CHAPITRE 1
Systèmes d'équations

1. Définition et exemple

Définition. Un ***système linéaire de 2 équations à 2 inconnues*** est un ensemble (Σ) de deux équations de la forme :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$$

où (x,y) est le ***couple d'inconnues*** et a, b, c, a', b' et c' sont des constantes appelées ***coefficients*** du système et vérifiant les conditions $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$. ***Résoudre*** le système revient à trouver le ou les couples $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ qui satisfont ***simultanément*** les deux équations (1) et (2). Ces couples sont les ***solutions*** du système.

Exemple. Considérons le système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ 7x-4y=-1 & (2) \end{cases}$$

Intéressons-nous d'abord aux solutions de l'équation (1). Le couple $(1,2)$ est une solution de cette équation, car $2\cdot 1+3\cdot 2=8$. Mais c'est loin d'être l'unique solution ! En effet il est facile de vérifier que $(-2,4)$, $(-5,6)$, $(\frac{5}{2},1)$, ... sont d'autres couples de solution de cette équation. En fait l'équation (1) admet une ***infinité de solutions***. La ***forme générale*** de ces solutions peut s'obtenir en calculant y ***en fonction*** de x :

$$2x+3y=8 \Leftrightarrow 3y=8-2x \Leftrightarrow y=\frac{8-2x}{3}.$$

Les solutions de (1) sont donc les couples de la forme $\left(x,\frac{8-2x}{3}\right)$ où x est un réel quelconque.

Par exemple : si $x=-2$ alors $y=\frac{8-2\cdot(-2)}{3}=\frac{12}{3}=4$, d'où la solution $(-2,4)$.

De même, l'équation (2) admet une infinité de solutions. On trouve facilement que ce sont les couples de la forme $\left(x,\frac{7x+1}{4}\right)$, où x est un réel quelconque. Par exemple : $(1,2)$, $(2,\frac{15}{4})$, $(-3,5)$, ...

Remarquons que le couple $(1,2)$ est à la fois solution de (1) et de (2). C'est donc une solution du système (Σ). Le système (Σ) admet-il d'autres solutions ? Les méthodes de résolutions exposées ci-dessous vont prouver que $(1,2)$ est l'***unique*** solution de (Σ).

2. Méthodes de résolution

Reprenons le système (Σ) de l'exemple précédent.

a) Résolution par substitution (= remplacement)

On calcule y en fonction de x à l'aide de l'équation (1) :

$$2x+3y=8 \Leftrightarrow 3y=8-2x \Leftrightarrow y=\frac{8-2x}{3} \quad (3)$$

On substitue l'équation (3) dans l'équation (2) :

$$7x-4\left(\frac{8-2x}{3}\right)=-1 \qquad /\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow 21x-4(8-2x)=-3$$
$$\Leftrightarrow 21x-32+8x=-3$$
$$\Leftrightarrow 29x=29$$
$$\Leftrightarrow x=1 \quad (4)$$

Finalement on substitue (4) dans (3) :

$$y=\frac{8-2\cdot 1}{3}=\frac{6}{3}=2$$

Le système admet donc une solution unique : $S=\{(1,2)\}$.

b) Résolution par combinaison linéaire

Combinons d'abord les équations (1) et (2) pour éliminer y :

$4\cdot(1)$: $\quad 8x+12y=32 \quad$ (1')
$3\cdot(2)$: $\quad 21x-12y=-3 \quad$ (2')
(1') + (2') : $\quad 29x=29 \Leftrightarrow x=1$

Combinons maintenant les équations (1) et (2) pour éliminer x :

$7\cdot(1)$: $\quad 14x+21y=56 \quad$ (1")
$-2\cdot(2)$: $\quad -14x+8y=2 \quad$ (2")
(1") + (2") : $\quad 29y=58 \Leftrightarrow y=2$

On retrouve que $S=\{(1,2)\}$.

c) Méthode graphique

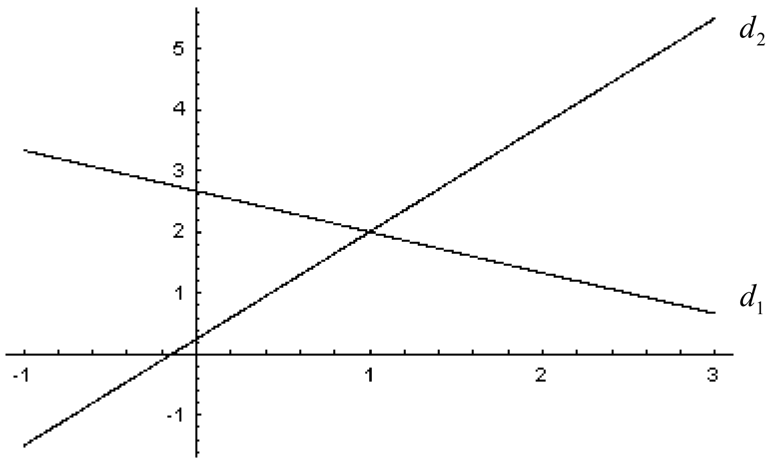
Si l'on rapporte le plan à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les équations (1) et (2) sont en fait les équations cartésiennes de deux droites, que nous notons d_1 et d_2. Résoudre le système (Σ) revient à déterminer le point d'intersection de ces deux droites. Représentons graphiquement les deux droites.

$d_1 : 2x+3y=8$

x	-2	1	4
y	4	2	0

$d_2 : 7x-4y=-1$

x	-3	1	5
y	-5	2	9



$d_1 \cap d_2 = \{I(1,2)\}$

3. Résolution générale par la méthode de Cramer

C'est le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) qui a introduit l'expression générale de la solution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. Voici sa méthode dans le cas $n = 2$.

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

- Eliminons d'abord y :

  $b'\cdot(1)$: $\quad ab'x + bb'y = cb' \quad$ (1')

  $-b\cdot(2)$: $\quad -a'bx - bb'y = -c'b \quad$ (2')

  (1') + (2') : $\quad (ab' - a'b)x = cb' - c'b$

  On peut en déduire l'expression de x, à condition que $ab' - a'b \neq 0$. Alors :

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \tag{1.1}$$

- Eliminons de la même façon x :

  $a'\cdot(1)$: $\quad aa'x + a'by = a'c \quad$ (1'')

  $-a\cdot(2)$: $\quad -aa'x - ab'y = -ac' \quad$ (2'')

  (1'') + (2'') : $\quad (a'b - ab')y = a'c - ac' \quad / \cdot(-1)$

  $\quad (ab' - a'b)y = ac' - a'c$

  Nous avons multiplié la dernière équation par –1 afin de faire précéder l'inconnue y du même coefficient que x (cf. ligne (1') + (2')). Donc si $ab' - a'b \neq 0$, on a :

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \tag{1.2}$$

Le système (Σ) admet donc une solution unique, à condition que l'expression $\Delta = ab' - a'b$ soit non nulle. Δ est appelé ***déterminant du système*** (Σ), pour la simple raison que :

$$\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

Remarquons maintenant que les numérateurs de x et de y peuvent aussi être écrits sous forme d'un déterminant. En effet :

$$\Delta_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Et de même :

$$\Delta_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Les déterminants Δ, Δ_x et Δ_y sont appelés ***déterminants de Cramer***. En résumé, ***si le déterminant du système*** Δ ***est non nul***, alors (Σ) admet la ***solution unique*** :

$$(x, y) = \left(\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \right) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \tag{1.6}$$

Règles mnémotechniques :

- Δ est formé des colonnes $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ des coefficients de x et de y du système (Σ).
- Δ_x est obtenu en remplaçant dans Δ la colonne $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ par la colonne $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.
- Δ_y est obtenu en remplaçant dans Δ la colonne $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ par la colonne $\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Exemple. Reprenons notre système du paragraphe 1.

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ 7x-4y=-1 & (2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -8-21=-29 \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -32+3=-29 \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -2-56=-58 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-29}{-29}=1 \text{ et } y=\frac{-58}{-29}=2 \qquad S=\{(1,2)\}$$

On peut se demander ce qui se passe lorsque le déterminant du système s'annule. Raisonnons géométriquement : soient d et d' les deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$. Le système (Σ) admet une ***solution unique*** si et seulement si d et d' sont ***sécantes***, i.e. se coupent en un seul point. Pour cela il faut et il suffit que les deux ***vecteurs directeurs*** de d et d' soient ***non colinéaires*** i.e. que leur déterminant soit non nul. Or :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d \\ &\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d' \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \det(\vec{u},\vec{u}')=\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -a'b+ab'=ab'-a'b=\Delta \quad !!$$

Donc : (Σ) admet une ***solution unique***

$\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont non colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{u}')\neq 0$

$\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

Si par contre $\Delta=0$ c'est-à-dire $\det(\vec{u},\vec{u}')=0$, alors les deux droites d et d' sont ***parallèles***.

- Si d et d' sont ***strictement parallèles*** alors (Σ) n'admet aucune solution : $S=\varnothing$.
- Si d et d' sont ***confondues*** ($d\cap d'=d=d'$) alors (Σ) admet une infinité de solutions ; ce sont tous les couples (x,y) vérifiant (1) ou (2) :

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, ax+by=c\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, a'x+b'y=c'\} \end{aligned}$$

Exemples.

- Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$(\Sigma_1)\quad \begin{cases} x-2y=1 & (1) \\ -2x+4y=3 & (2) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-2)\cdot(-2)=0$.

Il faut alors trancher la question si le système (Σ_1) admet une ***infinité de solutions*** ou ***aucune solution***. Multiplions la 2^e équation par $-\frac{1}{2}$: $x-2y=-\frac{3}{2}$ (2'). Nous voyons alors que les deux droites d'équations (1) et (2) sont ***strictement parallèles***. Donc : $S=\varnothing$.

- Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$(\Sigma_2)\quad \begin{cases} 3x-4y=2 & (1) \\ -\frac{3}{2}x+2y=-1 & (2) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 6-(-\frac{3}{2})\cdot(-4)=0$.

Multiplions la 2^e équation par –2 : $3x-4y=2$ (2'). Nous voyons alors que les deux équations (1) et (2) sont ***équivalentes***, i.e. que les droites d'équations (1) et (2) sont ***confondues***. Donc :

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,3x-4y=2\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,4y=3x-2\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,y=\frac{3x-2}{4}\right\} \\ &= \left\{\left(x,\frac{3x-2}{4}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Le théorème suivant résume l'étude que nous venons de faire.

Théorème. Soit le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$$

1. Si $\Delta\neq 0$ alors (Σ) admet une ***solution unique*** : $S=\left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$
2. Si $\Delta=0$ alors (Σ) admet soit une ***infinité de solutions***, soit ***aucune*** solution.

(a) Si les droites d'équations (1) et (2) sont ***strictement parallèles*** alors $S=\varnothing$

(b) Si les droites d'équations (1) et (2) sont ***confondues*** alors $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,ax+by=c\}$

4. Systèmes linéaires de n équations à n inconnues

Définition. Un ***système linéaire de 3 équations à 3 inconnues*** est un ensemble (Σ) de trois équations de la forme :

$$(\Sigma)\ \begin{cases} ax+by+cz=d & (1) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (2) \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (3) \end{cases}$$

où (x,y,z) est le ***triplet d'inconnues*** et $(a,b,c)\neq(0{,}0{,}0)$, $(a',b',c')\neq(0{,}0{,}0)$ et $(a'',b'',c'')\neq(0{,}0{,}0)$.

La méthode de Cramer pour les systèmes d'ordre 3 ne figure pas au programme de la 3^{e}. Dans l'exemple suivant, nous exposons toutefois un principe de résolution général.

Exemple et principe de résolution. Considérons le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 2x-y-3z=-6 & (1) \\ x+3y+4z=10 & (2) \\ 3x-2y-z=2 & (3) \end{cases}$$

L'idée maîtresse de la résolution consiste à remplacer (Σ) par un système ***équivalent*** [1] plus simple : on retient une seule des trois équations formant (Σ) et on remplace les deux autres par des équations renfermant seulement 2 inconnues.

Ici nous choisissons de garder l'équation (2) et d'éliminer à l'aide de cette équation l'inconnue x dans les équations (1) et (3). Eliminons d'abord x dans l'équation (1) :

$$\begin{array}{lll} & 2x-y-3z=-6 & (1) \\ -2\cdot(2): & -2x-6y-8z=-20 & (2') \\ (1)+(2'): & -7y-11z=-26 \Leftrightarrow 7y+11z=26 & (1') \end{array}$$

Eliminons de même x dans l'équation (3) :

$$\begin{array}{lll} & 3x-2y-z=2 & (3) \\ -3\cdot(2): & -3x-9y-12z=-30 & (2'') \\ (3)+(2''): & -11y-13z=-28 \Leftrightarrow 11y+13z=28 & (3') \end{array}$$

Le système (Σ) est donc équivalent au système :

$$(\Sigma')\ \begin{cases} 7y+11z=26 & (1') \\ x+3y+4z=10 & (2) \\ 11y+13z=28 & (3') \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à résoudre le sous-systeme de (Σ') formé par les équations (1') et (3') :

$$(\Sigma'')\ \begin{cases} 7y+11z=26 & (1') \\ 11y+13z=28 & (3') \end{cases}$$

Utilisons la méthode de Cramer :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}=91-121=-30 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 26 & 11 \\ 28 & 13 \end{vmatrix}=338-308=30 \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} 7 & 26 \\ 11 & 28 \end{vmatrix}=196-286=-90$$

[1] Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

D'où : $y = \dfrac{30}{-30} = -1$ et $z = \dfrac{-90}{-30} = 3$.

Finalement on remplace ces valeurs dans l'équation (2) afin de déterminer x :

$$x + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x = 10 + 3 - 12 = 1$$

Le système (Σ) admet donc une solution unique : $S = \{(1,-1,3)\}$.

Remarque. Trois cas particuliers de nature différente peuvent se présenter lors de la résolution d'un système linéaire d'ordre 3.

a) Les 3 équations formant (Σ) sont toutes équivalentes.
b) Le sous-système (Σ'') admet une infinité de solutions.
c) Le sous-système (Σ'') n'admet aucune solution.

On verra dans les exercices comment il faut se débrouiller dans chacun de ces cas.

Pour un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues le principe de résolution est semblable : on conserve l'une des équations du système et on remplace les trois autres par des équations renfermant seulement 3 inconnues. On est ainsi ramené à la résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues. On procède de façon semblable dans le cas général d'un système linéaire de n équations à n inconnues.

Exemple. Soit le système linéaire de 4 équations à 4 inconnues suivant :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ 2x + y - 2z - 3t = -3 & (2) \\ -x + 2y + z - 3t = -7 & (3) \\ 3x + 2y - z + t = 11 & (4) \end{cases}$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ \quad 3y - 4z - 5t = -5 & (2') \\ \quad y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ \quad 5y - 4z - 2t = 8 & (4') \end{cases}$$

On conserve (1) et on élimine x dans (2), (3) et (4). Remarquer que : $(2') \Leftrightarrow -2 \cdot (1) + (2)$
$(3') \Leftrightarrow (1) + (3)$
$(4') \Leftrightarrow -3 \cdot (1) + (4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ \quad y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ \quad 3y - 4z - 5t = -5 & (2') \\ \quad 5y - 4z - 2t = 8 & (4') \end{cases}$$

Le système formé par (2'), (3') et (4') a trois équations et trois inconnues : y, z et t. On conserve (3') et on élimine y dans (2') et (4').

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ \quad y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ \quad\quad -10z + t = 13 & (2'') \\ \quad\quad -14z + 8t = 38 & (4'') \end{cases}$$

Remarquer que : $(2'') \Leftrightarrow -3 \cdot (3') + (2')$
$(4'') \Leftrightarrow -5 \cdot (3') + (4')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ \quad y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ \quad\quad -10z + t = 13 & (2'') \\ \quad\quad -7z + 4t = 19 & (4''') \end{cases}$$

On a divisé l'équation (4'') par 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 1 & (1) \\ \quad y + 2z - 2t = -6 & (3') \\ \quad\quad -10z + t = 13 & (2'') \\ \quad\quad\quad 33z = -33 & (4'''') \end{cases}$$

On pourrait résoudre le système formé par (2") et (4"') par la méthode de Cramer. On préfère ici éliminer t dans (4"') pour obtenir un système triangulaire : $(4'''') \Leftrightarrow -4 \cdot (2'') + (4''')$

Le système ainsi obtenu est ***triangulaire*** : il y a 4 inconnues dans la première équation, 3 dans la 2e, 2 dans la 3e et une seule inconnue dans la dernière équation. Ce système se résoud facilement "en cascade" : la dernière équation donne $z = -1$, (2") donne ensuite $t = 3$, puis (3') donne $y - 2 - 6 = -6 \Leftrightarrow y = 2$ et finalement (1) donne $x - 2 - 1 + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
D'où : $S = \{(1,2,-1,3)\}$

Remarque. La méthode présentée ci-dessus est appelée ***méthode du pivot de Gauss*** [2]. Le pivot est par définition le ***coefficient non nul*** de l'inconnue qu'on veut éliminer, dans l'équation que l'on conserve. Pour le système de l'exemple ci-dessus, le pivot est toujours 1 : c'est d'abord le coefficient de x dans (1), puis le coefficient de y dans (3') et enfin le coefficient de t dans (2").

[2] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fut l'un des mathématiciens les plus brillants de tous les temps.