CHAPITRE 4

Fonctions affines

1. Définitions et exemples

Définition. Une fonction *f* est dite ***affine*** s'il existe deux réels a et b tels que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ f(x) = ax + b$$

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, on dit que la fonction affine est ***linéaire*** : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ f(x) = ax$.
- Si $a = 0$, on dit que la fonction affine est ***constante*** : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ f(x) = b$.

Remarques.

- Le domaine d'une fonction affine est égal à l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Les fonctions affines sont en fait les fonctions du ***premier degré***.
- a est appelé ***coefficient de linéarité*** de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.
- La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ admet pour équation : $y = ax + b$. On reconnaît l'équation d'une ***droite*** de coefficient directeur a et d'ordonnée à l'origine b.

Exemples.

- $f : x \mapsto 2x - 3$ est affine avec $a = 2$ et $b = -3$.
- $g : x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est affine avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$. C'est donc une fonction linéaire.
- $h : x \mapsto \dfrac{3}{5}$ est affine avec $a = 0$ et $b = \dfrac{3}{5}$. C'est donc une fonction constante.
- $k : x \mapsto \dfrac{1-4x}{3}$ est affine avec $a = -\dfrac{4}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Contre-exemples.

- $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2x} + 3$ n'est pas affine (variable au dénominateur).
- $g' : x \mapsto 3\sqrt{x} - 8$ n'est pas affine (variable sous le radical).
- $h' : x \mapsto 2x^2 - 5$ n'est pas affine (variable élevée au carré, fonction du second degré).

2. Sens de variation et représentation graphique

Proposition. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- La ***courbe représentative*** de *f* est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1, a)$ et passant par le point aux coordonnées $(0, b)$. En particulier, si $b = 0$, c.-à-d. si *f* est ***linéaire***, alors cette droite passe par l'origine.
- Le ***sens de variation*** de *f* dépend du signe de a :

  Si $a > 0$ alors *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Si $a < 0$ alors *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

  Si $a = 0$ alors *f* est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Evidente.

A titre de curiosité, calculons le taux de variation de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

$$\begin{aligned}(\forall x \neq x' \in \mathbb{R})\ \ T_f(x, x') &= \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \\ &= \frac{ax' + b - ax - b}{x' - x} \\ &= \frac{a(x' - x)}{x' - x} \\ &= a\end{aligned}$$

Ce résultat conduit évidemment à la même proposition que ci-dessus.

3. Fonctions affines par morceaux

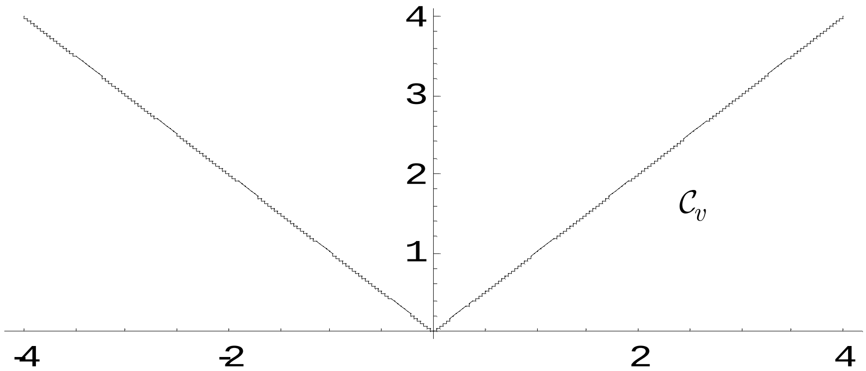
Définition. Une fonction *f* est ***affine par morceaux*** (ou ***affine par intervalles***), si sa représentation graphique est une réunion de segments ou de demi-droites.

Exemple 1.
Considérons la fonction valeur absolue $v : x \mapsto |x|$.

- Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R}$.
- De plus la fonction est paire. En effet : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ v(-x) = |-x| = |x| = v(x)$. La représentation graphique de *v* est donc symétrique par rapport à (Oy) .
- Or : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ \ v(x) = |x| = x$. La fonction *v* coïncide donc sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction $x \mapsto x$, qui est affine et strictement croissante (coefficient directeur 1).
- De même : $(\forall x \in \mathbb{R}_-)\ \ v(x) = |x| = -x$. La fonction *v* coïncide donc sur $\mathbb{R}_-$ avec la fonction $x \mapsto -x$, qui est affine et strictement décroissante (coefficient directeur -1).
- D'où le tableau de variation de *v* :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

- La fonction *v* est affine par morceaux, puisque sa représentation graphique est réunion de deux demi-droites :



Exemple 2. On définit la ***partie entière*** d'un réel x de la façon suivante : c'est l'unique nombre entier n tel que $n \le x < n+1$. On note $\mathrm{Ent}(x)$ la partie entière de x. Par exemple :

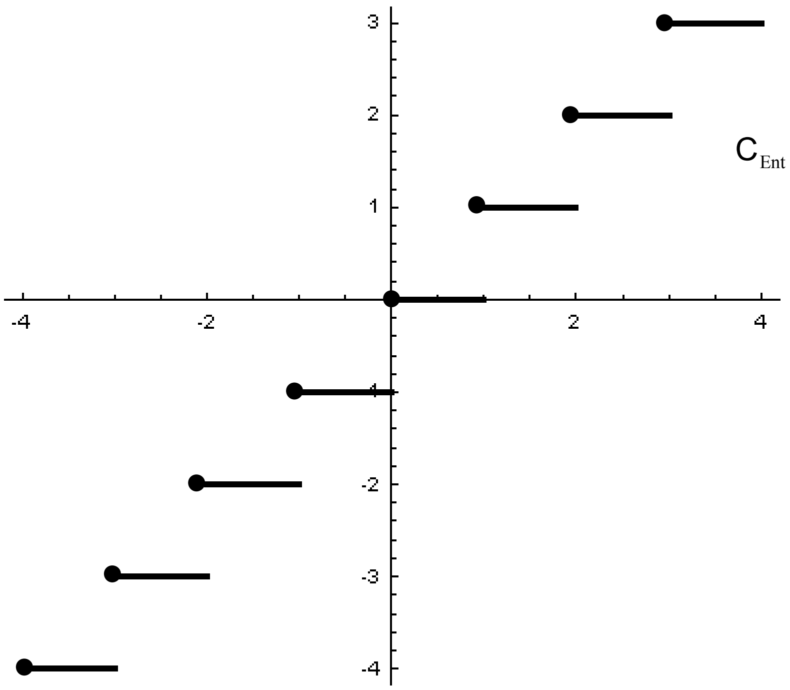
- $\mathrm{Ent}(6{,}342) = 6$ car $6 \le 6{,}342 < 7$
- $\mathrm{Ent}(6) = 6$ car $6 \le 6 < 7$
- $\mathrm{Ent}(0{,}82) = 0$ car $0 \le 0{,}82 < 1$
- $\mathrm{Ent}(-3{,}5) = -4$ car $-4 \le -3{,}5 < -3$
- $\mathrm{Ent}(-3) = -3$ car $-3 \le -3 < -2$

En général, $\mathrm{Ent}(x)$ est le plus grand entier qui est $\le x$.

Considérons maintenant la ***fonction partie entière*** $\mathrm{Ent} : x \mapsto \mathrm{Ent}(\mathrm{x})$. Quelle est la représentation graphique de cette fonction ? Remarquons que si n est un entier quelconque, alors :

$$(\forall x \in [n, n+1[)\ \ \mathrm{Ent}(x) = n \tag{4.1}$$

Cette relation montre que la fonction Ent est constante sur tous les intervalles de la forme $[n, n+1[$. Non seulement, Ent est une fonction affine par morceaux, mais une ***fonction constante par morceaux***. Voici le graphique de cette fonction :



On dit souvent que Ent est une fonction en escalier. La raison devrait être claire…