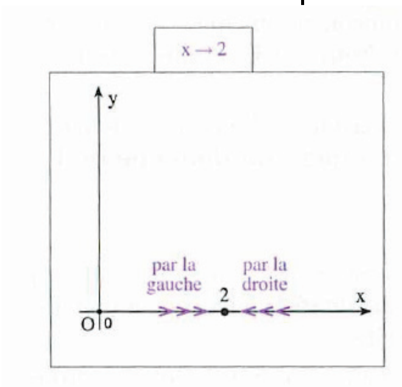
Interprétation graphique

Définition. Soit a un nombre réel.

On dit que le réel x ***tend vers*** a et on note $x \to a$, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, mais différentes de a.

On dit que x ***tend vers*** a par ***la droite*** et on note $x \to a^+$, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a et $x > a$.

On dit que x ***tend vers*** a par ***la gauche*** et on note $x \to a^-$, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a et $x < a$.



Exemple 1. Soit $f : x \mapsto x^2$. Lorsque $x \to 2$, alors $f(x) \to 4$. Illustrons cette affirmation par un tableau des images de la fonction f :

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,61	3,9601	3,996001	3,99960001	4	4,00040001	4,004001	4,0401	4,41

On écrit :

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f\left(x\right) = 4} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x\to 2} x^2 = 4}$$

et on lit : la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers 2, est égale à 4. Remarquons que cette limite est précisément $f(2)$. On dit que f ***est continue en*** 2.

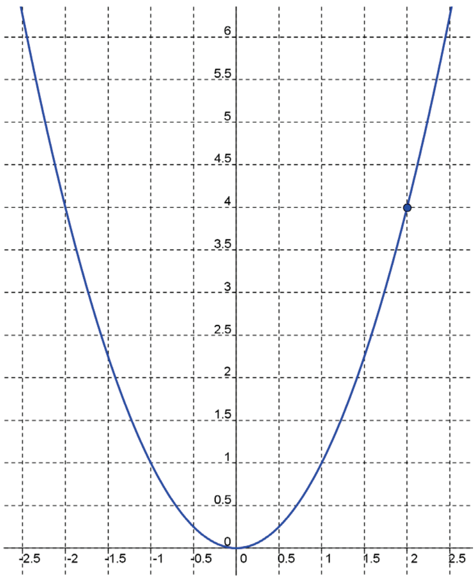
De même, on a : $\lim_{x\to 3} f\left(x\right) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9 = f\left(3\right)$

On dit que f ***est continue en*** 3.

En fait, pour tout autre réel a :

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$$

On dit que f ***est continue en*** tout réel a.



Définition. a) Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. On dit que :

a) f est ***continue*** en le réel a du domaine de f si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b) f est ***continue à droite*** en le réel a du domaine de f si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

c) f est ***continue à gauche*** en le réel a du domaine de f si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Le ***domaine de continuité*** de f, noté $\operatorname{dom}_c f$, est l'ensemble des réels a tels que f est continue en a.

Pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ ci-dessus, on a : $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom}_c f = \mathbb{R}$, car f est définie et continue en tout réel a. Intuitivement, on peut tracer $\mathcal{G}_f$ ***sans lever le crayon***.

Propriété. Si $a \in \operatorname{dom}_c f$ alors , donc $\operatorname{dom}_c f \subset \operatorname{dom} f$.

En effet, si $a \notin \operatorname{dom} f$, alors on ne peut pas avoir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

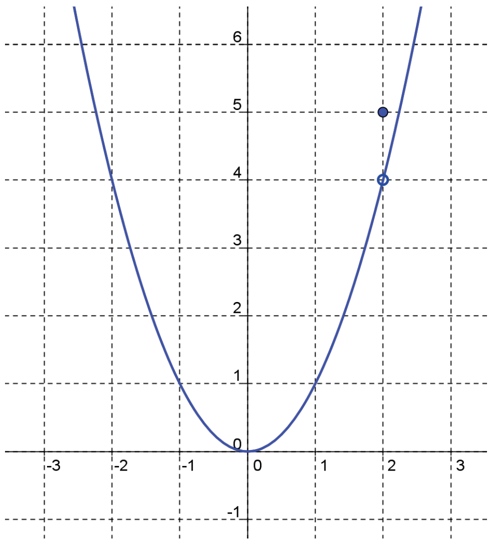
Attention : Si $a \in \operatorname{dom} f$ alors f n'est pas nécessairement continue en a.

Exemple 2. Soit $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

On a toujours : $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4}$, car la valeur de la fonction g en $x = 2$ ne nous intéresse pas lorsque nous calculons sa limite en 2. Mais g n'est pas continue en 2 car $g(2) = 5 \neq 4$: $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4 \neq g(2)}$

g est continue en tout réel sauf en 2. Pour la fonction g, on a donc :

$$\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \text{, mais } \operatorname{dom}_c g = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

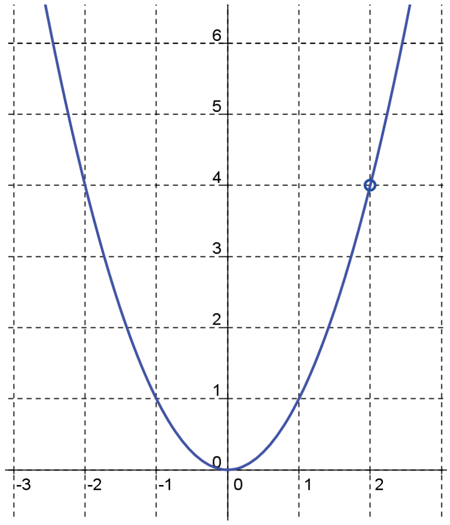


Exemple 3. Soit $h : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ / & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Le / dans la définition signifie que h n'est pas définie en 2. La limite de h en 2 existe, mais h n'est pas continue en 2 car $h\left(2\right)$ n'existe pas : $\operatorname{dom} h = \operatorname{dom}_c h = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$.

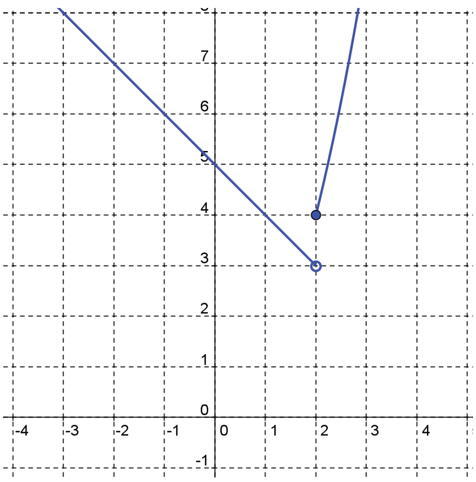
$$\boxed{\lim_{x \to 2} h(x) = 4}$$

Nous dirons que le graphe de h présente un ***point creux*** ou un ***trou*** en $(2,4)$.



Exemple 4. Soit

$$k : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+5 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$



On a :

$$\boxed{\lim_{x \to 2^+} k(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4 = k\left(2\right)}$$

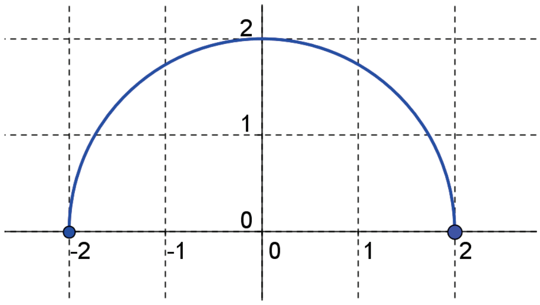
k est continue à droite en 2. Mais k n'est pas continue à gauche en 2 car :

$$\boxed{\lim_{x \to 2^-} k(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x+5) = 3 \neq k\left(2\right)}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 2^+} k(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} k(x)$, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} k(x) \text{ n'existe pas !}}$

La fonction k est continue en tout réel, sauf en 2 : $\operatorname{dom} k = \mathbb{R}$ et $\operatorname{dom}_c k = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$. Intuitivement, cela signifie qu'on peut dessiner le graphe de k sans lever le crayon, sauf pour $x = 2$. Nous dirons que le graphe de k présente un ***saut*** d'amplitude 1 à l'abscisse 2.

Exemple 5. Soit $r : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ la fonction dont le graphe est le demi-cercle de centre l'origine et de rayon 2. On a : $\operatorname{dom} r = [-2,2]$.



r est ***continue à droite*** en -2 et ***à gauche*** en 2 :

$$\boxed{\lim_{x\to -2^+} r(x) = 0 = r(-2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 2^-} r(x) = 0 = r(2)}$$

Par convention, nous dirons aussi que r est ***continue*** en -2 et en 2. Nous avons le droit d'écrire :

$$\boxed{\lim_{x\to -2} r(x) = 0 = r(-2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 2} r(x) = 0 = r(2)}$$

En effet, le domaine de la fonction étant $[-2,2]$, lorsqu'on écrit $x \to -2$ (resp. $x \to 2$), il est sous-entendu que cela signifie $x \to -2^+$ (resp. $x \to 2^-$). On peut donc omettre le $^+$ derrière -2 (resp. le $^-$ derrière 2) dans une telle situation.

$$\operatorname{dom} r = \operatorname{dom}_c r = [-2,2].$$

Evidemment les deux limites $\lim\limits_{x\to -2^-} r(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} r(x)$ n'ont pas de sens. De même, il serait absurde de vouloir calculer $\lim\limits_{x\to 3} r(x)$. Cette limite n'existe pas puisqu'on ne peut pas choisir une suite de réels dans le domaine de r qui tend vers 3.

Exemple 6. Soit

$$m : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ / & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction oscille une infinité de fois entre -1 et +1 sur tout intervalle de la forme $]0,\alpha[$, où $\alpha > 0$. Voilà pourquoi $\lim\limits_{x\to 0^+} m(x)$ n'existe pas. En particulier la fonction m n'est pas continue en 0. Elle est pourtant continue en tout autre réel de son domaine : $\operatorname{dom}_c m = \mathbb{R}_+^*$.

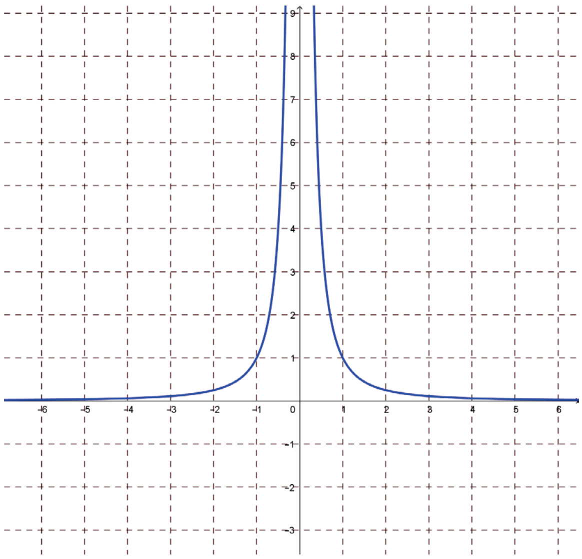
Exemple 7. Considérons le tableau des images suivant de la fonction $n : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

x	1	$\pm 10^{-1}$	$\pm 10^{-2}$	$\pm 10^{-3}$	$\pm 10^{-10}$	$\cdots$
$n(x)$	1	10^2	10^4	10^6	10^{20}	$\cdots$

Nous observons que si x tend vers 0, alors $n\left(x\right)$ devient arbitrairement grand, c.-à-d. tend vers $+\infty$. Nous écrivons :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} n\left(x\right) = +\infty}$$

Le graphe de n admet l'axe des ordonnées comme ***asymptote verticale*** (AV). Evidemment, la fonction n n'est pas continue en 0 car $n(0)$ n'existe pas , mais n est continue en tout autre réel : $\operatorname{dom} n = \operatorname{dom}_c n = \mathbb{R}^*$.



Exemple 8. Considérons les tableaux des images suivants de la fonction $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-10}	$\cdots$
$n(x)$	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{10}	$\cdots$

x	-1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-10}	$\cdots$
$n(x)$	-1	-10^{1}	-10^{2}	-10^{3}	-10^{10}	$\cdots$

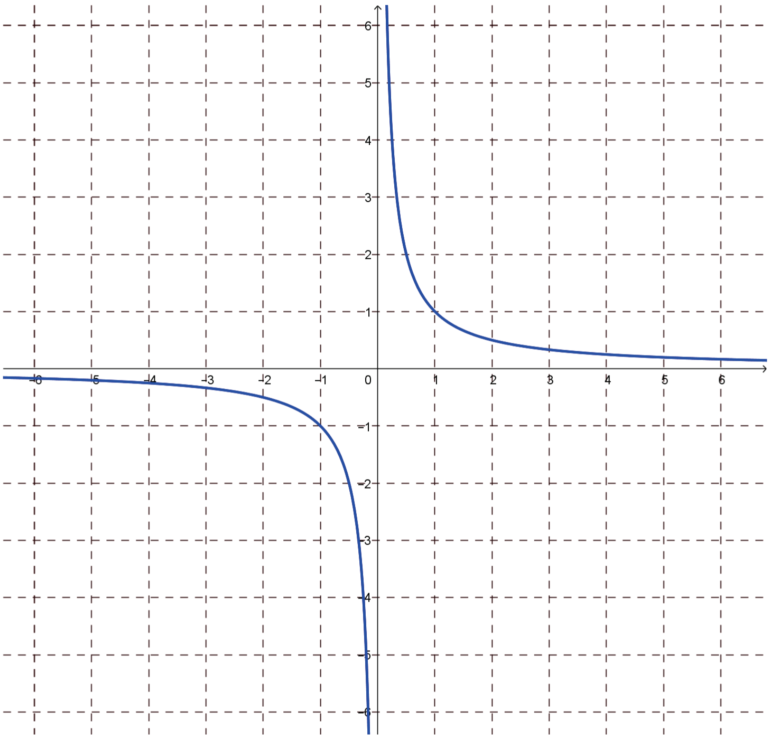
Nous observons que si x tend vers 0 par valeurs positives, alors $i\left(x\right)$ tend vers $+\infty$, alors que si x tend vers 0 par valeurs négatives, alors $i\left(x\right)$ tend vers $-\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty}$$

Bien sûr, puisque les deux limites diffèrent, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ n'existe pas}}$$

Le graphe de i admet toujours l'axe des ordonnées comme ***asymptote verticale***.



-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6