CHAPITRE 2 : EQUATIONS ET INEQUATIONS

Partie A : Equations

1. Equations polynomiales

Définition. Une ***équation polynomiale*** d'inconnue x est une équation de la forme $p(x)=0$, où p est un polynôme de degré ≥ 1. Le degré de l'équation polynomiale est par définition le degré du polynôme p. Une solution de l'équation $p(x)=0$ est appelée ***racine du polynôme*** p.

Retenons : ***résoudre*** l'équation $p(x)=0$ revient à ***rechercher les racines*** du polynôme p.

Exemples.

- Voici une équation polynomiale de degré 2 :

$$\begin{aligned} & x^2-9=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)(x+3)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x-3=0 \text{ ou } x+3=0 \\ \Leftrightarrow\ & x=3 \text{ ou } x=-3 \end{aligned}$$

Règle du produit nul :
$ab=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$

  L'**ensemble de solutions** de cette équation est : $S=\{-3,3\}$

  Les solutions -3 et 3 sont les racines du polynôme $p(x)=x^2-9$.

- L'équation $x^3+4x^2-4x+5=0$ est polynomiale de degré 3.
- ***Attention*** : l'équation $x(x+1)=x^2+3x+2$ n'est pas, comme on pourrait le croire ***à priori***, du 2^{e} degré. En effet, après réduction des termes semblables, on constate qu'elle est du 1er degré :

$$\begin{aligned} & x(x+1)=x^2+3x+2 \\ \Leftrightarrow\ & \cancel{x^2}+x=\cancel{x^2}+3x+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=3x+2 \\ \Leftrightarrow\ & 0=2x+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=-1 \end{aligned}$$

Avant de déterminer le degré d'une équation polynomiale, il faut ***réduire les termes semblables***.

Remarque. Il est important d'identifier le degré d'une équation polynomiale avant de la résoudre. En effet, la méthode de résolution en dépend considérablement.

Le théorème suivant, que nous admettons, constitue un résultat important sur le ***nombre de solutions*** d'une équation polynomiale.

Théorème. Une équation polynomiale de degré $n \geq 1$ a ***au plus*** n solutions.

Exemples. Une équation du 2^{e} degré a donc soit 2 solutions, soit 1 solution, soit aucune solution. Montrons que toutes les situations sont possibles.

- $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$. Cette équation a 2 solutions distinctes.
- $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$. Cette équation a 1 solution.
- $x^2=-1$ est impossible car un ***carré est toujours positif***.
  Cette équation n'a donc pas de solution.

2. Equations du 1er degré

Définition. Une ***équation du 1^er^ degré*** d'inconnue x est une équation de la forme (ou équivalente à) $ax+b=0$, où a et b sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. Si $a=0$ alors le terme ax s'annule et l'équation n'est pas du 1er degré.

Théorème. Toute équation du 1er degré a exactement une solution .

Démonstration. Soit $ax+b=0$ une équation du 1er degré, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\in \mathbb{R}$. On a :

$$ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}.$$

Cette équation a donc une solution unique : $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemples et contre-exemples.

- $2x+6=0$

  $\Leftrightarrow 2x=-6$

  $\Leftrightarrow x=-3$

- $\frac{x}{2}-3=2(x+1) \quad / \cdot 2$

  $\Leftrightarrow x-6=4(x+1)$

  $\Leftrightarrow x-6=4x+4$

  $\Leftrightarrow x-4x=6+4$

  $\Leftrightarrow -3x=10 \quad / \div(-3)$

  A partir de cette ligne, on est sûr qu'il s'agit d'une équation du 1er degré.

  $\Leftrightarrow x=-\frac{10}{3}$

- $\frac{x}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{x+5}{6}$

  $\Leftrightarrow \frac{3x}{6}-\frac{2x+2}{6}=\frac{x+5}{6} \quad / \cdot 6$

  Est-ce une équation du 1er degré ?

  

  $\Leftrightarrow 3x-2x-2=x+5$

  $\Leftrightarrow x-2=x+5$

  $\Leftrightarrow x-x=5+2$

  $\Leftrightarrow 0 \cdot x=7$

  Non, car les monômes du 1er degré disparaissent au cours de la réduction !

  $\Leftrightarrow 0=7$

  $S=\varnothing$

- $(x-1)^2+2(x-1)=x^2-1$

  Est-ce une équation du 2e degré ?

  $(x-1)^2+2(x-1)=x^2-1$

  $\Leftrightarrow x^2-2x+1+2x-2=x^2-1$

  $\Leftrightarrow \cancel{x^2}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1+1=0$

  Non, car les carrés disparaissent ; mais l'équation n'est pas non plus du 1er degré car les termes du 1er degré se détruisent aussi !

  $\Leftrightarrow 0=0$

  $S=\mathbb{R}$

3. Equations du 2e degré

A) Forme canonique, factorisation et racines d'un trinôme du second degré

> ***Définition***. Une ***équation du 2^e^ degré*** d'inconnue x est une équation de la forme (ou équivalente à) $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. Si $a=0$ alors le terme ax^2 s'annule et l'équation n'est pas du 2^e^ degré.

Exemples.

- $x^2=4 \qquad (1)$

  $\Leftrightarrow x^2-4=0$

  $\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

  $\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0$

  $\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

  $S=\{2,-2\}$

  > $p(x)=x^2-4$ est un produit remarquable.

- Dans le cas particulier $c=0$ on peut toujours résoudre l'équation en mettant x en évidence. Par exemple : $2x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(2x+6)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $2x+6=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-3$

  $S=\{0,-3\}$

- $x^2=3+2x \qquad (2)$

  $\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

  $\Leftrightarrow x^2-2x+1-1-3=0$

  $\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-4=0$

  $\Leftrightarrow (x-1)^2-4=0$

  $\Leftrightarrow (x-1-2)(x-1+2)=0$

  $\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$

  $\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+1=0$

  $\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-1$

  $S=\{3,-1\}$

  > $p(x)=x^2-2x-3$ n'est pas un produit remarquable.

  > Mais x^2-2x est le ***début d'un trinôme carré parfait***. D'où l'idée d'ajouter le carré manquant $(+1)$ et de le retrancher ensuite (-1) ; dans la ligne suivante, on regroupe convenablement les termes, ce qui conduit à une ***différence de 2 carrés***. Cette méthode est appelée ***méthode du complément quadratique***.

- $4x^2-4x+3=0 \qquad (3)$

  $\Leftrightarrow 4x^2-4x+1-1+3=0$

  $\Leftrightarrow \underbrace{(2x-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{2}_{>0}=0$

  $S=\varnothing$

  > $p(x)=4x^2-4x+3$ ne peut pas être factorisé car c'est une ***somme de 2 carrés***. ($2=\sqrt{2}^2$)
  >
  > ***a^2+b^2 ne se factorise pas !***

La méthode du complément quadratique, appliquée dans les deux derniers exemples aboutit a deux résultats totalement différents. L'équation (2) admet 2 solutions distinctes tandis que l'équation (3) n'admet aucune solution. En effet le polynôme dans l'équation (2) peut être factorisé en deux facteurs du premier degré contrairement au polynôme dans l'équation (3).

A quelle condition le polynôme $p(x)=ax^2+bx+c$ peut-il être factorisé ? Le théorème suivant permettra de donner une réponse précise à cette question.

Proposition et définition. Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme (trinôme) du second degré. Il existe deux constantes u et v telles que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ p(x) = a(x-u)^2 + v$. Cette écriture est appelée **_forme canonique_** de $p(x)$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R})\quad p(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \qquad (a \neq 0) \\
&= a\left(\underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{grouper}} \underbrace{- \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}}_{\text{grouper}}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac \\
&= a(x-u)^2 + v \quad \text{avec } u = -\frac{b}{2a} \text{ et } v = -\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}
$$

Définition. Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **_discriminant_** du trinôme $p(x)$.

Pour **_factoriser_** $p(x)$, remettons a en évidence : $p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

1er cas : $\Delta > 0$

Alors :

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

D'après la règle du produit nul, le polynôme p admet **_deux racines distinctes_**, à savoir :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La factorisation de $p(x)$ est donc :

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

2e cas : $\Delta = 0$

Alors on a : $$p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Il en résulte que le polynôme p admet ***une racine unique*** (appelée encore ***racine double***), à savoir :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (= x_1 = x_2)$$

La factorisation de $p(x)$ est :

$$p(x) = a\left(x - x_0\right)^2$$

3e cas : $\Delta < 0$

Alors :

$$p(x) = a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{>0}\right] \neq 0.$$

Il en résulte que ***l'équation*** $p(x) = 0$ ***n'admet pas de solution*** et qu'il est impossible d'écrire $p(x)$ comme produit de deux polynômes du premier degré.

Le théorème suivant résume notre étude.

Théorème du second degré. Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors p admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

  La factorisation de $p(x)$ est : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$ alors p admet une racine double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

  La factorisation de $p(x)$ est : $p(x) = a\left(x - x_0\right)^2$

- Si $\Delta < 0$ alors p n'admet pas de racine et $p(x)$ ne se factorise pas.

Exemples :

- Reprenons le polynôme de l'équation (2) : $p(x) = x^2 - 2x - 3$. ($a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$)

Le discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$.

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$.

- Reprenons le polynôme de l'équation (3) : $p(x) = 4x^2 - 4x + 3$. ($a = 4$, $b = -4$ et $c = 3$)

Le discriminant est : $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -32 < 0$. Ce polynôme n'a donc pas de racine.

Remarque : Lorsque $ac < 0$, c.-à-d. lorsque ***a* et *c* sont de signes contraires**, alors $4ac < 0$ et donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On peut alors affirmer immédiatement que l'équation a deux racines distinctes.

B) Propriétés des racines de $ax^2 + bx + c$

Théorème de Viète [1] : ***somme et produit des racines d'un polynôme du second degré***.

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$) admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues, c.-à-d. $\Delta \geq 0$),

- leur ***somme*** $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- leur ***produit*** $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

De plus : $ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P)$

Remarque : Lorsque $\Delta = 0$, la somme des racines S est par définition : $S = x_0 + x_0 = 2x_0$ et le produit est $P = x_0 \cdot x_0 = x_0{}^2$.

Démonstration :

Soient $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les racines de $ax^2 + bx + c$. Nous obtenons :

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2$$

$$= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Il en résulte que : $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - Sx + P)$

Exemple : Soit le trinôme $4x^2 + 5x + 1$ ($a = 4$, $b = 5$, $c = 1$). D'après le théorème de Viète : $S = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{4}$ et $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$.

Comme $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 > 0$, le trinôme admet deux racines, à savoir $x_1 = \frac{-5-3}{2\cdot 4} = -1$ et $x_2 = \frac{-5+3}{2\cdot 4} = -\frac{1}{4}$. Donc effectivement $x_1 + x_2 = -\frac{5}{4}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}$

[1] François Viète : mathématicien français (1540-1603)

Remarque importante :

Si on arrive à trouver une racine évidente d'une équation du second degré, le théorème de Viète permet de ***calculer rapidement l'autre sans passer par le discriminant***.

Exemple. Résoudre l'équation suivante sans passer par le discriminant : $2x^2 - 5x + 3 = 0$

___ est racine évidente car __________________________

Pour trouver la 2e racine , on utilise la formule $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ou $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

____

____

C) Recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit

Théorème : Soient *S* et *P* des réels donnés.

1) Deux réels *u* et *v* vérifient le système

$$\begin{cases} u + v = S \\ u \cdot v = P \end{cases} \qquad (*)$$

si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

2) Le système $(*)$ possède une solution si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$.

Démonstration :

1) $\boxed{\Rightarrow}$ Hypothèse : *u* et *v* vérifient $(*)$. Thèse : *u* et *v* sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

Preuve : *u* et *v* sont solutions de l'équation $(x - u)(x - v) = 0$

$\Rightarrow$ *u* et *v* sont solutions de l'équation $x^2 - vx - ux + uv = 0$

$\Rightarrow$ *u* et *v* sont solutions de l'équation $x^2 - (u + v)x + uv = 0$

$\Rightarrow$ *u* et *v* sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

(puisque par hypothèse $u + v = S$ et $uv = P$)

$\boxed{\Leftarrow}$ Hypothèse : *u* et *v* sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$. Thèse : *u* et *v* vérifient (*).

Preuve : Comme *u* et *v* sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, nous avons, d'après le théorème de Viète : $u + v = -\frac{-S}{1} = S$ et $uv = \frac{P}{1} = P$. Les réels *u* et *v* vérifient ainsi le système (*).

2) Le système (*) possède une solution

$\Leftrightarrow$ l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ possède une solution, d'après 1)

$\Leftrightarrow \Delta = S^2 - 4P \geq 0$, d'après le théorème du second degré.

Exemples :

1) Chercher deux réels u et v tels que : $\begin{cases} u+v=12{,}5 \\ u\cdot v=25 \end{cases}$

2) Chercher deux réels u et v tels que : $\begin{cases} u+v=1 \\ u\cdot v=2 \end{cases}$

D) *Signe des racines de ax^2+bx+c*

Théorème : Soit $ax^2+bx+c=0$ (avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b,c\in\mathbb{R}$) un polynôme du second degré admettant au moins une racine (c.-à-d. avec $\Delta\geq 0$). Soit S la somme et P le produit des racines.

Cas 1 : Si $P>0$, alors les racines ont même signe (et sont non nulles).

a) Si $S>0$, alors les racines sont positives.

b) Si $S<0$, alors les racines sont négatives.

c) $S=0$ est impossible dans ce cas.

Cas 2 : Si $P=0$, alors au moins une des racines est 0 et l'autre a le signe de S.

Cas 3 : Si $P<0$, alors les racines ont des signes opposés (et sont non nulles).

Exemple :

Etudier le signe des racines (s'il en existe) du trinôme $3x^2+5x-14$, sans calculer ces racines.

4. Equations de degré ≥ 3

Si $p(x)$ est un polynôme de degré $n \geq 3$, alors on commence par chercher une ***racine évidente (entière)*** du polynôme. Pour cela on rappelle le résultat suivant, vu en 4e :

Théorème 1. Soit $p(x)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ ***à coefficients entiers*** : $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$$ Si $u \in \mathbb{Z}$ est une racine entière de $p(x)$, alors u divise a_0 (terme constant).

Démonstration.

$u \in \mathbb{Z}$ est racine de $p(x)$

$\Rightarrow p(u) = 0$

$\Rightarrow a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \ldots a_1 u + a_0 = 0$

$\Rightarrow u\left(a_n u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \ldots a_1\right) = -a_0$

$\Rightarrow u$ est un diviseur de a_0.

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$x^3 - 2x^2 + x - 12 = 0 \qquad (*)$$

On doit chercher une racine évidente du polynôme $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$.

Ici : $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = 1, a_0 = -12$.

- $\text{Div}(-12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$
- $p(1) = 1 - 2 + 1 - 12 \neq 0$
- $p(2) = 8 - 8 + 2 - 12 \neq 0$
- $p(3) = 27 - 18 + 3 - 12 = 0$

Donc 3 est racine évidente de $p(x)$ et solution de l'équation. On sait alors que $p(x)$ est divisible par $x - 3$. En effet, on vu en 4e le théorème suivant (corollaire de la loi du reste) :

Théorème 2. Soit $p(x)$ un polynôme et a un nombre réel. $$a \text{ est racine de } p(x) \Leftrightarrow p(x) \text{ est divisible par } (x-a)$$

Poursuivons la résolution de l'équation (*). Il faut diviser $p(x)$ par $x - 3$.

Schéma de Horner :

	1	-2	1	-12
3		3	3	12
	1	1	4	0

Donc : $p(x) = (x-3)\left(x^2 + x + 4\right)$. Pour trouver les autres solutions de (2.8), il reste à déterminer les racines du trinôme $q(x) = x^2 + x + 4$. Or $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$, donc $q(x)$ n'admet pas de racine. Ainsi l'ensemble de solutions de (*) se réduit à $S = \{3\}$.

5. Equation $x^n = a$

a) *Cas* $\boxed{n=2}$:

Nous savons depuis la 4e que :

- Si $a>0$ alors : $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Si $a=0$ alors : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Si $a<0$ alors : $x^2 = a$ est impossible car un carré est toujours ≥ 0

Exemples :

- $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$, donc $S = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$
- $x^2 = -7$ est impossible : $S = \varnothing$
- $-2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, donc $S = \{\pm 2\}$

b) *Cas* $\boxed{n=3}$

Nous admettons que pour tout réel a (donc ***aussi pour les réels*** <0), l'équation $x^3 = a$ admet une ***solution unique***, appelée ***racine cubique de*** a et notée $\sqrt[3]{a}$. Donc :

$$\boxed{(\forall a \in \mathbb{R}) \quad x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}}$$

Exemples :

- $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$, donc $S = \{2\}$
- $x^3 = -125 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-125} = -5$, donc $S = \{-5\}$
- $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{0} = 0$, donc $S = \{0\}$
- $x^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} \approx 1.817120592832139...$ (nombre irrationnel), donc $S = \left\{\sqrt[3]{6}\right\}$
- $64x^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{27}{64} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{27}{64}} = \dfrac{3}{4}$, donc $S = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

c) *Cas* $\boxed{n \text{ pair } \geq 4}$, analogue au cas $n=2$: pour tout réel $a>0$, l'équation $x^n = a$ admet ***deux solutions opposées***, la solution positive étant appelée ***racine ne de*** a et notée $\sqrt[n]{a}$.

$(\forall n \geq 2 \text{ pair} \in \mathbb{N})$:

- Si $a>0$ alors : $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$
- Si $a=0$ alors : $x^n = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{0} = 0$
- Si $a<0$ alors : $x^n = a$ est impossible car si n est pair alors x^n est toujours ≥ 0

Exemples :

- $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$ ou $x = -\sqrt[4]{16} = -2$, donc $S = \{-2, 2\}$
- $x^6 = 3^{12} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{3^{12}} = 3^2 = 9$ ou $x = -\sqrt[6]{3^{12}} = -9$, donc $S = \{-9, 9\}$
- $x^8 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[8]{10} \approx 1.33352143216...$ ou $x = -\sqrt[8]{10}$, donc $S = \left\{\pm\sqrt[8]{10}\right\}$
- $x^4 = -12$ est impossible, $S = \varnothing$

d) *Cas* $\boxed{n \text{ impair } \geq 5}$, analogue au cas $n=3$: pour tout réel a (donc ***aussi pour les réels*** <0), l'équation $x^n = a$ admet une ***solution unique***, appelée ***racine n^e de*** a et notée $\sqrt[n]{a}$.

$$\boxed{(\forall n \geq 3 \text{ entier impair})(\forall a \in \mathbb{R}) \quad x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}}$$

Exemples :

- $x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$, donc $S = \{2\}$
- $x^7 = 3^{42} \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{3^{42}} = 3^6$ car $(3^6)^7 = 3^{42}$, donc $S = \{3^7\}$
- $x^9 = -40 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{-40} \approx 1.33352143216...$ ou $x = -\sqrt[8]{10}$, donc $S = \{\pm\sqrt[8]{10}\}$
- $x^4 = -12$ est impossible, $S = \varnothing$

Remarque :

- Si n est impair alors $\boxed{\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}}$, par exemple : $\sqrt[9]{-40} = -\sqrt[9]{40}$
- Si n est pair, alors $\sqrt[n]{a}$ existe uniquement si $a \geq 0$ et dans ce cas $\sqrt[n]{a} \geq 0$, par exemple $\sqrt[4]{-6}$ n'existe pas !

6. Equations rationnelles (c.-à-d. contenant l'inconnue au dénominateur)

Méthode :

1. Ecrire les ***conditions d'existence*** : une fraction existe si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas. Le ***domaine de l'équation*** est l'ensemble des réels pour lesquels l'équation a un sens.
2. Mettre toutes les fractions sur un dénominateur commun.
3. Multiplier l'équation par ce dénominateur commun pour se ramener à une équation polynomiale.
4. Résoudre l'équation polynomiale. ***Attention*** : une solution de l'équation polynomiale est solution de l'équation rationnelle donnée si et seulement si elle appartient au domaine de celle-ci.

Exemple.

- $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{4x}{x^2-4}$

$$\boxed{\frac{a}{b} \text{ existe} \Leftrightarrow b \neq 0}$$

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$$

Attention :

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **ou** $b = 0$

$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ **et** $b \neq 0$

Domaine : $D = \mathbb{R} \setminus \{0,2,-2\}$

$(\forall x \in D)$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{4x}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2}{x(x-2)(x+2)} \quad / \cdot x(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-4) + x^2 + 2x = 4x^2$$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 12 + x^2 + 2x = 4x^2$

$\Leftrightarrow 2x = 12$

$\Leftrightarrow x = 6 \in D$

$S = \{6\}$

La solution est bien dans le domaine de l'équation initiale.

7. Equations irrationnelles (i.e. contenant des radicaux)

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$\sqrt{1-x} = 2x+1$$

On commence par déterminer le domaine de l'équation.

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \\ 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \text{ existe} \Leftrightarrow a \geq 0$$

$$\sqrt{a} = b \Rightarrow b \geq 0$$

Donc : $D = \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$

$(\forall x \in D)$

$\sqrt{1-x} = 2x+1 \qquad / \ (\ )^2$

$\Leftrightarrow 1-x = (2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 1-x = 4x^2 + 4x + 1$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(4x+5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4x+5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \cancel{x = -\dfrac{5}{4}}$

$S = \{0\}$

On a le droit d'élever au carré les deux membres d'une équation ***à condition qu'ils soient de même signe.*** En particulier :

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}_+) \ \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$$

La solution $x = -\dfrac{5}{4}$ est à exclure car elle n'est pas dans le domaine de l'équation.

Partie B : Inéquations

1. Rappel : Etude du signe d'un binôme du 1er degré

Tableau du signe du binôme $ax+b$ ***lorsque*** $a>0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b,\ a>0$	$-$	0	$+$

Tableau du signe du binôme $ax+b$ ***lorsque*** $a<0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b,\ a<0$	$+$	0	$-$

Remarque. Il faut bien distinguer entre les cas $a>0$ et $a<0$. Retenons que ***le signe de a se trouve toujours à droite dans le tableau***.

Exemple : Etude du signe de $-\frac{x}{2}+3$.

Ce binôme s'annule pour $x=6$. La constante a est égale à $-\frac{1}{2}<0$, d'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-\frac{x}{2}+3$	$+$	0	$-$

2. Inéquations du 2e degré

Exemple. Soit l'inéquation du 2e degré : $4x^2 \geq 9$. Comme dans le cas des équations, on commence par transporter tous les termes dans un membre, puis on factorise le membre non nul.

$$\begin{aligned}
&4x^2 \geq 9 \\
&\Leftrightarrow 4x^2-9 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3) \geq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Il faut ensuite étudier le ***signe du produit*** $(2x-3)(2x+3)$. Rappelons à cette occasion que :

Un produit de deux facteurs est ***positif*** ssi les deux facteurs ont ***même signe.***

$$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

Un produit de deux facteurs est ***négatif*** ssi les deux facteurs ont des ***signes opposés.***

$$a \cdot b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

En particulier : $(\forall a \in \mathbb{R})\ a^2 \geq 0$

Revenons à notre exemple. Etudions d'abord le signe des deux binômes $2x-3$ et $2x+3$.

- $2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$

- $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$

D'où le ***signe du produit (2x-3)(2x+3)***:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

D'après$(*)$, on cherche les x tels que le produit $(2x-3)(2x+3)$ soit positif ou nul.

Donc : $S=\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$.

Remarque : Le tableau du signe précedent permet de résoudre d'autres inéquations. Par exemple :

- $4x^2>9 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$
- $4x^2\leq 9 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$
- $4x^2<9 \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right[$

Généralisons : Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré. Pour résoudre une inéquation du type $p(x) \geq 0$ ou $p(x) \leq 0$, il faut étudier le signe de $p(x)$.

1^er^ cas : $\Delta > 0$

Alors on a : $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes de $p(x)$. Dans la suite nous supposons que $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$p(x)$ si $a > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$
$p(x)$ si $a < 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

En résumé :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$p(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

On retiendra la règle générale :

$$ax^2 + bx + c \text{ a le signe de } a \text{ sauf entre les racines} \quad \text{(i)}$$

Exemple. Soit à résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 5 > 0$. Etudions le signe de $p(x) = 2x^2 - 3x - 5$.
On a : $\Delta = 9 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49$. Donc $p(x)$ admet deux racine distinctes :

$$x_1 = \frac{3-7}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$$

Voici le tableau du signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation est : $S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

2^e cas : $\Delta = 0$

Alors on a $p(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de $p(x)$.
Le carré $(x - x_0)^2$ est toujours positif. D'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$(x - x_0)^2$	$+$	0	$+$
$p(x)$ si $a > 0$	$+$	0	$+$
$p(x)$ si $a < 0$	$-$	0	$-$

En résumé :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$(x - x_0)^2$	$+$	0	$+$
$p(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$

Remarquons que la règle (i) est toujours valable. En effet, comme il y a une seule racine, la région « entre les racines » n'existe pas. Voilà pourquoi $p(x)$ a toujours le signe de a, sauf pour $x = x_0$ où $p(x)$ s'annule.

Exemple. Etudions le signe du trinôme $p(x) = -9x^2 + 12x - 4$.
On a : $\Delta = 144 - 4 \cdot (-9) \cdot (-4) = 0$ et $x_0 = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$.
D'où le tableau du signe de p(x) :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-9x^2 + 12x - 4$	$-$	0	$-$

Remarque. On aurait pu déduire ce tableau du fait (élémenatire) que $p(x) = -(3x-2)^2$.

D'où :

- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 < 0$ admet comme solutions : $S = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 \leq 0$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.
- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 > 0$ n'a pas de solution : $S = \varnothing$.
- L'inéquation $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0$ a une solution unique : $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

<u>*3^e cas*</u> **: $\Delta < 0$**

D'après le résultat de la page 5 :

$$p(x) = a\underbrace{\left[\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{>0}\right]}_{>0}.$$

Il en résulte que $p(x)$ a toujours le signe de a.

x	$-\infty$	$+\infty$
$p(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	

Exemple. Le trinôme $x^2 + x + 5$ est toujours > 0. En effet : $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$ et $a = 1 > 0$. D'où :

- L'inéquation $x^2 + x + 5 > 0$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.
- L'inéquation $x^2 + x + 5 \geq 0$ est toujours vraie : $S = \mathbb{R}$.
- Les inéquations $x^2 + x + 5 < 0$ et $x^2 + x + 5 \leq 0$ n'ont pas de solution : $S = \varnothing$.

Règle générale :
Le ***signe d'un trinôme*** $ax^2 + bx + c$ du second degré est partout le signe de a, sauf entre les racines (si elles existent).

3. Inéquations de degré ≥ 3

<u>***Méthode***</u> :

1. Transporter tous les termes dans un membre.
2. Factoriser le membre non nul en facteurs du 1er ou du 2e degré.
3. Etablir le tableau du signe du produit.
4. Ecrire l'ensemble de solutions de l'inéquation.

Exemples.

$x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) + (x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) \geq 0 \ (*)$

Remarquons que $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 + 1 > 0$. D'où le tableau du signe suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$(x+1)(x^2+1)$	$-$	0	$+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation est donc : $S = [-1, +\infty[$.

- Il arrive qu'un facteur soit présent avec un exposant supérieur à 1. Par exemple :

$$4x^3 - 4x^2 - x > 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(4x^2 - 4x - 1\right) > 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(2x - 1\right)^2 > 0$$

Remarquons que le ***carré*** $(2x-1)^2$ est toujours ≥ 0. Il s'annule lorsque $2x-1=0$, c.-à-d. lorsque $x = \frac{1}{2}$. D'où le tableau du signe :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x(2x-1)^2$	$-$	0	$+$	0	$+$

L'ensemble de solutions est : $S = \left]0,+\infty\right[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Dans d'autres exemples des facteurs peuvent apparaître avec l'exposant 3, 4 ou plus. On pourra donc réfléchir à la question importante : quel est le signe de a^3, de a^4, de a^5 etc. Quelle est la règle générale ?

4. Inéquations rationnelles (avec l'inconnue au dénominateur)

- Finalement, nous traitons un exemple où l'inconnue figure au dénominateur.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{1}{x} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \leq 0$$

Tous les termes sont transportés dans le premier membre.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2(x-1)} - \frac{2(x-1)}{x^2(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x^2(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+2}{x^2(x-1)} \leq 0$$

Le premier membre est factorisé !

Attention. La méthode diffère fondamentalement de la résolution d'une équation quant au point suivant : ***on ne peut pas ici éliminer le dénominateur commun*** par multiplication. En effet nous savons que si l'on multiplie une inéquation par un réel, le sens de l'inéquation change ou se conserve, suivant le signe de ce réel. Or : le signe de $x^2(x-1)$ ***n'est pas constant***, car $x-1$ change de signe en $x=1$.

Voilà pourquoi les facteurs du dénominateur apparaissent également dans le tableau du signe.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$-x+2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-x+2}{x^2(x-1)}$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

$S = \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,1\right[\cup \left[2,+\infty\right[$.

Les ***doubles barres*** dans la dernière ligne du tableau signifient que pour $x=0$ et $x=1$ la fraction n'existe pas.