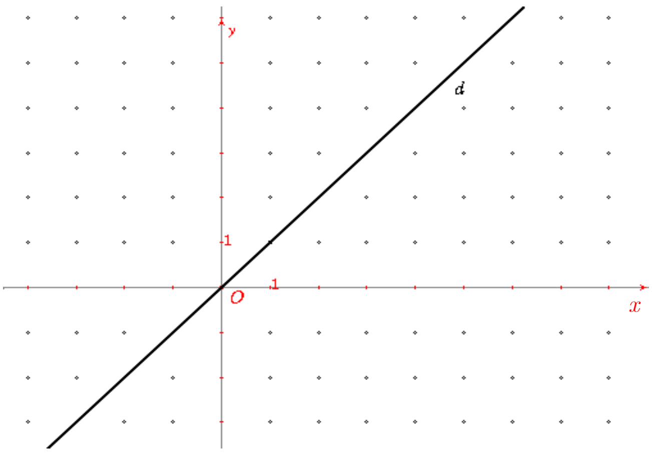
CHAPITRE 8
Géométrie analytique plane

1. Introduction

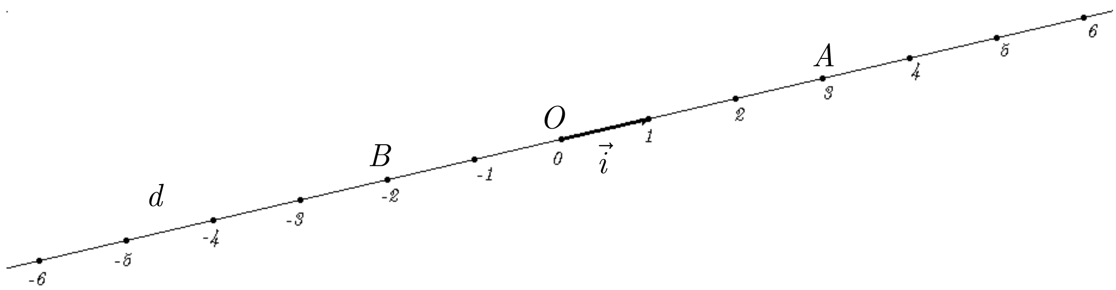
Le philosophe français ***René Descartes*** (1596-1650) est considéré comme le véritable fondateur de la ***géométrie analytique***. Le but en est d'étudier des problèmes géométriques par des méthodes calculatoires (algébriques ou analytiques). L'idée fondamentale est de faire correspondre de façon biunivoque, au moyen d'un ***repère cartésien*** (cf. §2), à tout ***point*** M ***du plan*** un ***couple*** (x,y) ***de réels*** appelés ***coordonnées***. Toute courbe plane (droite, cercle, parabole, ellipse ...) peut ainsi être décrite comme l'ensemble de solutions d'une ***équation*** du type $f(x,y)=0$, appelée ***équation cartésienne*** de la courbe. Sur la figure ci-contre par exemple, la droite d est constituée de tous les points dont l'abscisse x est égale à l'ordonnée y. Une ***équation cartésienne*** de d est donc $x=y$ ou $x-y=0$.



2. Bases, repères et coordonnées

Commençons par rappeler la définition d'un repère en ***dimension 1*** :

> ***Définition 1.*** Un ***repère*** (***cartésien***) d'une droite d est un couple $(O,\vec{i})$, où O est un point de d appelé ***origine*** et $\vec{i}$ est un vecteur ***non nul*** ayant ***même direction*** que d. $\vec{i}$ est appelé ***vecteur de base*** ou ***vecteur unitaire*** de la droite d.



Le choix d'un repère $(O,\vec{i})$ permet de ***graduer*** la droite d, c.-à-d. d'associer à tout point M de d une et une seule ***abscisse*** : c'est l'***unique réel*** x tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} \tag{8.1}$$

On écrit de façon équivalente :

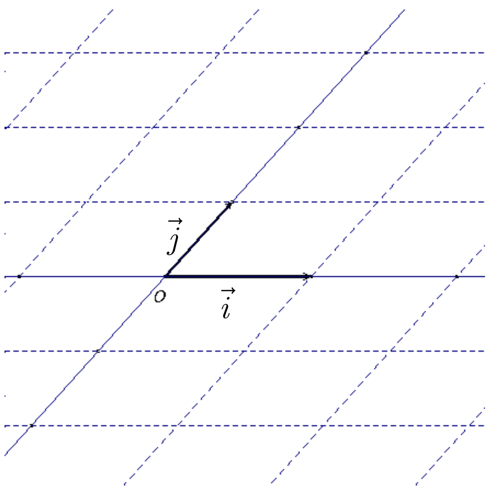
$$M\,(x)\ \text{dans}\ (O,\vec{i}) \tag{8.2}$$

et on lit : M a comme abscisse x dans le repère $(O,\vec{i})$.

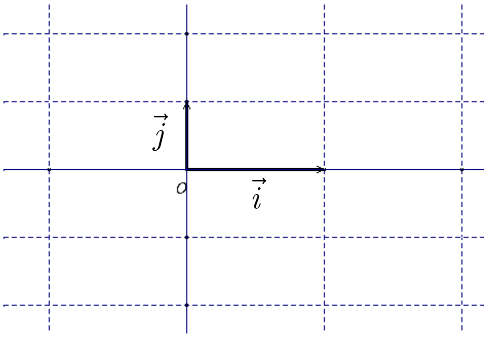
Remarque : L'abscisse d'un point sur une droite dépend entièrement du repère choisi : si l'on change d'origine ou de vecteur de base, alors l'abscisse de chaque point sur d change également.

Passons maintenant à la dimension 2.

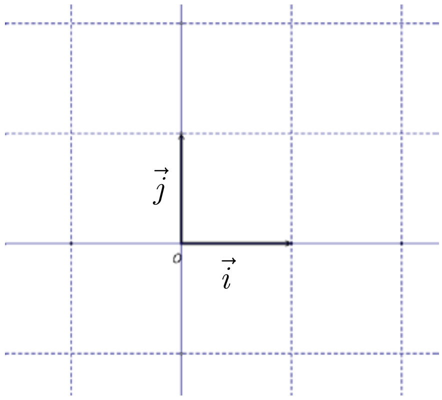
Définition 2. 1) Une ***base*** de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est un couple $(\vec{i},\vec{j})$ formé de deux vecteurs ***non colinéaires***.
2) Un ***repère cartésien*** du plan est un triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ formé d'un point O, appelé ***origine*** et d'une ***base*** $(\vec{i},\vec{j})$. La droite $(O,\vec{i})$ est appelée ***axe des abscisses*** et notée Ox. La droite $(O,\vec{j})$ est appelée ***axe des ordonnées*** et notée Oy.
3) Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont ***orthogonaux***, alors la base $(\vec{i},\vec{j})$ et le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont appelés ***base orthogonale*** et ***repère orthogonal*** respectivement.
4) Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont ***orthogonaux*** et de ***même longueur***, alors la base $(\vec{i},\vec{j})$ et le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont appelés ***base orthonormale*** (ou ***orthonormée***) et ***repère orthonormal*** (ou ***orthonormé***) respectivement.



repère cartésien



repère orthogonal



repère orthonormé

L'importance des bases réside dans la proposition suivante :

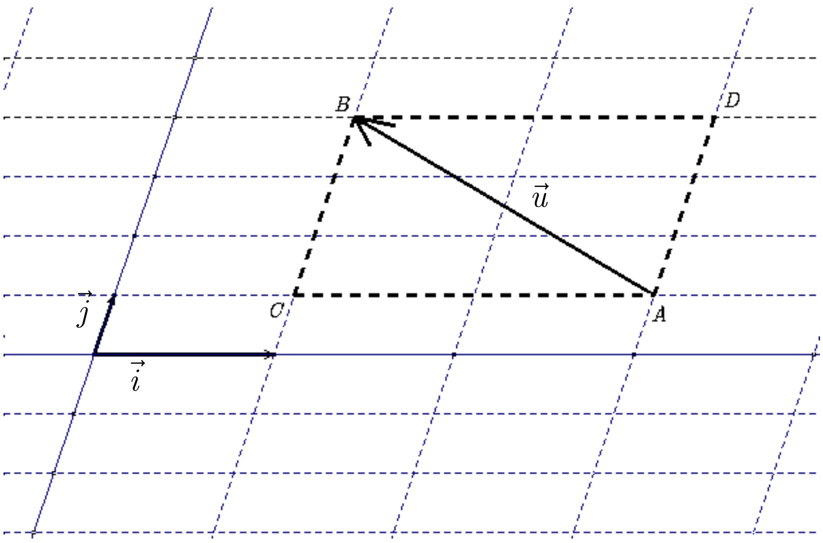
Proposition et définition 3. Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une ***base*** de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ admet une ***décomposition unique*** dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. Plus précisément : il existe un ***couple unique*** de réels (x,y) tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. En abrégé :

$$(\forall \vec{u} \in \mathcal{V})\big(\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2\big)/\, \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}\,. \tag{8.3}$$

Le couple (x,y) est appelé ***couple de coordonées*** du vecteur $\vec{u}$; x est l'***abscisse*** et y est l'***ordonnée*** du vecteur $\vec{u}$. On notera cela :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i},\vec{j}) \tag{8.4}$$

Démonstration. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. En observant la figure suivante, on se convainc aisément qu'il existe ***une et une seule*** façon de tracer un parallélogramme dont les côtés sont respectivement parallèles aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et dont une diagonale est $[AB]$.



Appelons C et D les deux autres sommets de ce parallélogramme. D'après la relation de Chasles :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Or, par construction, $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\vec{i}$, il existe donc un réel unique x tel que $\overrightarrow{AC} = x\vec{i}$. De même, $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire à $\vec{j}$, il existe donc un réel unique y tel que $\overrightarrow{CB} = y\vec{j}$. D'où la décomposition unique annoncée : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

C.Q.F.D.

Après avoir défini les coordonnées d'un ***vecteur***, voici celle des coordonnées d'un ***point*** :

Proposition et définition 4. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ***repère cartésien*** du plan. Pour tout point M, il existe un ***couple unique*** (x,y) de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{8.5}$$

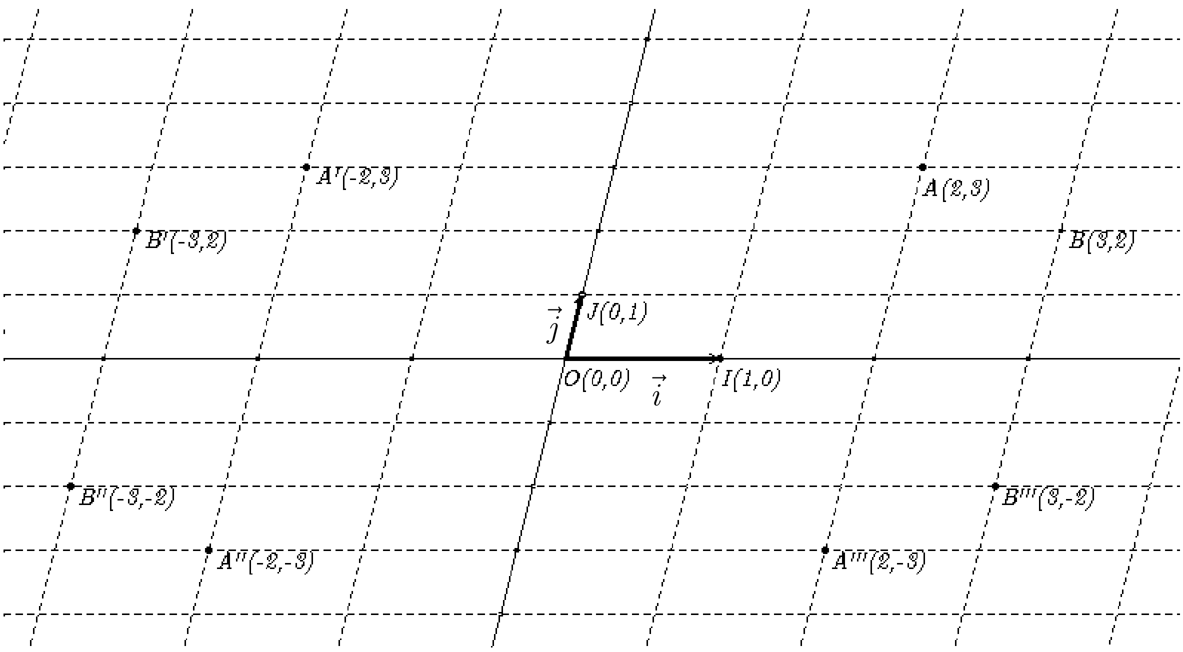
Le couple (x,y) est appelé ***couple de coordonnées*** du point M. x est l'***abscisse*** et y est l'***ordonnée*** du point M. On notera de façon équivalente :

$$M(x,y) \text{ dans } (O,\vec{i},\vec{j}) \tag{8.6}$$

Démonstration. La seule chose à démontrer est la relation (8.5). Or, celle-ci est triviale d'après la proposition précédente.

C.Q.F.D.

Exemples :



3. Calculs sur les coordonnées

(1) ***Egalité*** de deux vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j})$:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \tag{8.7}$$

(2) Coordonnées de la ***somme*** de deux vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j})$:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \ (\vec{u}+\vec{u}\,')\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

(3) Coordonnées du ***produit d'un vecteur par un réel*** dans une base $(\vec{i},\vec{j})$:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \ \lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

(4) Coordonnées d'un ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$A(x_A, y_A) \text{ et } B(x_B, y_B) \ \Rightarrow \ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

(5) Coordonnées du ***milieu*** d'un segment dans un ***repère*** $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B) \text{ et } M = \text{mil}[AB] \ \Rightarrow$$
$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \tag{8.11}$$

(6) Coordonnées du ***centre de gravité*** d'un triangle dans un ***repère*** $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$A(x_A, y_A),\ B(x_B, y_B),\ C(x_C, y_C) \text{ et } G = \text{centre de gravité du } \Delta(ABC) \ \Rightarrow$$
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \tag{8.12}$$

Démonstration. (8.7) est une conséquemce immédiate de (8.3). Pour démontrer (8.8), on se souvient que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i},\vec{j}) \ \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

De même :

$$\vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i},\vec{j}) \ \Leftrightarrow \vec{u}\,' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

Donc :

$$\vec{u} + \vec{u}' = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$$
$$= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$$

D'où (8.8). Une démonstration tout à fait analogue conduit à (8.9). Pour démontrer (8.10), on se souvient que :

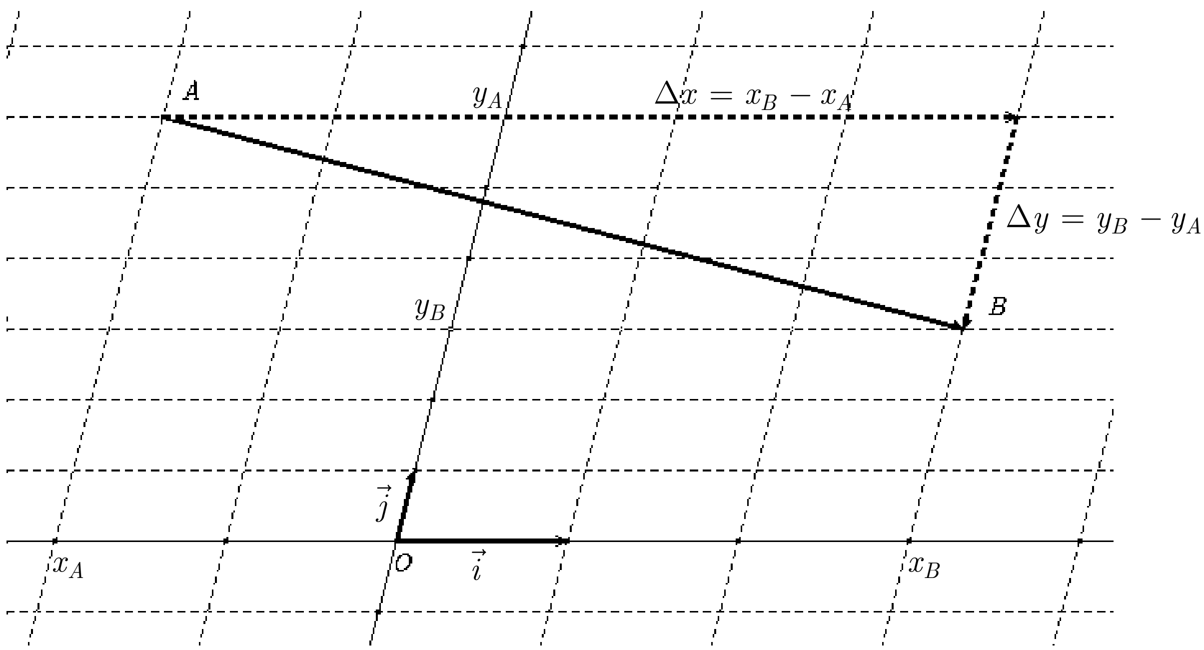
$$A(x_A, y_A) \text{ dans } \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

De même :

$$B(x_B, y_B) \text{ dans } \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - x_A\vec{i} - y_A\vec{j}$$
$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



Le milieu M du segment $[AB]$ est caractérisé par la relation

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)
\end{aligned} \tag{8.13}$$

où O est l'origine du repère.

Or : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$.

D'après (8.7), on a donc :

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{cases}$$

Ainsi, (8.11) est démontré.

Pour (8.12), on procède de façon analogue, en se souvenant que le centre de gravité G d'un triangle ABC est caractérisé par la relation :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \\ &\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \end{aligned} \tag{8.14}$$

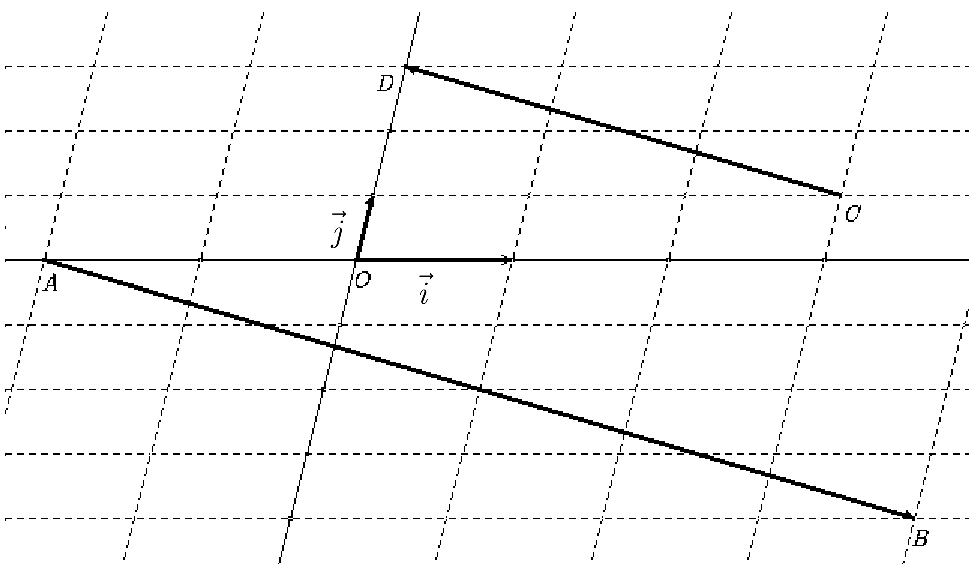
Le détail de la preuve est laissé à l'élève comme exercice.

4. Vecteurs colinéaires. Condition de colinéarité

Rappelons que deux vecteurs sont ***colinéaires*** ssi ils ont même direction, c.-à-d. lorsqu'ils sont ***parallèles***. Si $\vec{u}$ est un vecteur ***non nul***, tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est de la forme $\lambda\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Le ***vecteur nul*** (qui n'a pas de direction) est ***par définition*** colinéaire à tout autre vecteur.

Notation. On écrira $\vec{u} \parallel \vec{v}$ pour indiquer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple.



Sur la figure ci-dessus les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Remarquons que :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}.$$

Définition 5. Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}\,'\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs. Le ***déterminant*** de $\vec{u}$ et de $\vec{u}\,'$ par rapport à cette base, noté $\det(\vec{u},\vec{u}\,')$, est défini par :

$$\det(\vec{u},\vec{u}\,') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y. \tag{8.15}$$

Cette notion est extrêmement pratique pour déterminer si deux vecteurs donnés sont colinéaires ou non. En effet :

Proposition 6. Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}\,'\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs dans une base $(\vec{i},\vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \,||\, \vec{u}\,' \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{u}\,') = 0 \tag{8.16}$$

Démonstration. 1) Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors l'assertion est triviale : en effet, quel que soit le vecteur $\vec{u}\,'$, on a par définition $\vec{0} \,||\, \vec{u}\,'$ et $\det\left(\vec{0},\vec{u}\,'\right) = 0$.

2) Supposons donc que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

" $\Rightarrow$ " Si $\vec{u} \,||\, \vec{u}\,'$ alors il existe un reél k tel que $\vec{u}\,' = k\vec{u}$. Donc : $x' = kx$ et $y' = ky$. Par conséquent :

$$\det(\vec{u},\vec{u}\,') = xy' - x'y = xky - kxy = 0.$$

" $\Leftarrow$ " Réciproquement, supposons que $\det(\vec{u},\vec{u}\,') = xy' - x'y = 0$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Si par exemple $x \neq 0$, on peut définir $k = \frac{x'}{x}$, c.-à-d. $x' = kx$. En divisant les deux membres de l'égalité $xy' - x'y = 0$ par x, il vient :

$$y' - \tfrac{x'}{x} y = 0 \Leftrightarrow y' - ky = 0 \Leftrightarrow y' = ky.$$

Ainsi, $x' = kx$ et $y' = ky$, c.-à-d. $\vec{u}\,' = k\vec{u}$, d'où $\vec{u} \,||\, \vec{u}\,'$. On raisonne de façon analogue lorsque $y \neq 0$.

C.Q.F.D.

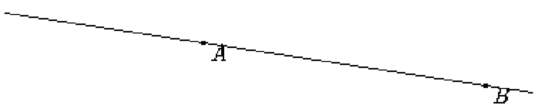
Reprenons l'exemple de la page précédente : $\overrightarrow{AB}\binom{6}{-4}$ et $\overrightarrow{CD}\binom{-3}{2}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, donc :

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) &= \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \\ &= 12 - 12 = 0 \end{aligned}$$

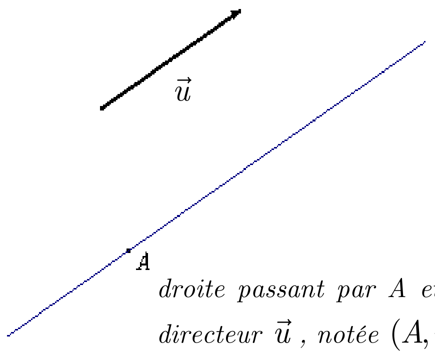
On retrouve ainsi le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

5. Equations cartésiennes de droites

Une droite est définie soit par la donnée de ***deux points distincts***, soit par la donnée d'***un point*** et d'***une direction***. La direction d'une droite est toujours celle d'un ***vecteur***, appelé encore ***vecteur directeur*** de la droite.



droite passant par A et par B, notée AB



droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ *, notée* $(A,\vec{u})$

Définition 7. On appelle vecteur directeur d'une droite tout vecteur ***non nul ayant même direction que cette droite.*** Une droite admet donc une infinité de vecteurs directeurs !

Théorème 8. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

(1) Toute droite d a dans ce repère une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, où a, b et c sont des coefficients réels et $(a,b)\neq(0,0)$.

(2) Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$, où a, b et c sont des coefficients réels et $(a,b)\neq(0,0)$ est celle d'une droite dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Démonstration. (1) Soit $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ un vecteur directeur et $A(x_A,y_A)$ un point de d.

Alors on a :

$$\begin{aligned} M(x,y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \quad (*) \\ &\Leftrightarrow \beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A=0 \end{aligned}$$

Cette équation est bien de la forme annoncée, en posant $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=-\beta x_A+\alpha y_A$. Précisons que $(a,b)\neq(0,0)$ car $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, étant donné que le vecteur directeur $\vec{u}$ est non nul.

Ajoutons deux corollaires ***mnémotechniques*** à cette première partie de la démonstration :

Corollaire 9. Une équation cartésienne de la droite d passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ est :

$$\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} \tag{8.17}$$

en convenant que si le dénominateur d'une fraction s'annule, alors le numérateur s'annule aussi.

La dernière convention signifie que :

- Si $\alpha = 0$ (c.-à-d. si $d \parallel Oy$), alors une équation cartésienne de d est : $x = x_A$. Pour le voir, reconsidérer l'équation $(*)$ dans la démonstration précédente et utiliser le fait que $\beta \neq 0$.
- Si $\beta = 0$ (c.-à-d. si $d \parallel Ox$), alors une équation cartésienne de d est : $y = y_A$. Pour le voir, reconsidérer l'équation $(*)$ et utiliser le fait que $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors (8.17) est une équation cartésienne équivalente à $(*)$, c'est donc bien une équation cartésienne de d.

Corollaire 10. Une équation cartésienne de la droite d passant par deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ supposés distincts est :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \tag{8.18}$$

en convenant que si le dénominateur d'une fraction s'annule, alors le numérateur s'annule aussi.

En effet, $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ est un vecteur directeur de cette droite, donc il suffit de remplacer dans le corollaire 9 α par $x_B - x_A$ et β par $y_B - y_A$.

(2) Venons-en à la deuxième assertion du théorème. Soit e l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$. Il faut démontrer que e est une droite. Pour cela, nous allons tout simplement chercher la droite dont l'équation est celle de e. Tout d'abord, observons que e n'est pas vide. Il existe au moins un point $A(x_0, y_0)$ appartenant à e. (Montrez-le !) Ce point vérifie donc l'équation : $ax_0 + by_0 + c = 0$. On en déduit que :

$$c = -ax_0 - by_0 . \tag{8.19}$$

Considérons maintenant la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Nous affirmons que $e = d$. En effet, d'après le corollaire 1:

$$\begin{aligned} M(x,y) \in d &\Leftrightarrow \frac{x-x_0}{-b} = \frac{y-y_0}{a} \\ &\Leftrightarrow a(x-x_0) = -b(y-y_0) \\ &\Leftrightarrow ax - ax_0 + by - by_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ (d'après (1.19))} \\ &\Leftrightarrow M(x,y) \in e \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Corollaire 11. Si la droite d a comme équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Notation : On écrit $d : ax + by + c = 0$ ou $d \equiv ax + by + c = 0$ pour indiquer que la droite d admet comme équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans un repère précisé au préalable. Ajoutons que cette équation est parfois appelée ***équation implicite*** de d.

6. Equations explicites (réduites) de droites.

Exemple. Soit $d : 2x - 3y + 8 = 0$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour chercher quelques points sur d, il est utile d'exprimer y ***en fonction*** de x :

$$2x - 3y + 8 = 0 \Leftrightarrow 3y = 2x + 8 \,/ : 3 \Leftrightarrow y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{8}{3}$$

Cette équation est appelée ***équation cartésienne explicite*** (ou ***réduite)*** de d. D'où le tableau de correspondance suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{3} = 2$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{12}{3} = 4$	$\frac{14}{3}$

En général, on a la :

Proposition et définition 12. Toute droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et ***non parallèle*** à Oy, c.-à-d. telle que $b \neq 0$, admet une équation de la forme $y = mx + p$, appelée ***équation cartésienne explicite*** (ou ***réduite***) de d. Dans cette équation :

- $m = -\frac{a}{b}$ est appelé le ***coefficient directeur*** ou ***pente*** de d et
- $p = -\frac{c}{b}$ est appelé l'***ordonnée à l'origine*** de d.

Démonstration. Comme $b \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} & ax + by + c = 0 \\ \Leftrightarrow\ & by = -ax - c \mid : b \\ \Leftrightarrow\ & y = -\tfrac{a}{b}x - \tfrac{c}{b} \end{aligned}$$

C'est la forme annoncée de l'équation avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

C.Q.F.D.

Il reste à ***interpréter graphiquement*** les coefficients m et p. C'est l'objet des deux propositions suivantes :

Proposition 13. Soit $y = mx + p$ l'équation explicite d'une droite d dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors $A(0,p)$ est un point de d et $\vec{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de d.

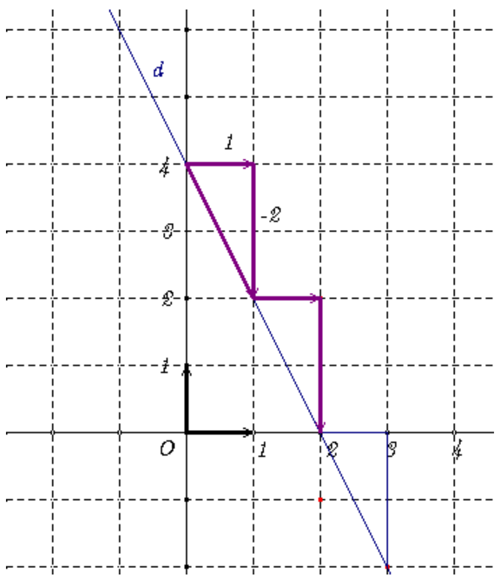
Démonstration. Comme $p = m \cdot 0 + p$, le point $A(0,p)$ appartient bien à d. Transformons l'équation explicite en équation implicite :

$$y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$$

D'après le corollaire 11, $\vec{u}\binom{1}{m}$ est donc un vecteur directeur de d.

C.Q.F.D.

Exemple. Sur la figure ci-dessous, un vecteur directeur de d est $\vec{u}\binom{1}{-2}$, donc d a comme coefficient directeur -2. Le point $(0,4)$ appartient à d, donc l'ordonnée à l'origine est égale à 4. D'où l'équation de d : $y = -2x + 4$.



Proposition 14. Soit $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ un vecteur directeur d'une droite d non parallèle à Oy dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

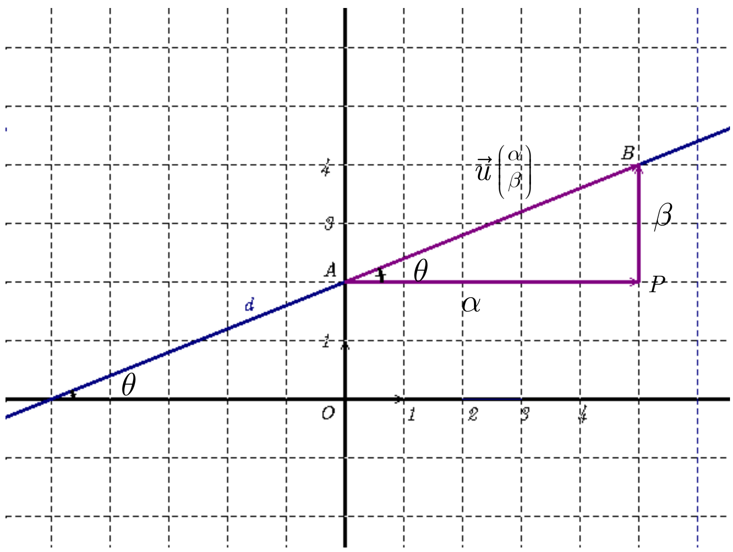
1) Le coefficient directeur de cette droite est $m = \frac{\beta}{\alpha}$.

2) Si de plus $(O,\vec{i},\vec{j})$ est ***orthonormé***, alors m est la tangente de l'***angle orienté*** θ que fait Ox avec d, c.-à-d. : $m = \tan\theta$ où $\theta = \widehat{\left(\vec{i},\vec{u}\right)}$.

Démonstration. 1) Si $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ est un vecteur directeur de d, alors $\vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{u}$ en est un autre, car il est colinéaire à $\vec{u}$. ($\alpha \neq 0$ puisque d n'est pas parallèle à Oy.) Or, $\vec{v}\binom{1}{\beta/\alpha}$ est l'unique vecteur directeur de d dont l'abscisse vaut 1. Par conséquent le coefficient directeur de d est bien β/α.

2) Sur la figure ci-dessous on a : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; dans ce cas,

$$\tan\theta = \tan\widehat{\left(\vec{i},\vec{u}\right)} = \tan\widehat{\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right)} = \beta/\alpha = m$$



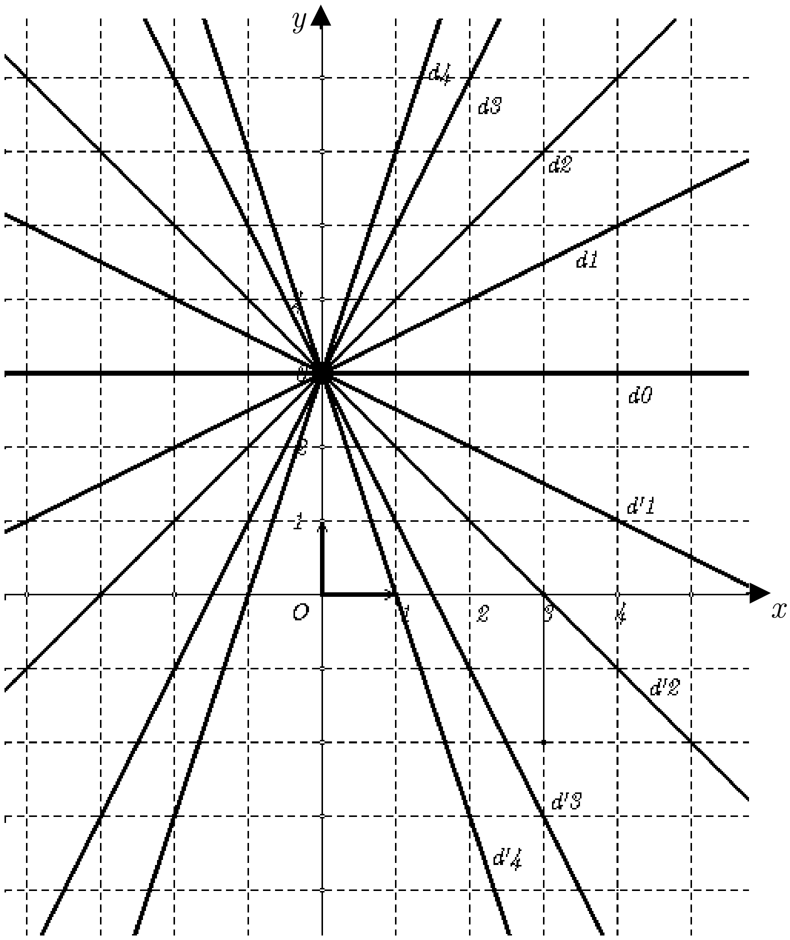
Le lecteur est invité à analyser en détail les autres cas de figure possibles.

C.Q.F.D.

Le 2e point de la proposition précédente justifie le nom de ***pente*** conféré à m. Précisons en particulier que :

- Si $m > 0$, alors la droite d est « croissante ».
- Si $m < 0$, alors la droite d est « décroissante ».
- Si $m = 0$, alors la droite d est parallèle à Ox.
- Plus $|m|$ est grand, plus la pente de d est raide.
- Plus $|m|$ est proche de 0, plus la pente de d est faible.

Illustrons graphiquement ces observations à l'aide de quelques exemples :



Toutes les droites de la figure ont comme ordonnée à l'origine 3. Voici leurs équations, ainsi que l'angle orienté θ que fait Ox avec chacune d'elles :

$$
\begin{array}{ll}
d_4 : y = 3x + 3\,, & \theta_4 = \tan^{-1} 3 = 71{,}56° \\
d_3 : y = 2x + 3\,, & \theta_3 = \tan^{-1} 2 = 63{,}43° \\
d_2 : y = x + 3\,, & \theta_2 = \tan^{-1} 1 = 45° \\
d_1 : y = \frac{1}{2}x + 3\,, & \theta_1 = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 26{,}57° \\
d_0 : y = 3\,, & \theta_0 = \tan^{-1} 0 = 0° \\
d'_1 : y = -\frac{1}{2}x + 3\,, & \theta'_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -26{,}57° \\
d'_2 : y = -x + 3\,, & \theta'_2 = \tan^{-1}(-1) = -45° \\
d'_3 : y = -2x + 3\,, & \theta'_3 = \tan^{-1}(-2) = -63{,}43° \\
d'_4 : y = -3x + 3\,, & \theta'_4 = \tan^{-1}(-3) = -71{,}56°
\end{array}
$$

7. Conditions de parallélisme de deux droites

Proposition 15. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan.

(1) Deux droites $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles dans ce repère ssi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0\,. \tag{8.20}$$

(2) Deux droites $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$ sont parallèles dans ce repère ssi

$$m = m' \tag{8.21}$$

Démonstration. (1) Un vecteur directeur de d (resp. d') est $\vec{u}\binom{-b}{a}$ (resp. $\vec{u}'\binom{-b'}{a'}$). d et d' sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c.-à-d. ssi

$$\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -a'b + ab' = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0\,.$$

(3) d et d' sont parallèles ssi leurs coefficients directeurs sont égaux, c.-à-d. ssi $m = m'$.

8. Position relative de deux droites. Point d'intersection

Soit $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites données dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. Elles sont ou bien ***sécantes***, ou bien ***strictement parallèles***, ou bien ***confondues***. Etudier leur intersection revient à résoudre le système (Σ) formé par leurs équations.

$$(\Sigma)\ \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Ceci est en fait l'objet du chapitre 1 de ce cours. Rappelons seulement les points importants de l'étude :

- $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le ***déterminant*** du système.
- Si $\Delta \neq 0$, alors (Σ) admet un couple de solutions ***unique*** : c'est le couple de coordonnées du ***point d'intersection*** de d et de d'.
- Si $\Delta = 0$, alors (Σ) admet soit une ***infinité de solutions***, auquel cas les deux droites d et d' sont ***confondues***, soit ***aucune solution***, auquel cas les droites d et d' sont ***strictement parallèles***.

Remarque importante. Dans la suite, nous parlerons de ***distances*** et d'***angles droits*** dans le plan euclidien. Par conséquent, toutes les formules qui suivent sont uniquement valables dans un ***repère orthonormé***.

9. Norme d'un vecteur. Distance entre deux points

Définition 16. La ***norme*** d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est sa ***longueur***.

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, la longueur commune des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définit l'***unité de longueur***.

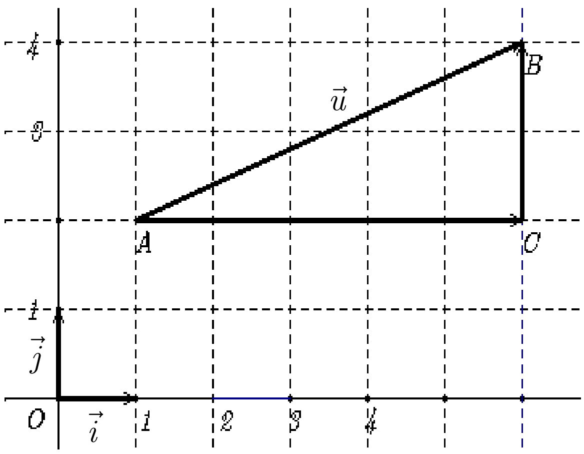
Proposition 17. Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une ***base orthonormée*** des vecteurs du plan.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dans } \left(\vec{i},\vec{j}\right) \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{8.22}$$

Démonstration. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé et $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ la décomposition de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. En d'autres termes : $\overrightarrow{AC} = x\vec{i}$ et $\overrightarrow{CB} = y\vec{j}$. Le triangle ABC est ***rectangle*** en C, donc d'après le théorème de ***Pythagore*** : $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$. Or, $\overline{AB} = \|\vec{u}\|$, $\overline{AC} = \left\|x\vec{i}\right\| = |x|$ et $\overline{CB} = \left\|y\vec{j}\right\| = |y|$. Ainsi :

$$\begin{aligned} &\|\vec{u}\|^2 = |x|^2 + |y|^2 \\ \Leftrightarrow\ &\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow\ &\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

C.Q.F.D.



Proposition 18. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ***repère orthonormé*** du plan.

$$\begin{aligned} &A(x_A,y_A) \text{ et } B(x_B,y_B) \text{ dans } (O,\vec{i},\vec{j}) \\ &\Rightarrow \overline{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ . \end{aligned} \tag{8.23}$$

Remarque. Bien noter que la distance de A à B est égale à la norme de $\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. On applique (8.10) et (8.22) :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

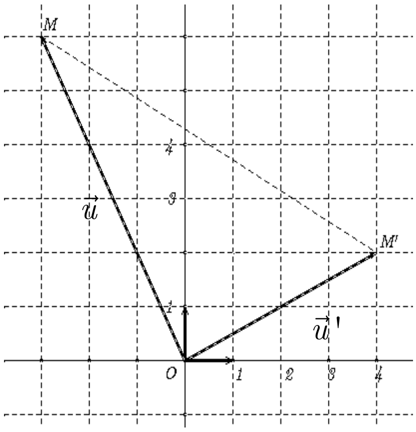
C.Q.F.D.

10. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs. Produit scalaire

Proposition 19. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une ***base orthonormée*** des vecteurs du plan.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ dans } (\vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow xx' + yy' = 0. \qquad (8.24)$$

Démonstration. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}\,' = \overrightarrow{OM'}$ dans ce repère. D'après le théorème de Pythagore et sa réciproque dans le triangle *OMM'* :



$\vec{u} \perp \vec{u}\,'$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\,'\|^2 = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2$

$\Leftrightarrow 0 = -2xx' - 2yy' / : (-2)$

$\Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

C.Q.F.D.

Définition et proposition 20. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une ***base orthonormée*** des vecteurs du plan. Le ***produit scalaire*** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans cette base, noté $\vec{u} \cdot \vec{u}\,'$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}\,' = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\,'\| \cdot \cos\alpha, \qquad (8.25)$$

où α est l'angle (non orienté) formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$. L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{u}\,'$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}\,' = xx' + yy'. \qquad (8.26)$$

Remarques. 1) Bien noter que le ***produit scalaire*** de deux vecteurs est un ***nombre réel*** ! (Un ***scalaire*** est tout simplement un réel.)

2) Compte-tenu de l'assertion (8.26), la ***condition d'orthogonalité*** (8.24) se réécrit en :

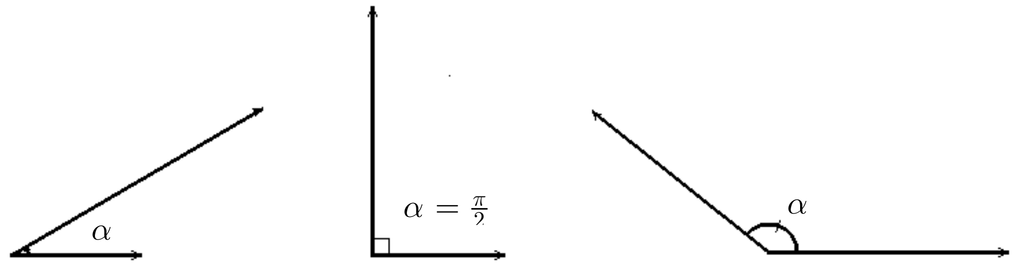
$$\vec{u} \perp \vec{u}\,' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}\,' = 0 \qquad (8.27)$$

3) Plus précisément, si $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont des vecteurs non nuls, alors d'après la définition (8.25), on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{u}\,' > 0 \Leftrightarrow \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2} \ \ (\alpha \text{ angle aigu}) \tag{8.28}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u}\,' = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \tfrac{\pi}{2} \ \ (\alpha \text{ angle droit}) \tag{8.29}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u}\,' < 0 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \tfrac{\pi}{2} \le \alpha < \pi \ \ (\alpha \text{ angle obtus}) \tag{8.30}$$



$\vec{u}\cdot\vec{u}\,' > 0$ $\qquad$ $\vec{u}\cdot\vec{u}\,' = 0$ $\qquad$ $\vec{u}\cdot\vec{u}\,' < 0$

Démonstration de la proposition 20. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé, $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{u}\,' = \overrightarrow{OM'}$ et $\alpha = \widehat{MOM'}$ dans ce repère. D'après la relation aux cosinus (théorème d'al Kashi) dans le triangle *OMM'* :

$$\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\,'\|^2 - 2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\,'\|\cdot\cos\alpha$$

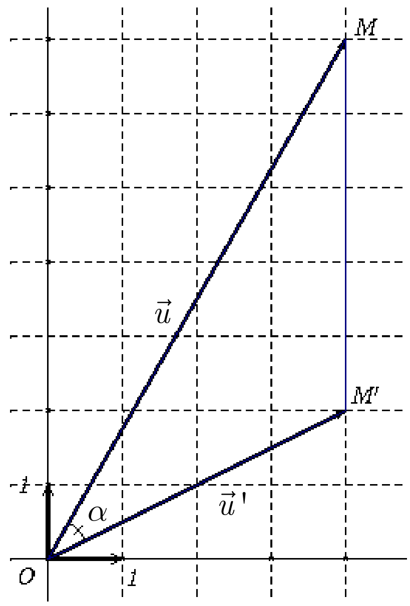
$$\Leftrightarrow (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\,'\|\cdot\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\,'\|\cdot\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow -2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\,'\|\cdot\cos\alpha = -2xx' - 2yy'$$

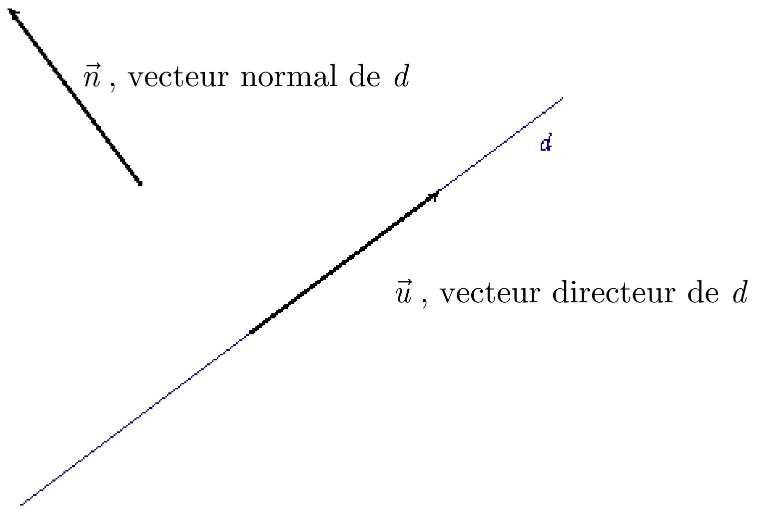
$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\,'\|\cdot\cos\alpha = xx' + yy'$$

C.Q.F.D.



11. Vecteur normal d’une droite. Droites perpendiculaires

Définition 21. Un ***vecteur normal*** d’une droite est un vecteur ***non nul***, formant un ***angle droit*** avec cette droite.



Proposition 22. Si la droite d a comme équation cartésienne $ax+by+c=0$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un ***vecteur normal*** de d.

Démonstration. Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur, il suffit de vérifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Or : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\cdot\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-ba+ab=0$.

C.Q.F.D.

Proposition 23. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ***repère orthonormé*** du plan.

(1) Deux droites $d: ax+by+c=0$ et $d': a'x+b'y+c'=0$ sont ***perpendiculaires*** dans ce repère ssi

$$aa'+bb'=0. \tag{8.31}$$

(2) Deux droites $d: y=mx+p$ et $d': y=m'x+p'$ sont perpendiculaires dans ce repère ssi

$$mm'=-1 \tag{8.32}$$

Démonstration. (1) Des vecteurs directeurs de d et de d' sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$. Donc :

$$d\perp d' \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\perp\vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}\Leftrightarrow -b(-b')+aa'=0\Leftrightarrow aa'+bb'=0.$$

(2) Des vecteurs directeurs de d et de d' sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$. Donc :

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} \perp \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix} \Leftrightarrow 1\cdot 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow mm' = -1.$$

C.Q.F.D.

12. Equations cartésiennes de cercles

a) Equation d'un cercle de centre et de rayon donnés

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ***repère orthonormé*** du plan. Soit $\Omega(x_0,y_0)$ le centre et r le rayon du cercle $\mathcal{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
&M(x,y)\in\mathcal{C}\\
&\Leftrightarrow \overline{\Omega M} = r\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r \quad /(\ )^2\\
&\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \qquad (8.33)
\end{aligned}$$

(8.33) est une ***équation cartésienne*** du cercle $\mathcal{C}$, qu'on peut développer :

$$\begin{aligned}
&(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0{}^2+y_0{}^2-r^2 = 0 \qquad (8.34)
\end{aligned}$$

(8.34) est l'***équation cartésienne développée*** du cercle $\mathcal{C}$. Remarquons que cette équation est de la forme :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \qquad (8.35)$$

où a, b et c sont des constantes réelles déterminant le centre et le rayon du cercle. Plus précisément :

$$\begin{cases} a = -2x_0\\ b = -2y_0\\ c = x_0{}^2+y_0{}^2-r^2 \end{cases} \qquad (8.36)$$

Réciproquement, on peut se demander si toute équation du type (8.35) est celle d'un cercle dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Le système (8.36) est alors nécessairement satisfait, (x_0,y_0) étant les coordonnées du centre et r étant le rayon du cercle cherché. Donc :

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{a}{2}\\ y_0 = -\frac{b}{2} \end{cases} \qquad (8.37)$$

et $r^2 = x_0{}^2+y_0{}^2-c = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$.

Or, cette dernière équation, d'inconnue r, admet une solution ssi le membre de droite est ≥ 0, c.-à-d. si $a^2+b^2-4c \geq 0$. Dans ce cas :

$$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} \tag{8.38}$$

et le cercle existe. Remarquons qu'on a inclus dans (8.38) la possibilité $r = 0$, auquel cas, le ***cercle est réduit à son centre***. On parle alors d'un ***cercle-point***. Résumons notre étude dans la

Proposition 24. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ***repère orthonormé*** du plan.

1) Tout ***cercle*** a dans ce repère une équation cartésienne de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{8.39}$$

où a, b et c sont des constantes réelles.

2) Réciproquement, toute équation de la forme (8.39) est celle d'un cercle (éventuellement réduit à un point) ssi $a^2+b^2-4c \geq 0$. Dans ce cas, le centre du cercle admet les coordonnées $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ et son rayon est donné par :

$$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} \tag{8.40}$$

Si par contre $a^2+b^2-4c < 0$, alors l'ensemble des points vérifiant (8.39) est ***vide***.

Exemples. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

1) L'équation $x^2+y^2 = 9$ est celle du cercle de centre l'origine O et de rayon 3. Pour le voir, appliquer la proposition précédente ou mieux, comparer l'équation avec (8.33).

2) L'équation $x^2+y^2-2x+3y+1 = 0$ est celle d'un cercle car :

$$a^2+b^2-4c = 4+9-4\cdot 1 = 9 \geq 0\,.$$

Il s'agit du cercle de centre $\Omega\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$.

3) L'équation $x^2+y^2-2x+3y+5 = 0$ est celle de l'ensemble vide, car

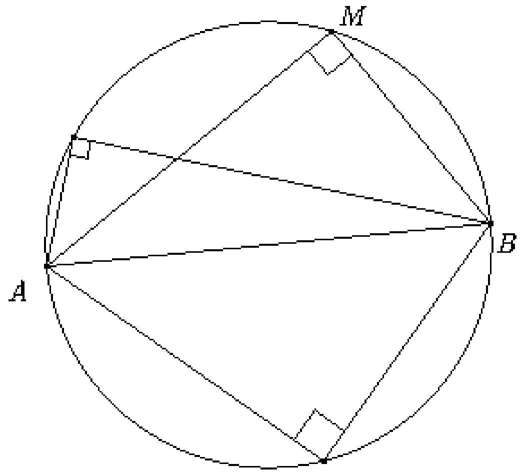
$$a^2+b^2-4c = 4+9-4\cdot 5 = -7 < 0\,.$$

b) Equation d'un cercle de diamètre donné

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un ***repère orthonormé*** du plan et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre donné $[AB]$, avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$. Il est alors clair que $\mathcal{C}$ admet comme centre le point $\Omega = \text{mil}\,[AB]$ et comme rayon $r = \overline{AB}/2$. A partir de ces observations, on peut facilement établir une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ à l'aide de la méthode du §a. Nous allons présenter ici une méthode plus rapide, en rappelant que $\mathcal{C}$ est le lieu géométrique des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}\,. \tag{8.41}$$

La figure ci-dessous illustre cette caractérisation de $\mathcal{C}$. Remarquons que (8.41) est aussi valable pour les points particuliers A et B, car le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur.



Donc :

$$\begin{aligned}
& M(x,y) \in \mathcal{C} \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0
\end{aligned} \tag{8.42}$$

En développant cette équation, on obtient bien une équation de la forme (8.39).

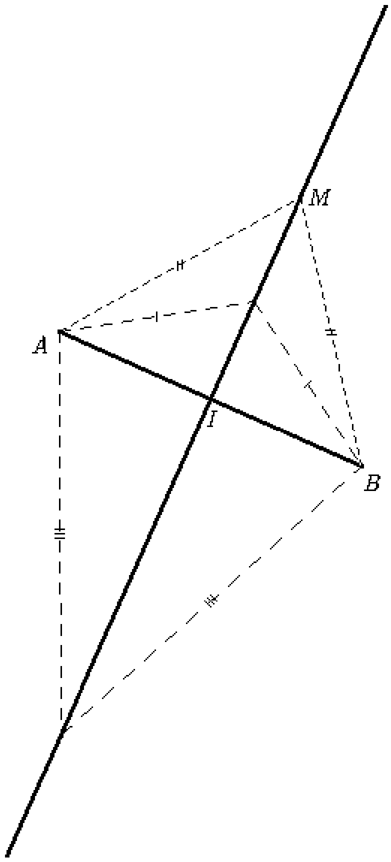
Exemple. Prenons $A(2,5)$ et $B(3,-1)$. Alors une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$\begin{aligned}
& (x-2)(x-3) + (y-5)(y+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 4y + 1 = 0
\end{aligned}$$

13. Autres lieux géométriques

a) Lieu des points équidistants de 2 points donnés

Nous savons bien que le lieu des points équidistants de 2 points donnés A et B est la médiatrice du segment $[AB]$, c.-à-d. la droite passant par $I = \text{mil}[AB]$ et perpendiculaire à $[AB]$. On a donc ***deux méthodes au choix*** pour établir une équation de la médiatrice de $[AB]$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, où $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$. Notons $\text{med}_{[AB]}$ cette médiatrice.



1re méthode :

$M(x,y) \in \text{med}_{[AB]}$

$\Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$

$\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$

En développant cette équation, on constate que les termes en x^2 et en y^2 disparaissent. On obtient donc bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$, c.-à-d. l'équation d'une droite.

Exemple. Prenons $A(2,5)$ et $B(3,-1)$. Alors une équation cartésienne de $\text{med}_{[AB]}$ est :

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow -4x + 6x - 10y - 2y + 29 - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 12y + 19 = 0$

2^{e} méthode :

On a : $I = \text{mil}[AB] \in \text{med}_{[AB]}$, où $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Un ***vecteur normal*** de $\text{med}_{[AB]}$ est : $\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

Donc :

$$
\begin{aligned}
& M(x,y) \in \text{med}_{[AB]} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \frac{x_A+x_B}{2} \\ y - \frac{y_A+y_B}{2} \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x - \tfrac{x_A+x_B}{2}\right)(x_B - x_A) + \left(y - \tfrac{y_A+y_B}{2}\right)(y_B - y_A) = 0
\end{aligned}
$$

En réduisant, on obtient une équation cartésienne de la médiatrice.

Exemple. Prenons à nouveau $A(2,5)$ et $B(3,-1)$. Alors une équation cartésienne de $\text{med}_{[AB]}$ est :

$$
\begin{aligned}
& \left(x - \tfrac{5}{2}\right) \cdot 1 + (y-2)(-6) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x - \tfrac{5}{2} - 6y + 12 = 0 \,/\cdot 2 \\
\Leftrightarrow\ & 2x - 12y + 19 = 0
\end{aligned}
$$

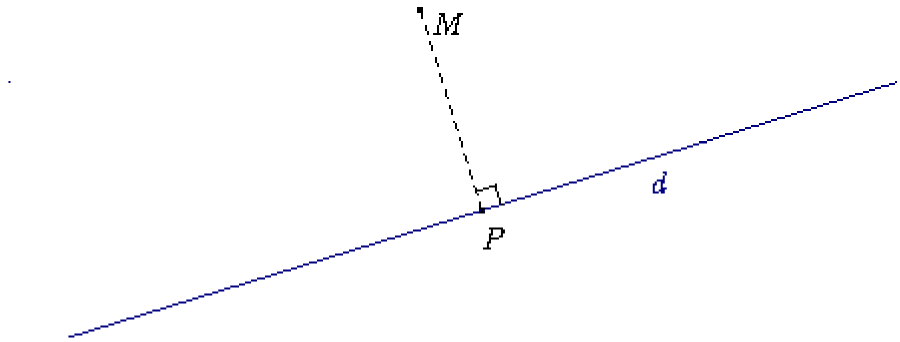
C'est bien l'équation obtenu avec la 1re méthode.

b) Lieu des points équidistants d'un point et d'une droite donnés

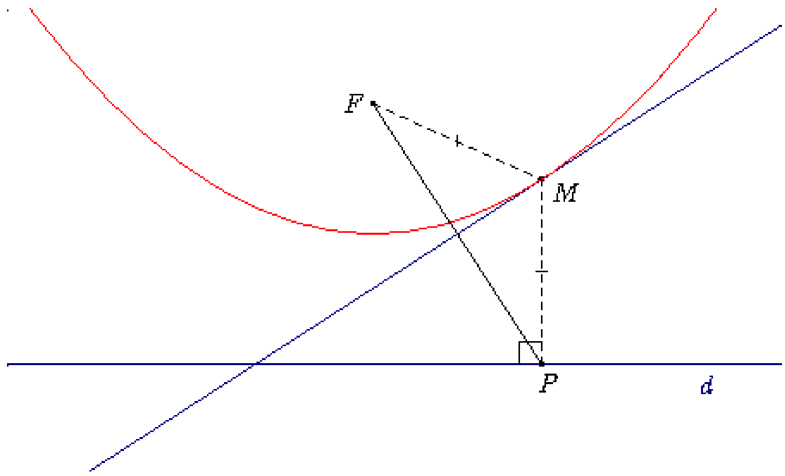
Par définition, ce lieu est une ***parabole*** :

> ***Définition***. Une ***parabole*** est le lieu des points équidistants d'un point F et d'une droite d donnés, la droite d ne contenant pas F. Le point F est appelé le ***foyer*** de la parabole et la droite d est appelée la ***directrice*** de d.

Rappel. La distance d'un point M à une droite d est la distance de M à P, où P est la ***projection orthogonale*** de M sur d.



La figure suivante montre une construction d'une parabole avec ***Cabri-Géomètre*** : P est un point variable sur la directrice d donnée. F est le foyer, donné également. M est obtenu comme point d'intersection de la médiatrice de $[FP]$ et de la perpendiculaire à d passant par P. On fait ensuite afficher par le Cabri-Géomètre le lieu de M lorsque P varie. (Construction à refaire en exercice !)



Nous n'allons pas établir l'équation cartésienne d'une parabole en toute généralité. En revanche, nous allons bien choisir notre repère cartésien, afin que l'équation devienne aussi simple que possible. Plus précisément,

Proposition 25. Etant donnés une ***unité de longueur*** dans le plan, un ***point*** F et une ***droite*** d ne contenant pas F, il existe un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans lequel la parabole de foyer F et de directrice d admet comme équation cartésienne

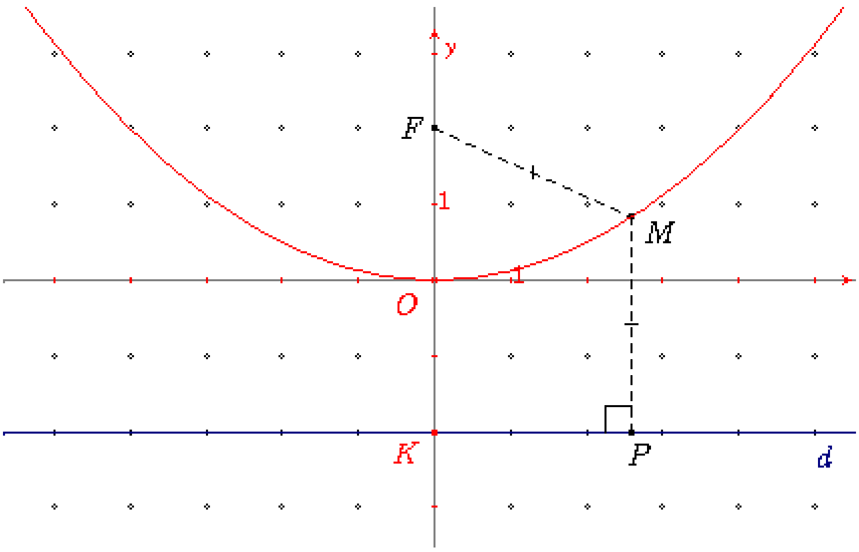
$$y = \frac{x^2}{2p}, \tag{8.43}$$

où p est la distance de F à d. p est appelé le ***paramètre*** de la parabole.

Démonstration. Soit

- $O = \text{mil}[FK]$, où K est la projection orthogonale de F sur d,
- Ox la droite parallèle à d passant par O,
- Oy la droite perpendiculaire à Ox passant par O (et comprenant K)

La graduation choisie unité sur les axes correspond à l'unité de longueur fixée à l'avance.



Alors on a :

$M(x,y) \in \mathcal{P}$, parabole de foyer F et de directrice d,

$\Leftrightarrow \overline{MF} = \text{distance}(M,d)$

$\Leftrightarrow \overline{FM} = \overline{PM}$ avec P projection orthogonale de M sur d et $P\left(x,-\frac{p}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y+\frac{p}{2}\right)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y-\frac{p}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{p}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{2p}$

C.Q.F.D.