

CHAPITRE 5

Fonctions trinômes du 2^e degré

1. Trinômes du second degré

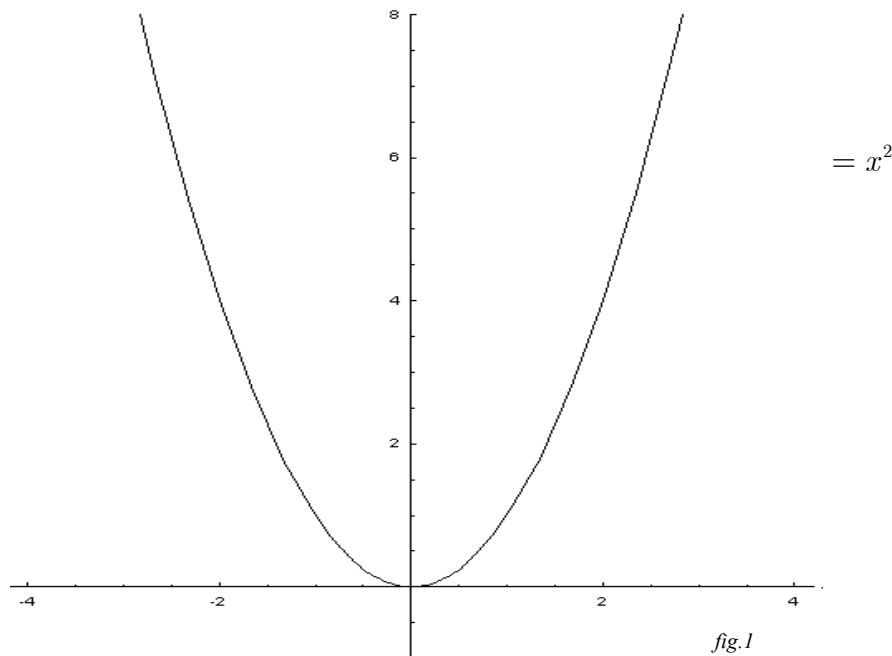
Définition. On appelle trinôme du second degré toute fonction du type $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. On doit imposer que $a \neq 0$ pour que f soit bien du second degré.

Exemples.

- $f: x \mapsto 3x^2 - 2x + 7$ $a = 3, b = -2, c = 0$
- $g: x \mapsto 4 - x^2$ $a = -1, b = 0, c = 4$
- $h: x \mapsto x(1 - x)$ $a = -1, b = 1, c = 0$
- $k: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - 5$ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = -5$

Le trinôme du second degré le plus simple est $p_1: x \mapsto x^2$. La représentation graphique de ce trinôme est la **parabole** d'équation $y = x^2$. Voici cette courbe, tracée dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) :

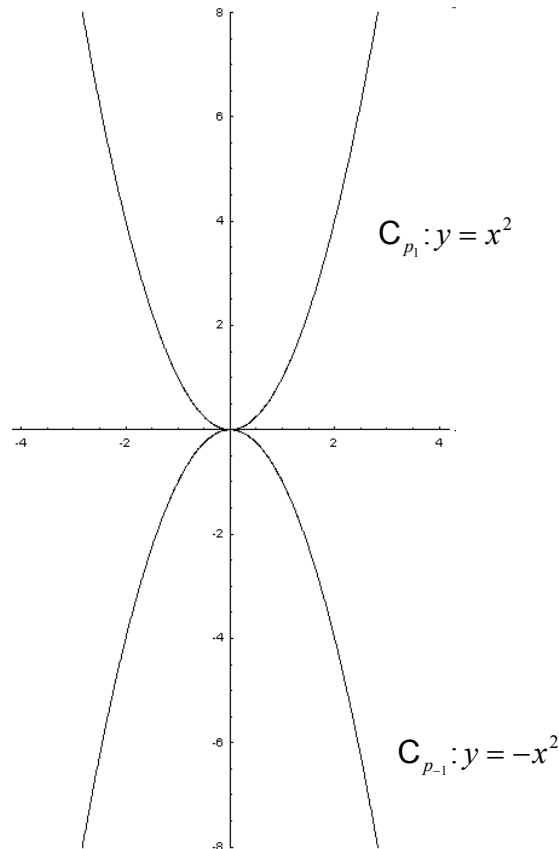


Le but de ce chapitre est de prouver que la courbe représentative de toute fonction trinôme du second degré est une parabole. Donnons à ce terme un sens précis.

Définition. Une parabole est une courbe d'équation $Y = X^2$ dans un repère (O, \vec{I}, \vec{J}) du plan cartésien.

2. Etude des fonctions $p_a: x \mapsto ax^2$ avec $a \neq 0$

- Au paragraphe précédent, on a représenté la fonction $p_1: x \mapsto x^2$.
- Remarquons que la courbe représentative de $p_{-1}: x \mapsto -x^2$ s'obtient à partir de celle de p_1 par la symétrie orthogonale d'axe (Ox) .



Ce résultat se généralise aisément :

Proposition. Les courbes $C_{p_a}: y = ax^2$ et $C_{p_{-a}}: y = -ax^2$ sont symétriques par rapport à (Ox) .

Démonstration. Les deux points $M(x, ax^2)$ et $M'(x, -ax^2)$, appartenant respectivement à C_{p_a} et $C_{p_{-a}}$ sont symétriques par rapport à (Ox) puisque leurs ordonnées sont opposées.

- Pour obtenir la représentation graphique de $p_2: x \mapsto 2x^2$, on observe que :

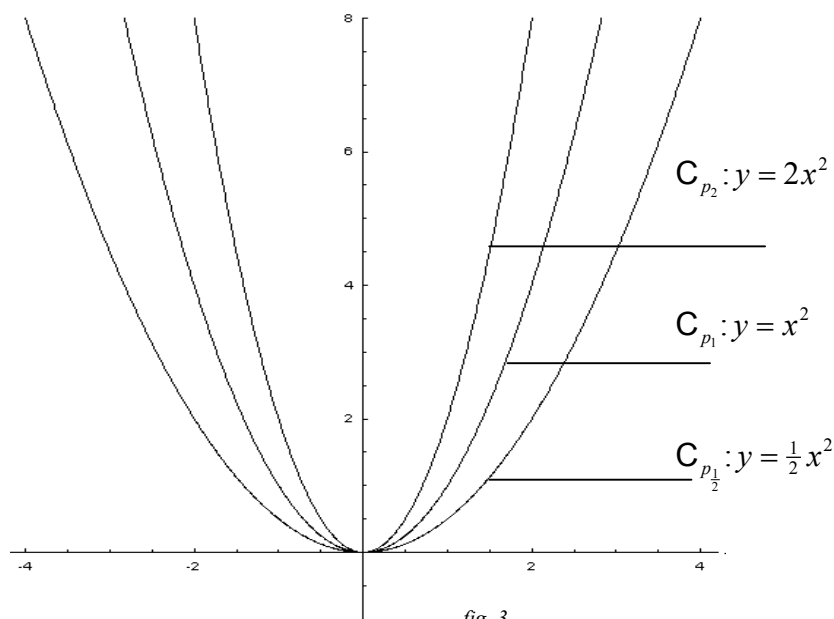
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad p_2(x) = 2p_1(x)$$

Il suffit donc de multiplier par 2 l'ordonnée de chaque point $M(x, x^2) \in C_{p_1}$ pour trouver le point $M'(x, 2x^2) \in C_{p_2}$. Remarquons que cette opération ne change pas le sens de variation de la courbe (cf. figure ci-dessous).

- De même, pour obtenir la représentation graphique de $p_{\frac{1}{2}}: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, on observe que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad p_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}p_1(x)$$

Il suffit donc de multiplier par $\frac{1}{2}$ l'ordonnée de chaque point $M(x, x^2) \in C_{p_1}$ pour trouver le point $M'(x; \frac{1}{2}x^2) \in C_{p_{1/2}}$. Remarquons que cette opération ne change pas le sens de variation de la courbe (cf. figure ci-dessous).

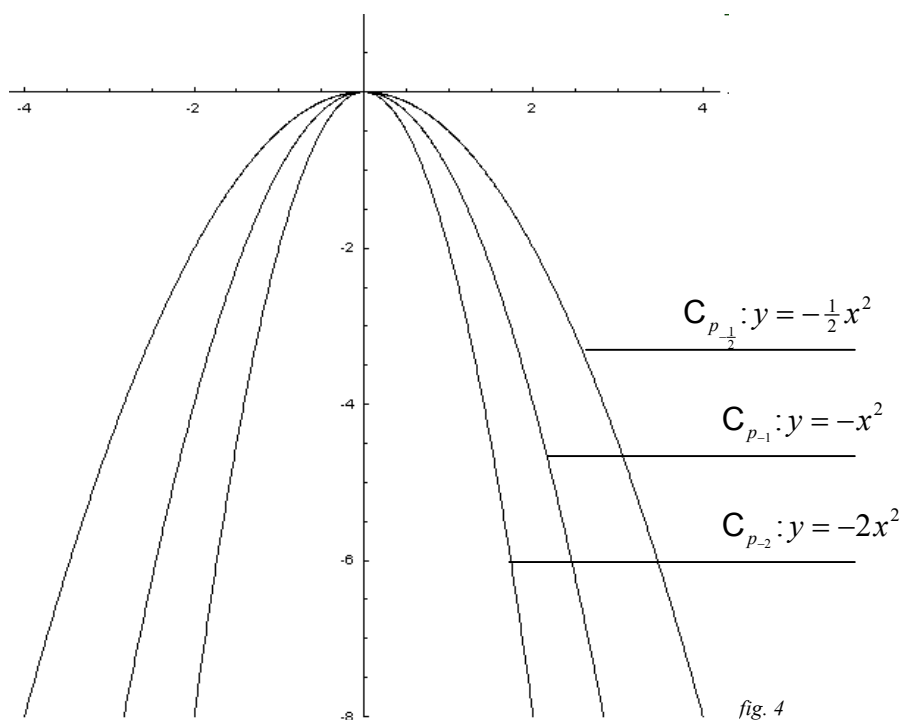


- En général, il est clair que :

Proposition. Si $a > 0$ alors p_a a même sens de variation que p_1 , c.-à-d. p_a est str. décroissante sur \mathbb{R}_- et str. croissante sur \mathbb{R}_+ .

- Et de même :

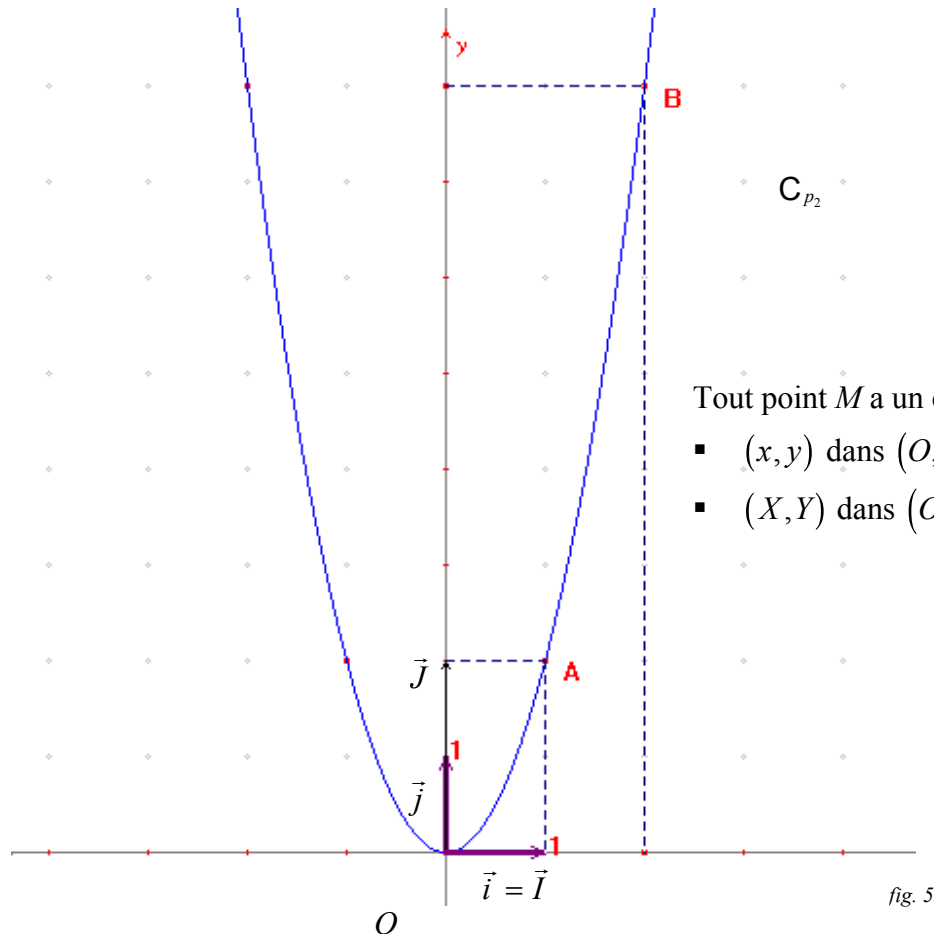
Proposition. Si $a < 0$ alors p_a a même sens de variation que p_{-1} , c.-à-d. p_a est str. croissante sur \mathbb{R}_- et str. décroissante sur \mathbb{R}_+ .



- Le coefficient a détermine donc l'**orientation** et la « **largeur** » de \mathcal{C}_{p_a} :

➤ Si $a > 0$, alors \mathcal{C}_{p_a} est tournée vers le haut et si $a < 0$ alors \mathcal{C}_{p_a} est tournée vers le bas.
 ➤ Si $|a|$ est petite, alors \mathcal{C}_{p_a} est large, et si $|a|$ est grande alors \mathcal{C}_{p_a} est mince.

- Dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) de la figure ci-dessous, l'équation de \mathcal{C}_{p_2} est : $y = 2x^2$. Pour montrer que \mathcal{C}_{p_2} est une **parabole**, il faut, d'après la définition du §1, trouver un repère (O, \vec{I}, \vec{J}) dans lequel cette courbe a comme équation : $Y = X^2$.



Tout point M a un couple de coordonnées

- (x, y) dans (O, \vec{i}, \vec{j}) et
- (X, Y) dans (O, \vec{I}, \vec{J}) .

- Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , A et B ont les coordonnées $(1, 2)$ et $(2, 8)$ respectivement. En effet, l'équation de \mathcal{C}_{p_2} est $y = 2x^2$ dans ce repère.
 Dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) , A et B auront les coordonnées $(1, 1)$ et $(2, 4)$ respectivement. En effet, l'équation de \mathcal{C}_{p_2} devra s'écrire $Y = X^2$ dans ce repère.
- D'où l'idée de poser : $\vec{I} = \vec{i}$ et $\vec{J} = 2\vec{j}$. Le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) n'est pas orthonormé, mais il est toujours orthogonal. Montrons que c'est le repère cherché :

$$M(x, y) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (1)$$

$$M(X, Y) \text{ dans } (O, \vec{I}, \vec{J}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} = X\vec{i} + 2Y\vec{j} \quad (2)$$

Comme tout vecteur admet une décomposition unique dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , on en déduit les **formules du changement de repère** :

$$\begin{cases} x = X \\ y = 2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = \frac{y}{2} \end{cases}$$

Or : $M(x, y) \in C_{p_2} \Leftrightarrow y = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = x^2 \Leftrightarrow Y = X^2$ dans (O, \vec{I}, \vec{J}) . C.Q.F.D.

- En général, on peut démontrer que C_{p_a} admet comme équation $Y = X^2$ dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) avec $\vec{I} = \vec{i}$ et $\vec{J} = a\vec{j}$. Ce résultat est aussi bien valable dans le cas $a > 0$ que dans le cas $a < 0$.
Toutes les courbes C_{p_a} sont donc des paraboles !

3. Exemples de translations de courbes et de repères

Avant de faire l'étude générale des trinômes du second degré, nous allons étudier quelques exemples pour approfondir l'idée du changement de repère.

a) Etude de $f: x \mapsto 2x^2 - 3$

On remarque que $f(x) = p_2(x) - 3$. Il suffit donc de retrancher 3 à l'ordonnée de chaque point $M(x, 2x^2) \in C_{p_2}$ pour trouver le point $M'(x; 2x^2 - 3) \in C_f$. C_f est donc l'image de C_{p_2} par la translation de vecteur $\vec{u}(0, -3)$. Remarquons que cette opération ne change pas le sens de variation de la courbe.

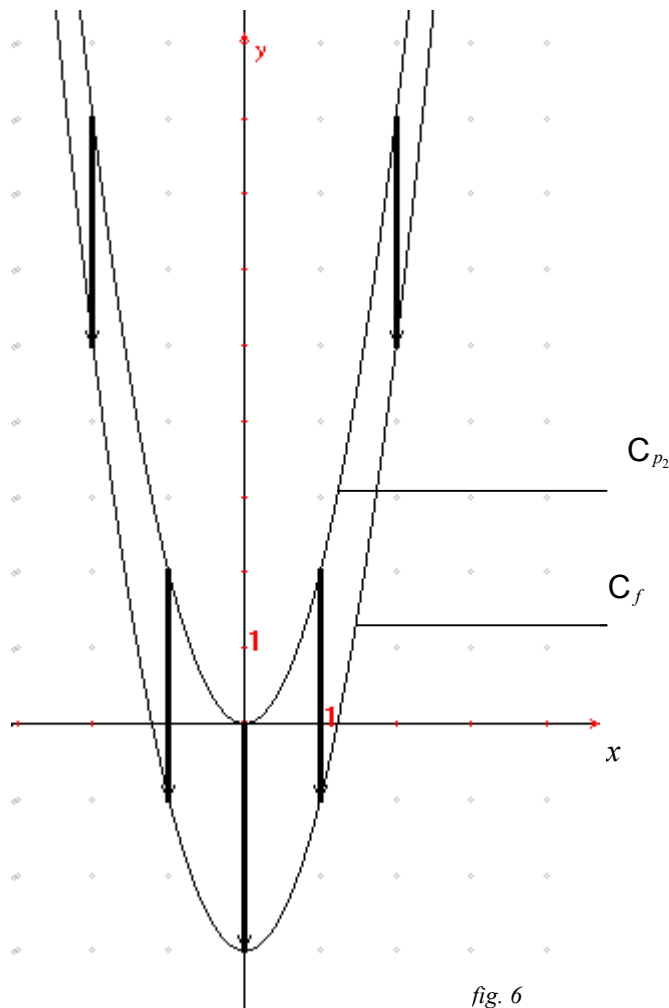


fig. 6

Un autre point de vue permettant d'obtenir \mathcal{C}_f est celui du **changement de repère**. Contrairement à la méthode précédente, ce n'est pas la courbe \mathcal{C}_{p_2} qui est translatée, mais l'origine O du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Précisons : l'équation de \mathcal{C}_f dans (O, \vec{i}, \vec{j}) est : $y = 2x^2 - 3$ ou encore :

$$y + 3 = 2x^2.$$

Choisissons une nouvelle abscisse X et une nouvelle ordonnée Y en posant :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + 3 \end{cases}$$

Ce changement de coordonnées **simplifie** l'équation de \mathcal{C}_f en : $Y = 2X^2$. Mais quel repère est associé à ces nouvelles coordonnées (X, Y) . Remarquons que l'abscisse ne change pas alors que l'ordonnée augmente de 3 :

y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5
Y	3	4	5	6	7	2	1	0	-1	-2

L'origine du nouveau repère se situe au point où : $X = 0$ et $Y = 0$, c.-à-d. au point O' d'abscisse $x = 0$ et $y = -3$. Remarquons finalement que les vecteurs de base associés au nouveau repère restent les vecteurs \vec{i} et \vec{j} : en effet, si x ou y augmente de 1, alors X respectivement Y augmente également de 1. On a affaire à une **translation du repère** (O, \vec{i}, \vec{j}) en (O', \vec{i}, \vec{j}) .

Nous avons déjà précisé que l'équation de \mathcal{C}_f dans (O', \vec{i}, \vec{j}) est : $Y = 2X^2 = p_2(X)$. Cela signifie que pour représenter graphiquement f dans (O, \vec{i}, \vec{j}) , il revient au même de représenter p_2 dans (O', \vec{i}, \vec{j}) .

$$\mathcal{C}_f \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{C}_{p_2} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

Pour clarifier davantage, le lecteur est invité à tracer les nouveaux axes de coordonnées et la nouvelle origine sur la figure 6.

b) Etude de $g: x \mapsto 2(x-2)^2$

Appliquons la méthode du **changement de repère** :

- Equation de \mathcal{C}_g dans (O, \vec{i}, \vec{j}) : $y = 2(x-2)^2$

- Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y \end{cases}$$

- Nouvelle origine : $O'(2, 0)$

- Nouveau repère : (O', \vec{i}, \vec{j})

- Equation de \mathcal{C}_g dans (O', \vec{i}, \vec{j}) : $Y = 2X^2$

Donc :

$$\mathcal{C}_g \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{C}_{p_2} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

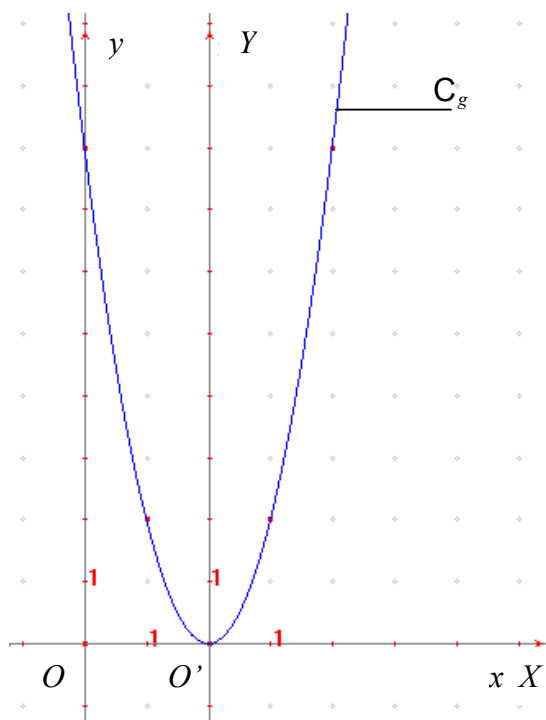


fig. 7

c) **Etude de** $h: x \mapsto 2(x-2)^2 + 3$

Appliquons la méthode du **changement de repère** :

- Equation de C_h dans (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$y = 2(x-2)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow y-3 = 2(x-2)^2$$

- Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-3 \end{cases}$$

- Nouvelle origine : $O'(2,3)$

- Nouveau repère : (O', \vec{i}', \vec{j}')

- Equation de C_h dans (O', \vec{i}', \vec{j}') : $Y = 2X^2$

Donc :

$$C_h \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = C_{p_2} \text{ dans } (O', \vec{i}', \vec{j}')$$

d) **Etude de** $k: x \mapsto 2x^2 - 8x + 11$

Il suffit de remarquer que $k = h$.

En effet :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad k(x) &= 2x^2 - 8x + 11 \\ &= 2\left(x^2 - 4x + \frac{11}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{11}{2}\right) \\ &= 2\left[(x-2)^2 + \frac{3}{2}\right] \\ &= 2(x-2)^2 + 3 = h(x) \end{aligned}$$

On dit que $k(x)$ a été mis sous **forme canonique** (voir chapitre 2, §3). C'est donc sous forme canonique qu'il faut mettre un trinôme avant d'opérer un changement de repère !

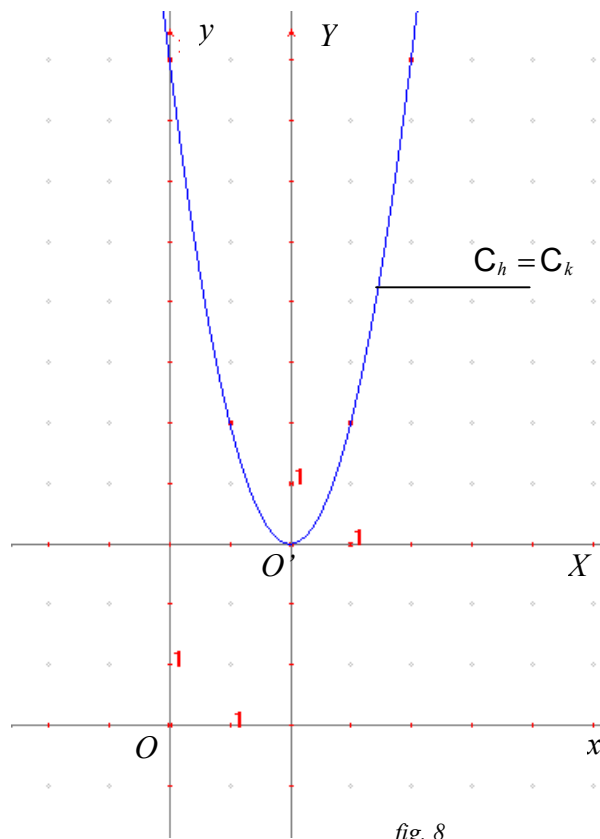
4. Représentation graphique du trinôme le plus général

Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ le trinôme du second degré le plus général. Nous avons vu au chapitre 2, §3, la forme canonique de $f(x)$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (5.1)$$

- D'où l'équation de C_f dans (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{aligned} y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ \Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$



- Changement de repère :

$$\begin{cases} X = x + \frac{b}{2a} \\ Y = y + \frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

- Nouvelle origine : $O' \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$
- Equation de C_f dans (O', \vec{i}, \vec{j}) : $Y = aX^2$

Donc :

$$C_f \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}) = C_{p_a} \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j})$$

Ce résultat prouve d'une part que C_f est une parabole (puisque nous avons prouvé au § 2 que C_{p_a} en est une) et d'autre part que l'**orientation** et la **largeur** de C_f dépendent toujours du paramètre a (voir à ce sujet page 5.4 en haut). Nous avons donc prouvé le théorème fondamental de ce chapitre :

Théorème. Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ le trinôme du second degré le plus général. La courbe représentative de C_f est une **parabole** de sommet $O' \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ et d'équation $Y = aX^2$ dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) .

Nous terminons ce paragraphe avec une application du résultat précédent à l'étude de l'équation du second degré.

5. Etude graphique de l'équation du second degré

Les racines de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont les solutions de l'équation générale du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{5.2}$$

Graphiquement, ce sont les abscisses des point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses de (O, \vec{i}, \vec{j}) . Etudions donc la position de C_f en fonction de a , b et c . A cette fin, il convient d'étudier le signe de l'ordonnée $y_{O'} = -\frac{\Delta}{4a}$ de O' : or le signe de cette ordonnée dépend des signes de a et de Δ . Le tableau suivant résume les 6 cas possibles :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	$y_{O'} < 0$	$y_{O'} = 0$	$y_{O'} > 0$
$a < 0$	$y_{O'} > 0$	$y_{O'} = 0$	$y_{O'} < 0$

Chaque cas correspond à une des figures de la page suivante. Nous retrouvons ainsi graphiquement le fait bien connu que :

- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 2 racines distinctes si et seulement si $\Delta > 0$.
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 1 racine si et seulement si $\Delta = 0$.
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de racine si et seulement si $\Delta < 0$.

