CHAPITRE 1 : Trigonométrie (EM4 : chapitre 2 et chapitre 6)

1 Rappels - classe de quatrième

Théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle :

Dans un triangle rectangle, où α est un des deux angles aigus, on a :

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\text{(longueur du) côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{(longueur de l')hypoténuse}} \\
\sin\alpha &= \frac{\text{(longueur du) côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{(longueur de l')hypoténuse}} \\
\tan\alpha &= \frac{\text{(longueur du) côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{(longueur du) côté adjacent à l'angle } \alpha} \\
\cot\alpha &= \frac{\text{(longueur du) côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{(longueur du) côté opposé à l'angle } \alpha}
\end{aligned}$$

Valeurs remarquables :

Angle α en degrés	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Formules trigonométriques :

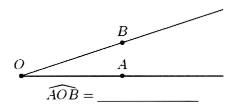
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ $\qquad$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$

Exercices 1-10 sur les feuilles

2 Unités pour mesurer un angle

2.1 Les degrés

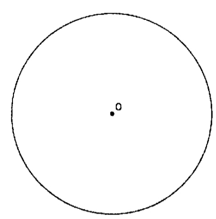
L'unité utilisée pour déterminer la mesure d'un angle est le **degré**.



2.2 Les radians

2.2.1 Introduction et définition

Toute partie de cercle comprise entre deux point distincts C et D de cercle est nommée arc de cercle.



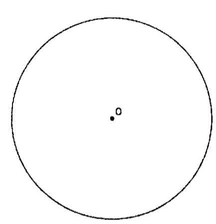
Deux points distincts C et D d'un cercle déterminent deux arcs de cercle.

Habituellement, le plus petit des arcs est noté ....

Définition :

On donne un angle géométrique $\widehat{AOB}$ et un cercle C de centre O et de rayon R.

L'angle coupe le cercle en deux points C et D.



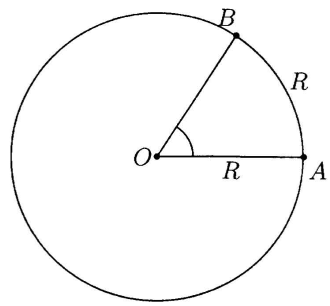
On dit que l'arc $\widehat{CD}$ est l'arc .... sur le cercle C par l'angle ......

Tout angle dont le sommet est le centre d'un cercle est appelé ....

de ce cercle.

Activité :

On donne un cercle C de centre O et de rayon R.



Sur la figure on détermine un arc $\widehat{AB}$ de longueur R.

Au lieu de mesurer l'angle au centre en degrés, on choisit une nouvelle manière de procéder : l'angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{AB}$ de longueur R est l'angle de mesure 1 **radian**.

Dans ce nouveau système de mesure, complète le tableau suivant :

part de cercle	**longueur de cette part**	**angle au centre (en radians)**
$\widehat{AB}$	R	1
cercle entier		
$\frac{1}{2}$ de cercle		
$\frac{1}{4}$ de cercle		
$\frac{1}{8}$ de cercle		
$\frac{3}{4}$ de cercle		
$\frac{1}{7}$ de cercle		

Définition :

Un **angle d'un radian** (1 rad) est un angle . . . .

. . . .

. . . .

Remarque :

D'après le tableau de la page précédente on sait que l'angle au centre d'un cercle interceptant un demi-cercle mesure . . . . radians.

D'autre part on sait qu'un tel angle mesure . . . .

Conclusion : . . . . correspondent à . . . . radians.

2.2.2 Conversion

Activité :

1. On donne un angle $\hat{A}$ tel que $\hat{A} = 30^{\circ}$. On veut déterminer la mesure en radians α_r de l'angle $\hat{A}$.

   Complète le tableau suivant :

angle	**en degrés**	**en radians**
$\hat{A}$		
angle plat		

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .

2. **Cas général :**

Soit α_r la mesure en radians d'un certain angle $\hat{C}$ donné et α_d sa mesure en degrés.

On s'intéresse à la relation qui existe entre ces deux unités de mesures.

Complète le tableau suivant :

angle	**en degrés**	**en radians**
$\hat{C}$		
angle plat		

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Retenons :

Si les mesures en radians et en degrés d'un même angle sont respectivement r et d, elles se déduisent les unes des autres par la relation :

Exercice :

1) Détemine une mesure en radians d'un angle de 270°

2) Détermine une mesure en radians d'un angle de 120°

3) Détemine une mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{2\pi}{5}$

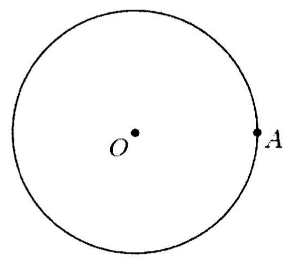
3) Détermine une mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{5\pi}{3}$ rad.

EM4 : exercices 52-54 page 244

3 Mesures d'un angle orienté

3.1 Le cercle trigonométrique

On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 et un point A appartenant à ce cercle. Place un point M sur le cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \dfrac{\pi}{2}$.



Qu'est-ce que tu remarques ?

....

....

Qu'est-ce qu'il faut encore indiquer afin de déterminer la position de M de façon unique ?

....

....

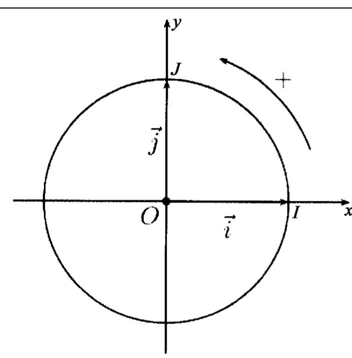
Définition :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le **cercle trigonométrique** est le cercle

- ....

- ....

- ....



Remarque :

On parle encore du sens . . . .

ou du sens . . . .

ou encore du sens . . . .

3.2 Angles orientés

Définition :

Un angle . . . . est un angle dont l'un des côtés est le côté . . . . et l'autre côté est le côté . . . .

Pour écrire un angle orienté on utilise les vecteurs.

Exemple :

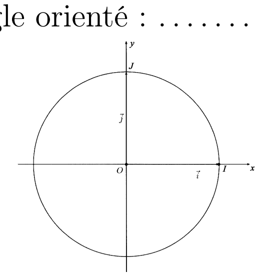
Les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ déterminent

- un . . . .
- deux . . . .
  . . . .

Proposition :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$. Soit M un point appartenant au cercle trigonométrique.

Alors le point M détermine un angle orienté : . . . .

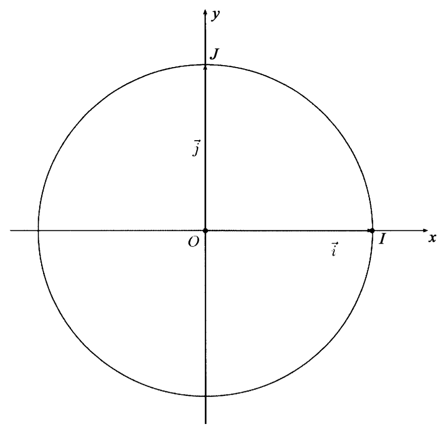


Dans le cercle trigonométrique, tout angle orienté a pour origine la demi-droite $[Ox)$.

3.3 Mesures d'un angle oriénté

Activité 1 :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$. Au départ du point I, un point mobile M parcourt sur le cercle une distance égale à $\frac{\pi}{4}$. indique par M_1 et M_2 les deux positions possibles du point M sur le cercle trigonométrique.

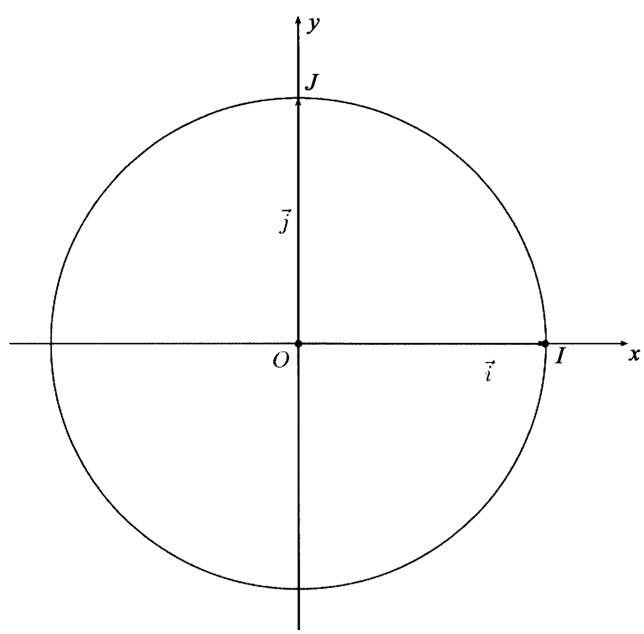


Si M a parcouru le cercle

- dans le sens positif, alors l'angle orienté .... a pour mesure ....
- dans le sens négatif, alors l'angle orienté .... a pour mesure ....

Activité 2 :

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, détermine



- le point A du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$
- le point B du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3}$
- le point C du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}) = \frac{3\pi}{4}$
- le point D du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}) = \frac{11\pi}{4}$
- le point E du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{6}$
- le point F du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OF}) = -\frac{3\pi}{2}$
- le point G du cercle tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OG}) = \frac{10\pi}{3}$

Qu'est-ce que tu constates ?

....

....

Définition :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

Soit M un point appartenant au cercle trigonométrique

L'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ a .... de mesures.

Si α est une mesure en radians, alors les autres sont de la forme

....

c'est-à-dire ....

Exemples :

Soit $\frac{\pi}{6}$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

Donne quelques autres mesures de cet angle.

....

....

Soit 65° une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

Donne quelques autres mesures de cet angle.

....

....

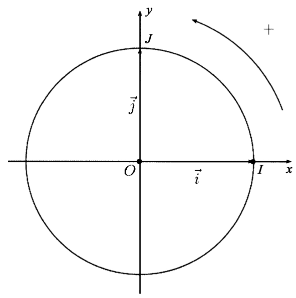
EM4 : exercice 61 page 244

3.4 Mesure principale d'un angle orienté

Activité :

Sur le cercle trigonométrique on donne $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

1) a) Place le point A sur le cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

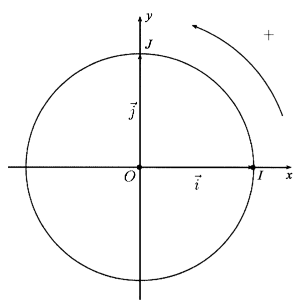


b) Donne quelques autres mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$.

. . . .

c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$ qui correspond au plus petit chemin de I vers A sur le cercle trigonométrique ? . . . .

2) a) Place le point B sur le cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = \dfrac{5\pi}{3}$.



b) Donne quelques autres mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})$.

. . . .

c) Quelle est la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})$ qui correspond au plus petit chemin de I vers B sur le cercle trigonométrique ? . . . .

3) Quelle est la longueur maximale du plus petit chemin de I vers un autre point se trouvant sur le cercle trigonométrique ?

. . . .

Définition :

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle ....

Elle s'appelle **la** .... de l'angle orienté.

Exemple :

$\ldots ; -\frac{7\pi}{2} ; -\frac{3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2} ; \frac{9\pi}{2} ; \ldots$ sont des mesures d'un même angle orienté,

.... est la mesure principale de cet angle.

Exercice :

Est-ce que ces mesures d'angles sont des mesures principales ? Sinon cherche la mesure principale.

- $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$

- $\alpha = \frac{\pi}{12}$

- $\alpha = \frac{22\pi}{3}$

EM4 : exercices 54-60 page 244

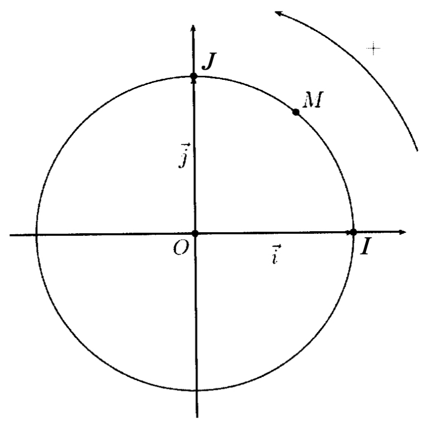
4 Nombres trigonométriques d'un angle orienté

4.1 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Activité :

On donne un cercle trigonométrique et les points $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

Soit α un angle orienté aigu et M le point tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$.



1) Indique l'angle $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ sur la figure ci-dessus.

2) Complète :

$\cos\alpha =$ $\sin\alpha =$

Remarque :

On étend cette définition à tous les angles orientés.

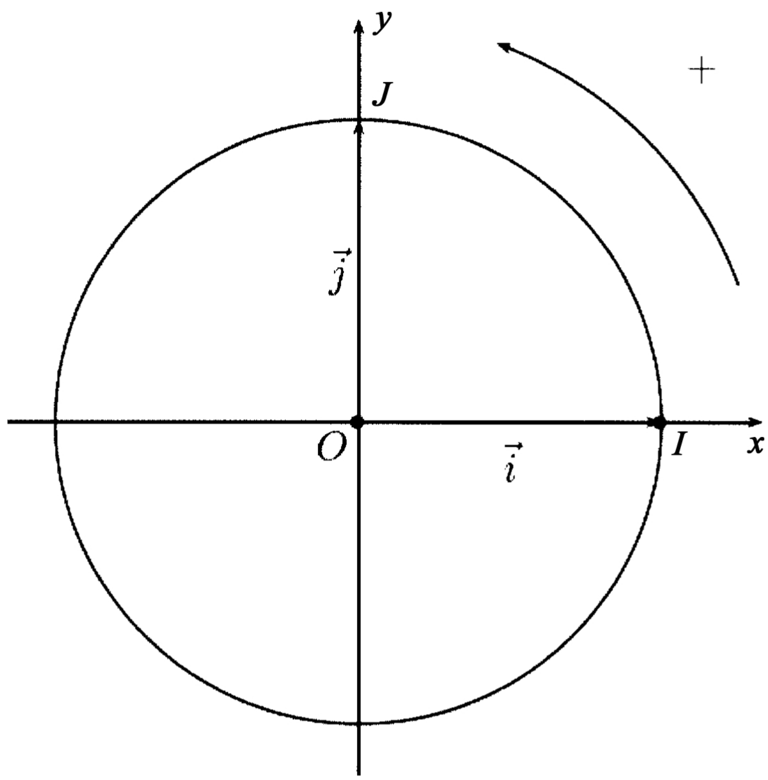
Définition :

Sur le cercle trigonométrique, on donne $I(1;0)$. Soit M un point qui appartient au cercle trigonométrique.

Soit α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

- Le cosinus de α, noté $\cos\alpha$, correspond à ....
- Le sinus de α, noté $\sin\alpha$, correspond à ....

Les coordonnées du point M sont ....



4.2 Tangente et cotangente d'un angle orienté

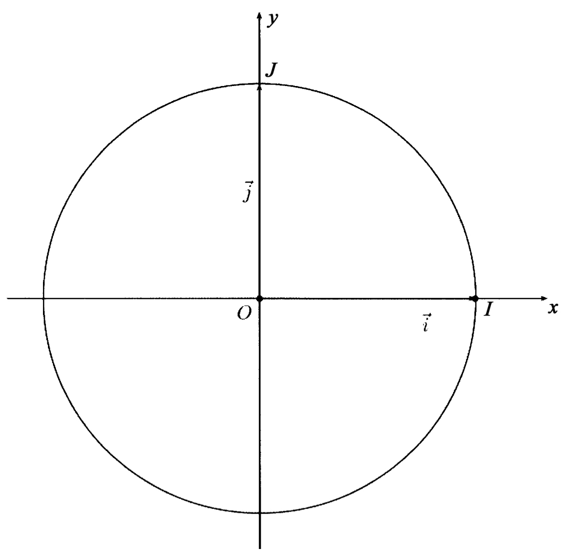
4.2.1 Tangente d'un angle

Activité :

On donne un cercle trigonométrique et les points $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

Soit α un angle orienté aigu et M le point tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$.

Trace la droite d tangente en I au cercle trigonométrique. T est le point d'intersection de la droite d et de la droite (OM).



Remarque :

Si $\alpha =$ ...., le point T n'existe pas, car dans ce cas les droites (OM) et d sont ....

Retenons :
$\tan\alpha$ est .... **du point** T avec $\alpha \neq$ ....

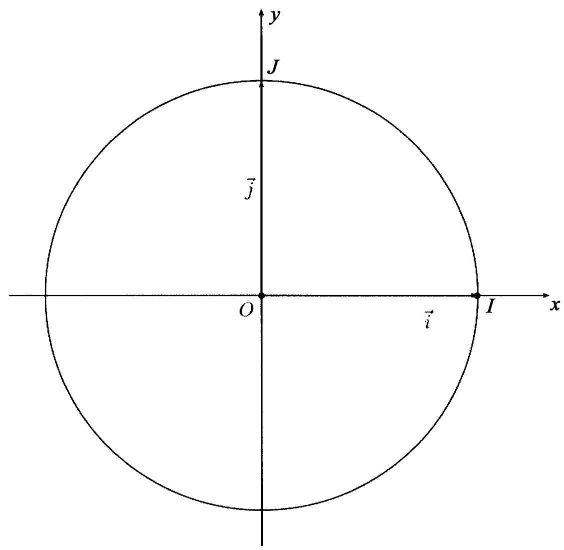
Rappel - classe de quatrième :
$\tan\alpha =$ si $\alpha \neq$ ....

4.2.2 Cotangente d'un angle

On donne un cercle trigonométrique et les points $I(1;0)$ et $J(0;1)$.

Soit α un angle orienté aigu et M le point tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$.

Trace la droite d' tangente en J au cercle trigonométrique. T' est le point d'intersection de la droite d et de la droite (OM).



Remarque :

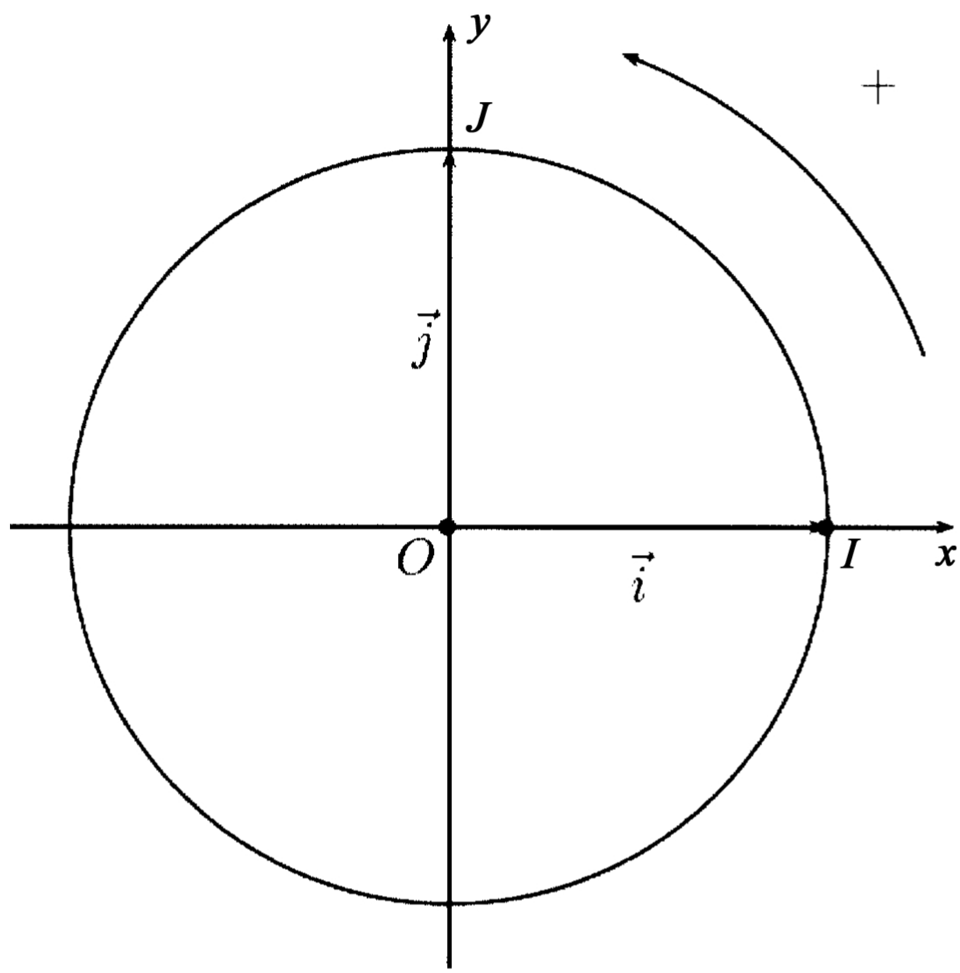
Si $\alpha =$ ...., le point T' n'existe pas, car dans ce cas les droites (OM) et d sont ....

Retenons :
$\cot\alpha$ est .... **du point** T' avec $\alpha \neq$ ....

Rappel - classe de quatrième :
$\cot\alpha =$ si $\alpha \neq$ ....

EM4 : exercices 62, 63 page 245

Activité :



1) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_1}) = 0$ ....

2) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_2}) = \dfrac{\pi}{6}$ ....

3) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_3}) = \dfrac{2\pi}{3}$ ....

4) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_4}) = \dfrac{\pi}{4}$ ....

5) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_5}) = -\dfrac{\pi}{2}$ ....

6) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_6}) = \pi$ ....

7) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM_7}) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

Tableau récapitulatif

Angle α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						
$\cot\alpha$						

Remarque :

1)

- La valeur maximale que peut atteindre l'abscisse de M est ...
- La valeur minimale que peut atteindre l'abscisse de M est ...

Donc : ....

2)

- La valeur maximale que peut atteindre l'ordonnée de M est ...
- La valeur minimale que peut atteindre l'ordonnée de M est ...

Donc : ....

Propriété :

Soit α la mesure d'un angle orienté :

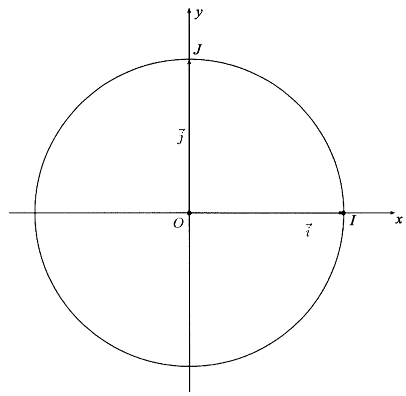
- ....
- ....

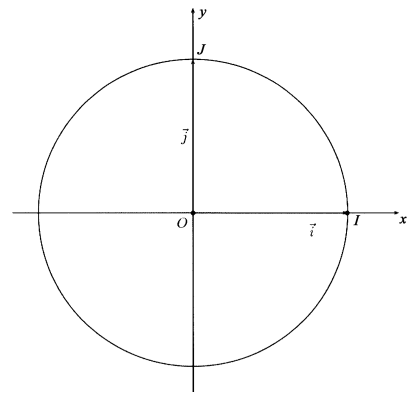
Remarque :

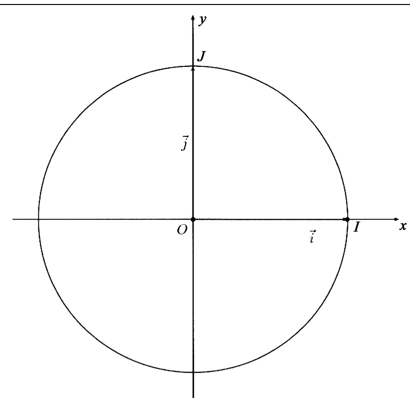
Il n'y a pas d'encadrement possible pour $\tan\alpha$

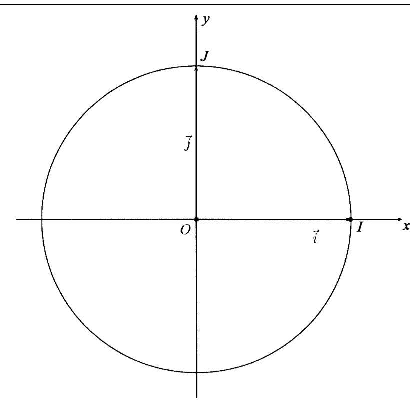
4.3 Signes des nombres trigonométriques

Le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ est divisé en quatre quadrants.









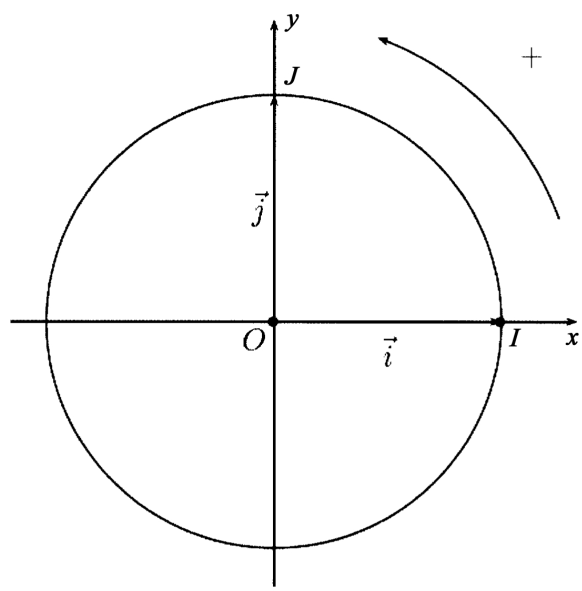
	1^{ier} quadrant (I)	2^{e} quadrant (II)	3^{e} quadrant (III)	4^{e} quadrant (IV)
$\cos\alpha$				
$\sin\alpha$				
$\tan\alpha$				
$\cot\alpha$				

EM4 : exercices 64, 65, 66 page 246

4.4 Angles associés

4.4.1 Angles équivalents

Sur le cercle trigonométrique M est un point mobile et α une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.



Quelles sont les autres mesures de $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$? ....

Retenos :

Soit α une mesure de l'angle orienté et soit $k \in \mathbb{Z}$.

....

....

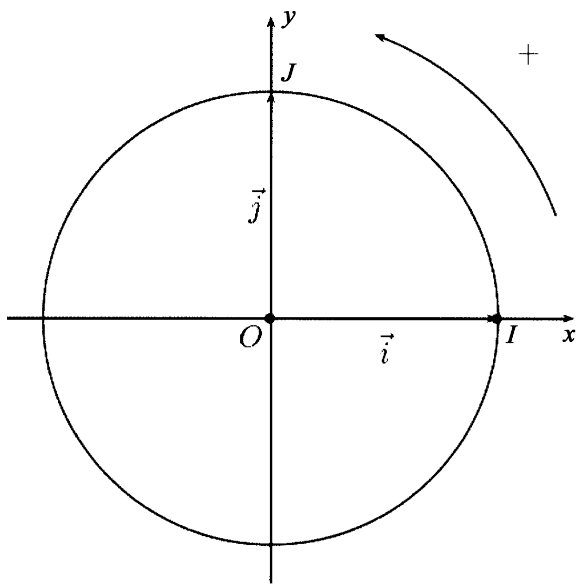
Exemples :

1) $\cos\left(\dfrac{13\pi}{6}\right) =$

2) $\tan\left(\dfrac{-19\pi}{4}\right) =$

4.4.2 Angles opposés

Soit M un point du cercle trigonométrique et soit M' le symétrique de M par rapport à (Ox). Marque le point M' sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Si $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$, alors $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}) = \dots\dots\dots$

Définition :

Les angles .... et .... sont appelés **angles opposés**.

Retenons :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemples :

Calcule sans calculatrice :

1) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) =$

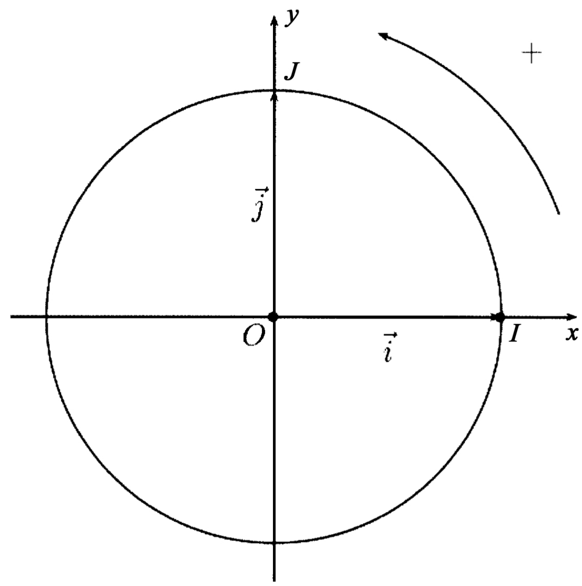
2) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) =$

3) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) =$

4) $\cot\left(-\dfrac{25\pi}{4}\right) =$

4.4.3 Angles supplémentaires

Soit M un point du cercle trigonométrique et soit M' le symétrique de M par rapport à (Oy). Marque le point M' sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Si $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$, alors $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}) = \ldots\ldots\ldots$

Définition :

Les angles .... et .... sont appelés **angles supplémentaires**.

Retenons :

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemples :

Calcule sans calculatrice :

1) $\sin \frac{2\pi}{3} =$

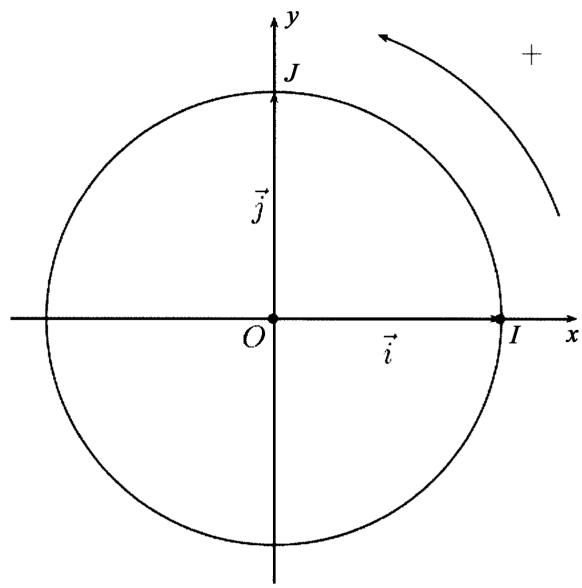
2) $\cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right) =$

3) $\cot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$

4) $\tan \frac{14\pi}{3} =$

4.4.4 Angles antisupplémentaires

Soit M un point du cercle trigonométrique et soit M' le symétrique de M par rapport à O. Marque le point M' sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Si $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$, alors $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}) = \ldots\ldots\ldots$

Définition :

Les angles .... et .... sont appelés **angles antisupplémentaires**.

Retenons :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemples :

Calcule sans calculatrice :

1) $\cos\dfrac{7\pi}{6} =$

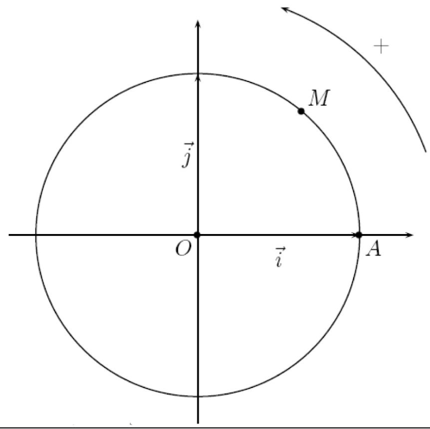
3) $\cot\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) =$

2) $\cos\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right) =$

4) $\tan 5\pi =$

4.4.5 Angles complémentaires

Soit M un point du cercle trigonométrique. Sachant que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, placer le point M'.



Définition :

Les angles .... et .... sont appelés **angles complémentaires**.

Retenons :

....

....

....

....

....

....

....

....

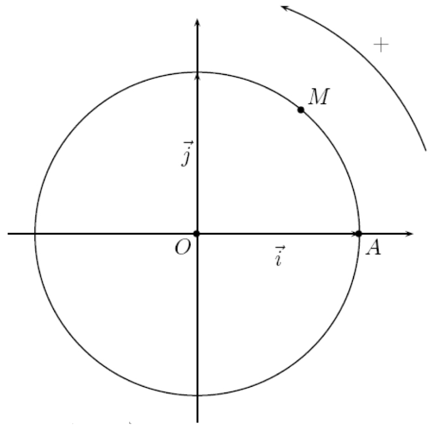
....

....

....

4.4.6 Angles α et $\frac{\pi}{2}+\alpha$

Soit M un point du cercle trigonométrique. Sachant que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=\alpha$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+\alpha$, place le point M'.



Retenons :

. . . .
. . . .

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

EM4 : exercices 68, 69, 70 page 246, exercices 87, 88, 89,exercices 106, 107, 108 page 253

EM4 : exercices 219, 220 page 278

Feuille cercle trigonométriques et angles : exercices 1-10

Résumé :

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

$\sin(\alpha + k\cdot 2\pi) = \sin\alpha$
$\cos(\alpha + k\cdot 2\pi) = \cos\alpha$
$\tan(\alpha + k\cdot 2\pi) = \tan\alpha$
$\cot(\alpha + k\cdot 2\pi) = \cot\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

Angle α en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Angle α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	//
$\cot\alpha$	//	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5 Équations trigonométriques

5.1 Équation de la forme $\cos x = a$

5.1.1 Équation de la forme $\cos x = a$ avec $a < -1$ ou $a > 1$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :

$\cos x = 3$

. . . .

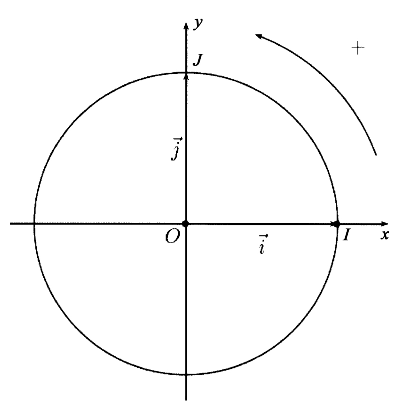
5.1.2 Équation de la forme $\cos x = a$ avec $-1 \leqslant a \leqslant 1$

Exemple :

Résous dans $\mathbb{R}$ l' équation trigonométrique suivante :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$



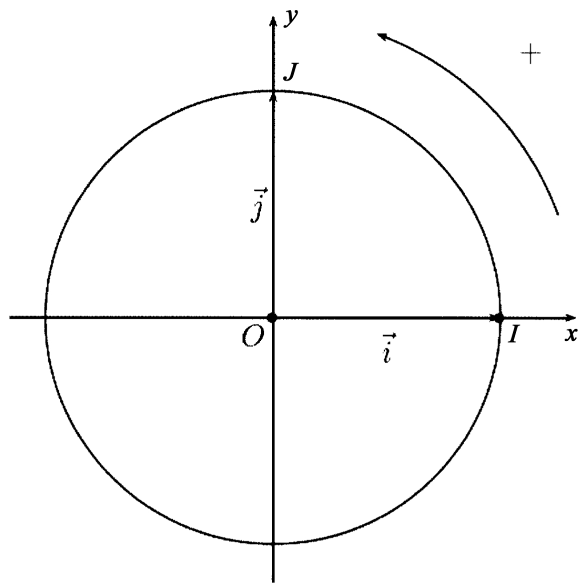
. . . .

Retenons :

- Si $a \notin [-1;1]$, alors l'équation $\cos x = a$ ....
- Si $a \in [-1;1]$, alors l'équation $\cos x = a$ ....

  Dans ce cas, il existe au moins un réel α, tel que $a = \cos \alpha$.

  $$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$



Cas particuliers :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\cos x = 1$

....

....

....

2) $\cos x = -1$

....

....

....

5.2 Équation de la forme $\sin x = a$

5.2.1 Équation de la forme $\sin x = a$ avec $a < -1$ ou $a > 1$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x = 5$

. . . .

2) $\sin x = -2$

. . . .

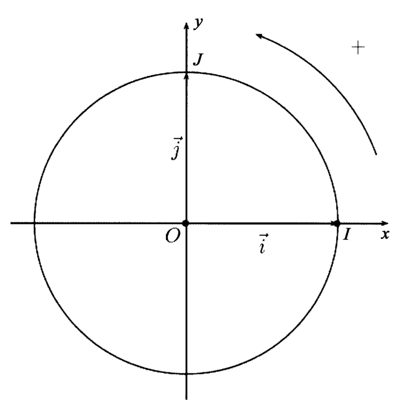
5.2.2 Équation de la forme $\sin x = a$ avec $-1 \leqslant a \leqslant 1$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ . . . .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



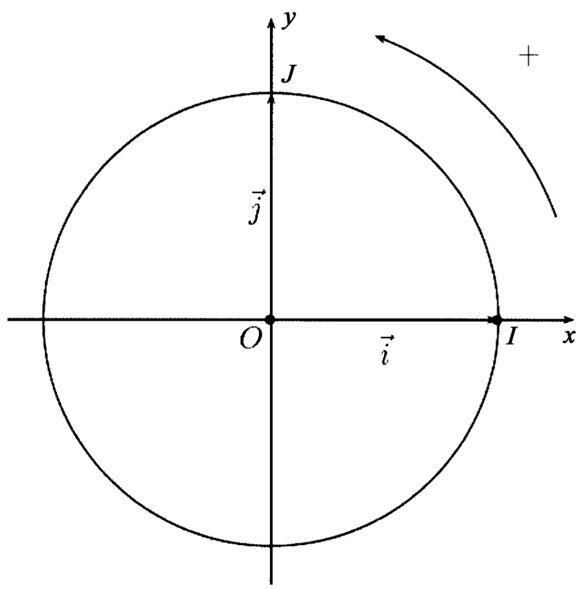
. . . .

Retenons :

- Si $a \notin [-1;1]$, alors l'équation $\sin x = a$ ....
- Si $a \in [-1;1]$, alors l'équation $\sin x = a$ ....

  Dans ce cas, il existe au moins un réel α, tel que $a = \sin\alpha$.

  $$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$



Cas particuliers, si $a = -1$ ou $a = 1$:

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

1) $\sin x = 1$

....

....

....

2) $\sin x = -1$

....

....

....

5.3 Équation $\tan x = a$

Exemples :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

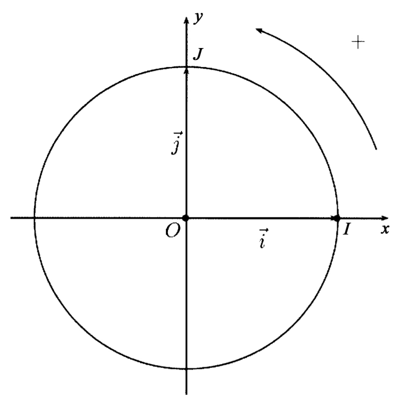
Domaine de définition : ....

1) $\tan x = 1 \Leftrightarrow$ ....

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

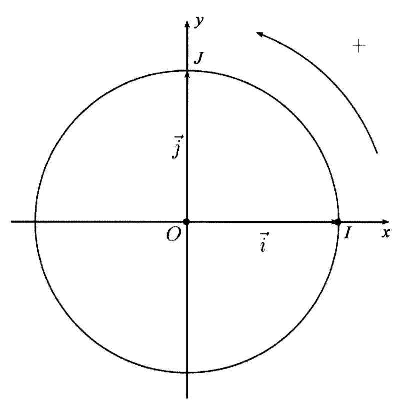
ce qu'on peut résumer en une seule formule :

$\Leftrightarrow$ ....



....

Retenons :



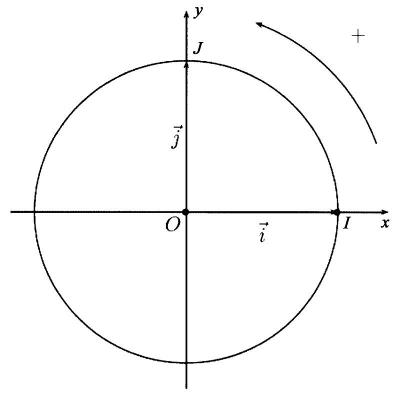
$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow$ ....

2) $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....



....

EM4 : exercices 221, 222, 223, 224 page 278, 253 page 283

Feuille d'exercice : équations trigonométriques

6 Théorème d'Al Kashi (théorème de Pythagore généralisé ou relations aux cosinus)

6.1 Théorème d'Al Kashi ou théorème de Pythagore généralisé

Relation d'Al Kashi :
ABC est un triangle. On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$
On a :

$$a^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration :

Premier cas : Les trois angles du triangle ABC sont aigus.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Deuxième cas : Un des trois angles du triangle ABC est obtus.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.2 Aire d'un triangle et théorème des sinus

Formule de l'aire :
ABC est un triangle. On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$
L'aire S du triangle ABC vaut :

S = ...

S = ...

S = ...

Démonstration :

Premier cas : $\hat{A}$ est un angle aigu

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Deuxième cas : $\hat{A}$ est un angle obtus

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Conséquence :

On a :

$$2S = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant $2S$ par $\dfrac{1}{abc}$ avec $abc \neq 0$, on obtient :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro et donc :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème des sinus :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

EM4 : exercices 236, 237, 238, 239, 240, 242 page 280

Exercices : feuille Théorème d'Al Kashi