CHAPITRE 7

Applications et bijections

1. Fonctions de A dans B. Domaine et image

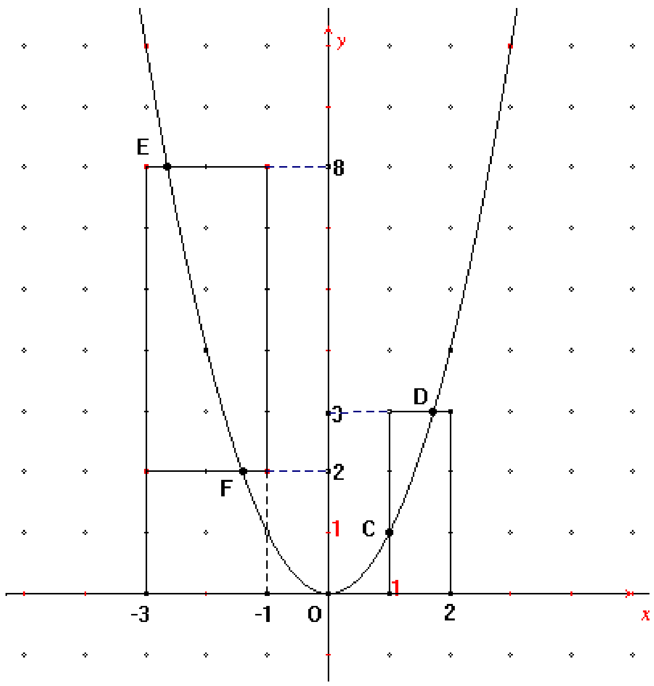
Dans ce chapitre, nous travaillons avec des fonctions dont les ensembles de départ A et d'arrivée B ne sont pas nécessairement égaux à $\mathbb{R}$. Par exemple, A et B peuvent être des intervalles de $\mathbb{R}$. Voici deux fonctions de ce genre :

$$f_1 : [1,2] \to [0,3] \qquad\qquad f_2 :]-3,-1[\to]2,8[$$
$$x \mapsto x^2 \qquad\qquad\qquad x \mapsto x^2$$

Quoique les deux fonctions appliquent x sur x^2, elles ne sont pas égales puisque leurs ensembles de départ et d'arrivée diffèrent. Rappelons l'égalité de deux fonctions en général :

> ***Définition***. Deux fonctions f et g sont ***égales*** si et seulement si elles ont le même ensemble de départ A, le même ensemble d'arrivée B, le même domaine D et si $(\forall x \in D)\ f(x) = g(x)$.

Représentons graphiquement les deux fonctions f_1 et f_2 :



Traçons d'abord la parabole d'équation $y = x^2$.

La courbe représentative de f_1 est la partie de cette parabole tombant dans le ***rectangle fermé*** $[1,2] \times [0,3]$. C'est donc l'arc de parabole fermé compris entre C et D. Dessinez cet arc en couleur !

La courbe représentative de f_2 est la partie de la parabole tombant dans le ***rectangle ouvert*** $]-3,-1[\times]2,8[$. C'est donc l'arc de parabole ouvert compris entre E et F. Dessinez cet arc en couleur !

Intéressons nous à présent aux ***domaines*** des deux fonctions :

- Le domaine de f_1 n'est pas égal à l'ensemble de départ entier $[1,2]$. En effet, par exemple $2 \notin \mathrm{dom} f_1$ puisque $2^2 = 4$, mais 4 n'est pas un élément de l'ensemble d'arrivée $[0,3]$. Quel est le plus grand x appartenant à $\mathrm{dom} f_1$? Visiblement, c'est l'antécédent de 3 par f_1, i.e. $\sqrt{3}$. Donc : $\mathrm{dom} f_1 = [1,\sqrt{3}]$.

- De même, le domaine de f_2 n'est pas égal à l'ensemble de départ entier $]-3,-1[$. Il est facile de voir que $\mathrm{dom} f_2 =]-\sqrt{8},-\sqrt{2}[$. C'est un intervalle ouvert cette fois !

Ces exemples montrent qu'il est en général beaucoup plus difficile de chercher le domaine d'une fonction d'un ensemble *A* vers un ensemble *B*. En général, si $f: A \to B$ est une fonction, alors :

$$\mathrm{dom}f = \{x \in A \,/\, f(x) \text{ existe et } f(x) \in B\} \qquad (7.1)$$

Introduisons maintenant la notion d'***image d'un ensemble*** par une fonction :

Définition.

- Soit $f: A \to B$ une fonction et *E* un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'***image de** E **par** f*, noté $f(E)$ est l'ensemble des réels $f(x)$ appartenant à *B*, tels que $x \in E \cap \mathrm{dom}f$. Donc :

$$f(E) = \{f(x) \in B \,/\, x \in E \cap \mathrm{dom}f\} \qquad (7.2)$$

  Ce sont donc les réels *y* dans *B* qui ont au moins un antécédent *x* dans *E* par *f*.
- On appelle ***image de** f* et on note $\mathrm{Im}\, f$ l'ensemble $f(\mathbb{R})$. Donc :

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \in B \,/\, x \in \mathrm{dom}f\} \qquad (7.3)$$

Exemples.

- Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. La représentation graphique de *f* est la parabole d'équation $y = x^2$, tracée à la page précédente. On a par exemple :
  - $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = \{x^2 \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+$
  - $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$
  - $f([0,2]) = [0,4]$ et $f([-3,-1[) =]1,9]$.
- Reprenons les fonctions f_1 et f_2 de la page précédente :
  - $f_1([1,2]) = [1,3]$. En effet, l'image de $[1,2]$ est nécessairement contenue dans l'ensemble d'arrivée $[0,3]$. Or les *y* dans $[0,3]$ qui ont un antécédent par f_1 sont exactement les éléments de $[1,3]$. Remarquons par ailleurs que : $\mathrm{Im}\, f_1 = f_1([1,2]) = [1,3]$.
  - De même : $\mathrm{Im}\, f_2 = f_2(]-3,-1[) = f_2(]-\sqrt{8},-\sqrt{2}[) =]2,8[$.
  - $f_2([0,2]) = \varnothing$ car $[0,2]$ ne contient aucun élément du domaine de f_2 : $[0,2] \cap \mathrm{dom}f_2 = \varnothing$.

2. Applications et Bijections. Bijections réciproques. Exemples

Définition. Soit *f* une fonction d'un ensemble *A* vers un ensemble *B*.

- On dit que *f* est une ***application*** si $\mathrm{dom}f = A$, c.-à-d. si tout $x \in A$ a une et une seule image par *f* dans *B*.
- On dit que *f* est une ***bijection*** ou ***application bijective*** si *f* est une application et si tout $y \in B$ a un et un seul antécédent par *f* dans *A*.

Remarque. On peut reformuler la définition d'une bijection de plusieurs façons, toutes intéressantes et ayant leur propre intérêt : $f: A \to B$ est une bijection si et seulement si l'une des assertions suivantes est vraie :

(i) Tout $x \in A$ a une et une seule image par *f* dans *B* et tout $y \in B$ a un et un seul antécédent par *f* dans *A*.

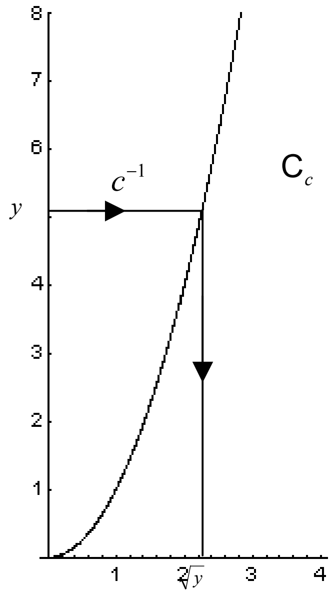
(ii) *f* est une application et $(\forall y \in B)(\exists! x \in A) / f(x) = y$.

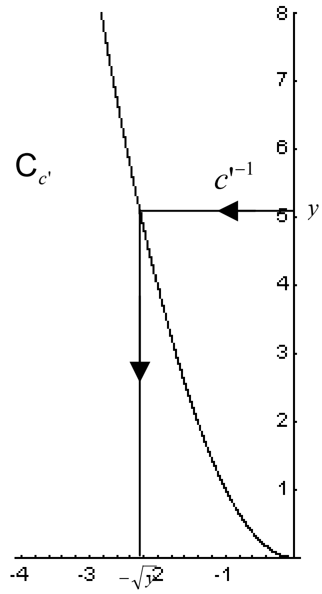
(iii) *f* est une application et pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ a une et une seule solution $x \in A$.

(iv) *f* et f^{-1} sont des applications.

Exemples.

- Reprenons les fonctions exemples f_1 et f_2 du paragraphe 1. Ce ne sont pas des applications car $\text{dom} f_1 \neq [1,2]$ et $\text{dom} f_2 \neq]-3,-1[$. Ce ne sont donc pas non plus des bijections.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est une application car $\text{dom} f = \mathbb{R}$ mais *f* n'est pas une bijection puisque par exemple -1 n'a pas d'antécédent par *f*.
- La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ est une application car $\text{dom} f' = \mathbb{R}$ mais f' n'est pas une bijection puisque par exemple 4 a deux antécédents, à savoir 2 et -2.
- Les fonctions $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ et $c' : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ sont des bijections. Avant de le démontrer, considérons les graphiques de ces fonctions :





  c et c' sont évidemment des applications car $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2$ existe et $\in \mathbb{R}_+$. De plus, *c* est une bijection car tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par *c*, à savoir $\sqrt{y}$. c' est également une bijection car tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet un et un seul antécédent par c', à savoir $-\sqrt{y}$.

- La fonction $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$ n'est pas une application car $\text{dom}\, h = \mathbb{R}^*$. La fonction $h_1' : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$ est une application car $\text{dom}\, h_1' = \mathbb{R}^*$. Mais ce n'est pas une bijection car 0 n'a pas d'antécédent par h_1' : l'équation $1/x = 0$ n'a pas de solution. La fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto 1/x$ est une bijection. En effet, c'est clairement une application puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ \frac{1}{x}$ existe et $\in \mathbb{R}^*$. De plus : tout $y \in \mathbb{R}^*$ admet un et un seul antécédent par *h*. Pour le trouver, il faut résoudre l'équation $h(x) = y$ où *x* est l'inconnue. Or :

$$(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow 1 = xy \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$$

  L'antécédent unique de *y* est donc $\frac{1}{y}$ et appartient bien à l'ensemble de départ $\mathbb{R}^*$.

Définition. Toute bijection $f : A \to B$ admet une bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$. Par définition, c'est la fonction qui à tout $y \in B$ associe l'unique antécédent de y par f. Cet antécédent est noté $x = f^{-1}(y)$ et appartient à A.

Schéma mémo :

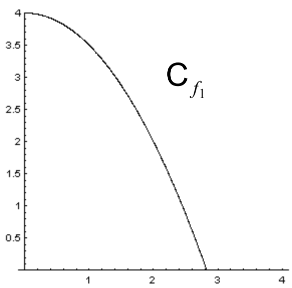
$$\begin{tikzcd} A & B \\ x \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & f(x) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ f^{-1}(y) & y \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

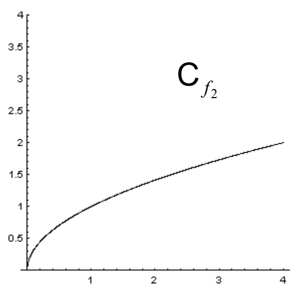
Exemples.

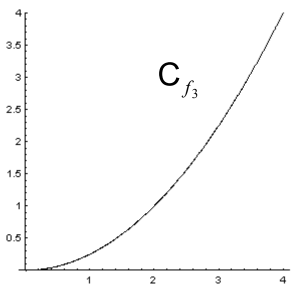
- La bijection réciproque de c est $c^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, y \mapsto \sqrt{y}$, celle de c' est $c'^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-, y \mapsto -\sqrt{y}$
- La bijection réciproque de h est $h^{-1} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, y \mapsto \frac{1}{y}$. On constate que $h = h^{-1}$. On dit que h est une bijection involutive. C'est donc une bijection qui est égale à sa bijection réciproque.

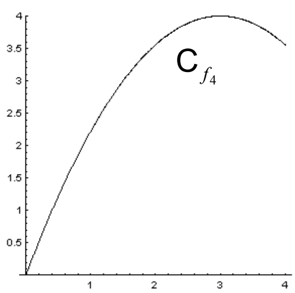
3. Comment reconnaître en pratique qu'une fonction est une bijection ?

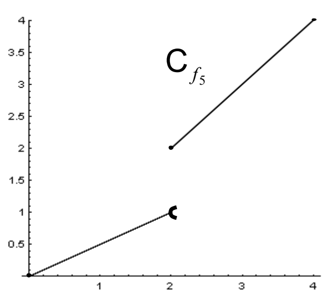
Pour répondre à cette question avec plus de facilité, traçons les courbes représentatives de quelques fonctions dont nous fixons les ensembles de départ et d'arrivée égal à $[0,4]$.

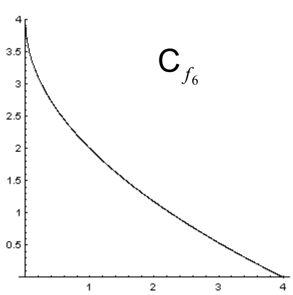












- f_1 n'est pas une bijection car ce n'est pas une application : $\operatorname{dom} f_1 \neq [0,4]$
- f_2 n'est pas une bijection car $\operatorname{Im} f_2 \neq [0,4]$.
- f_4 n'est pas une bijection : $\operatorname{dom} f_4 = [0,4]$ et $\operatorname{Im} f_4 = [0,4]$ mais certains éléments de l'ensemble d'arrivée comme par exemple 3,7 ont deux antécédents distincts. L'application n'est donc pas bijective essentiellement parce qu'elle n'est pas ***strictement monotone***.

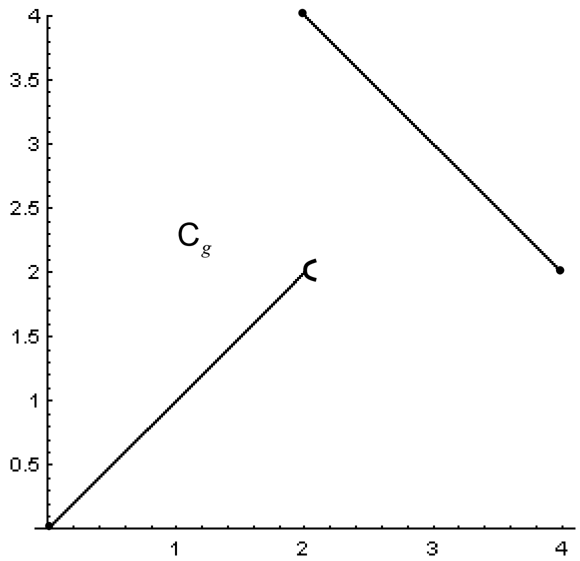
- f_5 n'est pas une bijection : elle est strictement monotone mais certains éléments de l'ensemble d'arrivée comme par exemple 1,5 n'ont pas d'antécedent.
- f_3 est une bijection car $\operatorname{dom} f_3 = [0,4]$, $\operatorname{Im} f_4 = [0,4]$ et f_3 est une application strictement croissante.
- f_6 est une bijection car $\operatorname{dom} f_6 = [0,4]$, $\operatorname{Im} f_6 = [0,4]$ et f_6 est une application strictement croissante.

Retenons donc :

Proposition 1. Si $f : A \to B$ est une fonction telle que
i. *f* est ***strictement montone,***
ii. $\operatorname{dom} f = A$ et
iii. $\operatorname{Im} f = B$,
alors *f* est une bijection.

Démonstration admise.

Remarque. Les conditions ne sont pas nécessaires, comme le montre l'exemple suivant :



g est une bijection de $[0,4]$ dans $[0,4]$, mais *g* n'est pas strictement monotone. Il faut remarquer ici que la fonction *g* saute au point d'abscisse 2. On dit que *g* est ***discontinue*** au point 2.

Définition. On dit qu'une fonction *f* est ***continue*** si elle n'est discontinue en aucun point, i.e. si on peut tracer la courbe représentative de *f* sans lever le stylo.

A titre de complément, énonçons un dernier théorème important, caractérisant les bijections continues.

Théorème 2. Soit $f : A \to B$ une ***fonction continue***. Alors *f* est une bijection ***si et seulement si*** les conditions i., ii., et iii. de la proposition 1 sont vraies.