CHAPITRE I

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN

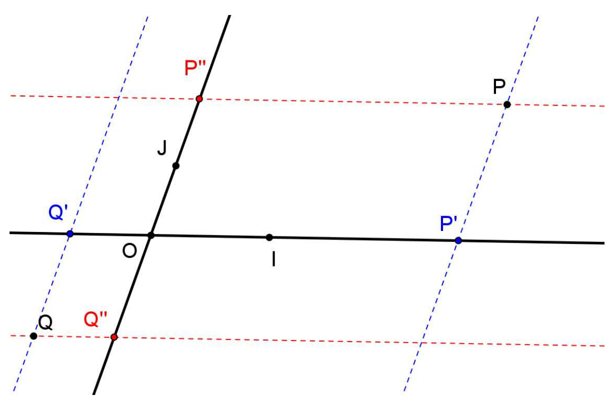
1) Repères cartésiens du plan

a) Construction

Un **repère du plan** est un système qui permet d'indiquer la *position exacte* de n'importe quel point du plan par la donnée de **deux nombres appelés coordonnées** de ce point. Ceci permet de remplacer les raisonnements (souvent difficiles !) sur des figures par un calcul (en général assez simple) sur les coordonnées des points de cette figure. Cette façon de faire de la géométrie a été introduite en 1637 par René Descartes (1596 – 1650) et est appelée **géométrie analytique**.

La manière la plus simple et la plus courante de construire un tel repère, appelé **repère cartésien**, est la suivante :

On fixe trois points non alignés *O*, *I*, *J* du plan et on trace les droites (OI) et (OJ). Pour déterminer les coordonnées d'un point quelconque *P* on trace une droite $d \parallel (OJ)$ qui coupe (OI) en un point P' et une droite $d' \parallel (OI)$ qui coupe (OJ) en un point P'' :



Comme $P' \in (OI)$ les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OP'}$ sont colinéaires donc il existe un nombre réel *unique* x_P tel que $\overrightarrow{OP'} = x_P \cdot \overrightarrow{OI}$. De même il existe un nombre réel *unique* y_P tel que $\overrightarrow{OP''} = y_P \cdot \overrightarrow{OJ}$. De plus $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}$ puisque $(OP'PP'') = \#$.

Ainsi il existe un **couple *unique*** de deux nombres réels $(x_P; y_P)$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = x_P \cdot \overrightarrow{OI} + y_P \cdot \overrightarrow{OJ}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont *fixes*, la connaissance des deux réels x_P et y_P nous renseigne sur la position exacte du point P !

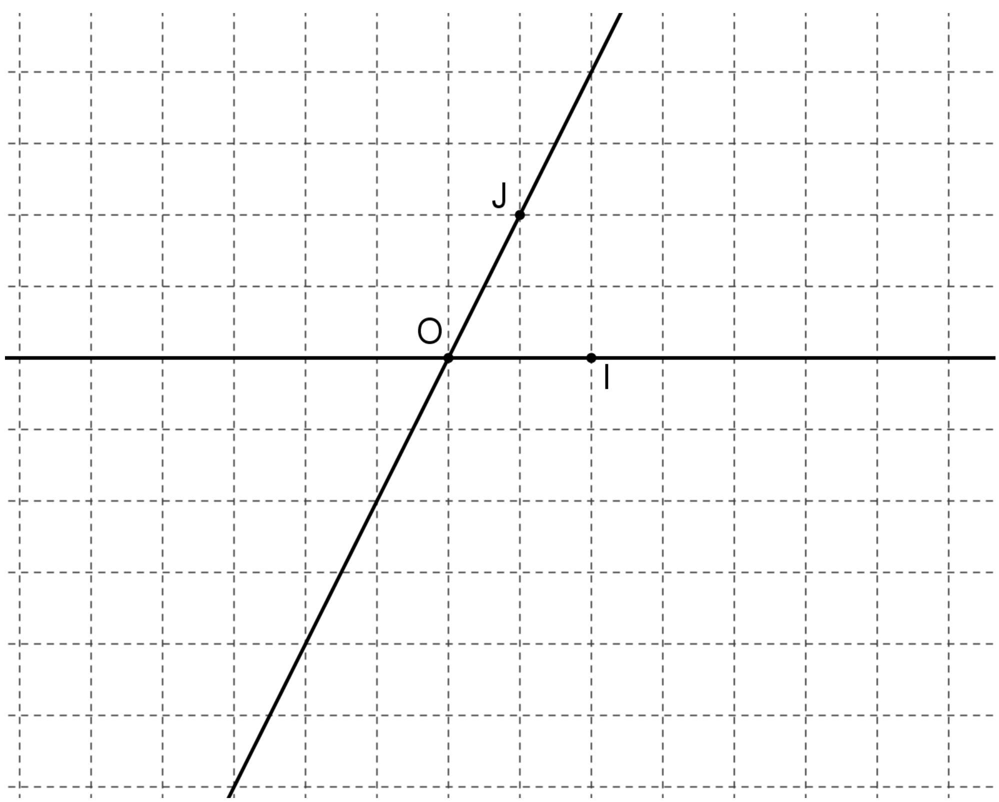
Vocabulaire

- x_P et y_P sont appelés **coordonnées** du point P dans le **repère cartésien** $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et on note : $P(x_P; y_P)$
- x_P est l'**abscisse** de P et y_P est l'**ordonnée** de P
- le point O est l'**origine** du repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$
- (OI) est l'**axe des abscisses** et (OJ) est l'**axe des ordonnées** du repère

Ainsi : $\boxed{P(x_P; y_P) \text{ dans } \left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x_P \cdot \overrightarrow{OI} + y_P \cdot \overrightarrow{OJ}}$

Exemple

Tracez les points $A(3;0)$, $B(-2;0)$, $C(2;1)$, $D(1;2)$, $E(-2;1,5)$, $F(-1,5;-2)$ et $G(2,5;-3)$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$:



Complétez :

1 est ………….……………. du point *C* et ………….……………. du point *D.*

$O(\ldots;\ldots)$, $I(\ldots;\ldots)$ et $J(\ldots;\ldots)$

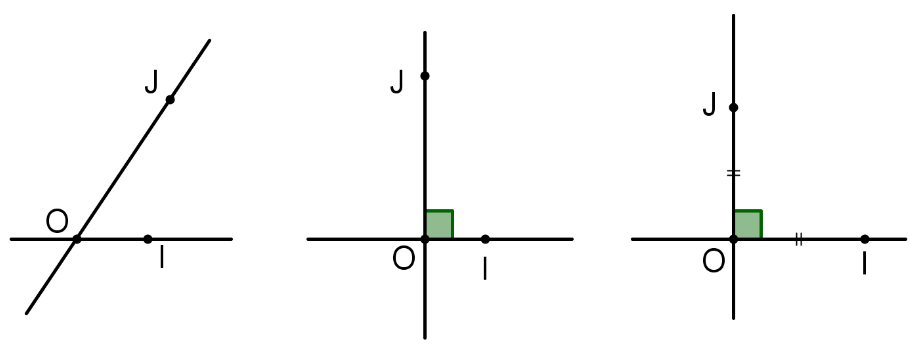
$M(5;-9)$ dans $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) \Leftrightarrow$ ....

Remarques

- Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont parfois notés plus simplement $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La condition que *O*, *I*, *J* sont des points non alignés est équivalente à dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.
- Si M est un point quelconque (non fixe) du plan, on note souvent ses coordonnées $M(x;y)$. L'axe des abscisses est aussi appelé **axe des *x*** et noté (Ox) et l'axe des ordonnées **axe des *y*** et noté (Oy).

b) Repères orthogonaux et orthonormés

Soit $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ un repère cartésien. Si $(OI)\perp(OJ)$ on dit que le repère est **orthogonal** et si *de plus* $OI=OJ$ on dit que le repère est **orthonormé** (on note : **R.O.N.**).



repère quelconque — *repère orthogonal* — *repère orthonormé*

A chaque fois que c'est possible on préfère choisir un R.O.N. parce que d'une part c'est le repère le plus « régulier » (donc facile à utiliser) et d'autre part parce que certaines formules ne sont utilisable *que* dans un R.O.N. ! Pour des raisons pratiques on est cependant parfois obligé de choisir un repère orthogonal, par exemple si on doit tracer des points comme $A(0,03;569)$. De même dans certains problèmes géométriques le repère le plus simple peut être un repère quelconque !

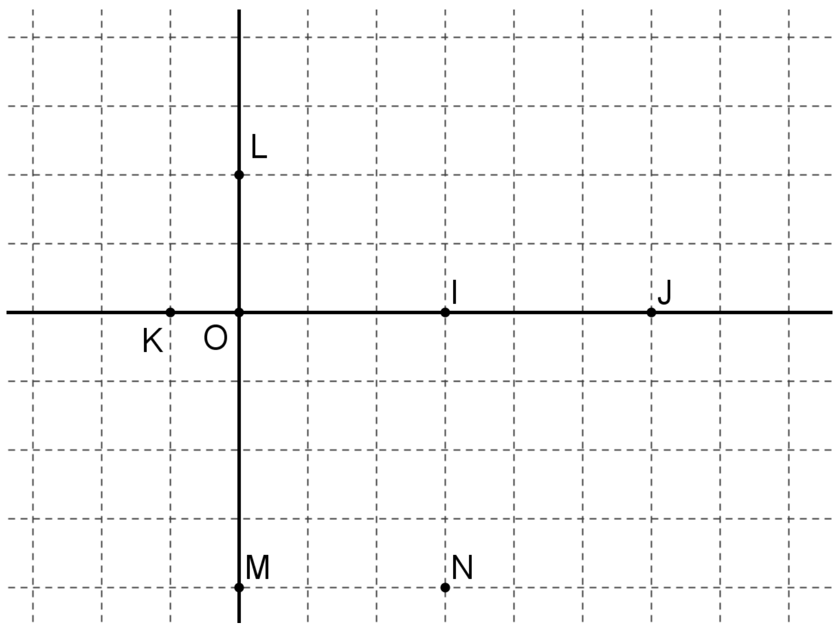
c) Changement de repère

On peut changer un repère de plusieurs façons :

- on change d'origine (changement le plus simple)
- on change l'ordre des vecteurs du repère (cela revient à transformer les abscisses en ordonnées et réciproquement)
- on change un ou les deux vecteurs du repère et/ou l'origine

Il est évident que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi !

Exemples



Dans $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OL}\right)$: $A(2;1)$ $B\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$ $C(-3;5)$ $I(\ldots;\ldots)$ $L(\ldots;\ldots)$ $P(x;y)$

Dans $\left(O,\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OI}\right)$: $A(\ldots;\ldots)$ $B(\ldots;\ldots)$ $C(\ldots;\ldots)$ $I(\ldots;\ldots)$ $L(\ldots;\ldots)$ $P(\ldots;\ldots)$

Dans $\left(K,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OL}\right)$: $A(\ldots;\ldots)$ $B(\ldots;\ldots)$ $C(\ldots;\ldots)$ $I(\ldots;\ldots)$ $L(\ldots;\ldots)$ $P(\ldots;\ldots)$

Dans $\left(N,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OL}\right)$: $A(\ldots;\ldots)$ $B(\ldots;\ldots)$ $C(\ldots;\ldots)$ $I(\ldots;\ldots)$ $L(\ldots;\ldots)$ $P(\ldots;\ldots)$

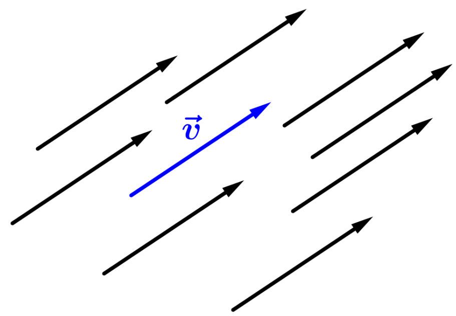
Dans $\left(O,\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OM}\right)$: $A(\ldots;\ldots)$ $B(\ldots;\ldots)$ $C(\ldots;\ldots)$ $I(\ldots;\ldots)$ $L(\ldots;\ldots)$ $P(\ldots;\ldots)$

Dans $\left(O,-\frac{1}{6}\overrightarrow{OJ},\frac{1}{3}\overrightarrow{LM}\right)$: $A(\ldots;\ldots)$ $B(\ldots;\ldots)$ $C(\ldots;\ldots)$ $I(\ldots;\ldots)$ $L(\ldots;\ldots)$ $P(\ldots;\ldots)$

2) Coordonnées d'un vecteur

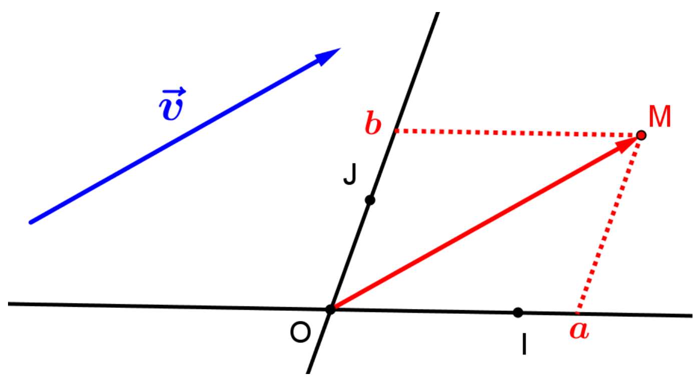
Rappelons qu'un **vecteur** $\vec{v}$ est un ensemble (infini) de flèches qui ont :

- même direction
- même sens
- même longueur appelée norme de $\vec{v}$ et notée $\|\vec{v}\|$



Chacune de ces flèches est **un représentant** du vecteur et il est évident que si on connaît un représentant d'un vecteur on les connaît tous !

Soit un repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ du plan et un vecteur $\vec{v}$, alors il existe *un seul* point $M\left(a;b\right)$ tel que $\vec{v}=\overrightarrow{OM}$.



Connaître ce point *M,* c'est-à-dire ses coordonnées *a* et *b,* c'est connaître un représentant de $\vec{v}$ donc le vecteur $\vec{v}$ lui-même. Il est donc naturel de poser que les coordonnées du point M sont également celles du vecteur $\vec{v}$. Pour faire la différence entre les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur, on note souvent (mais pas toujours) celles-ci *verticalement* :

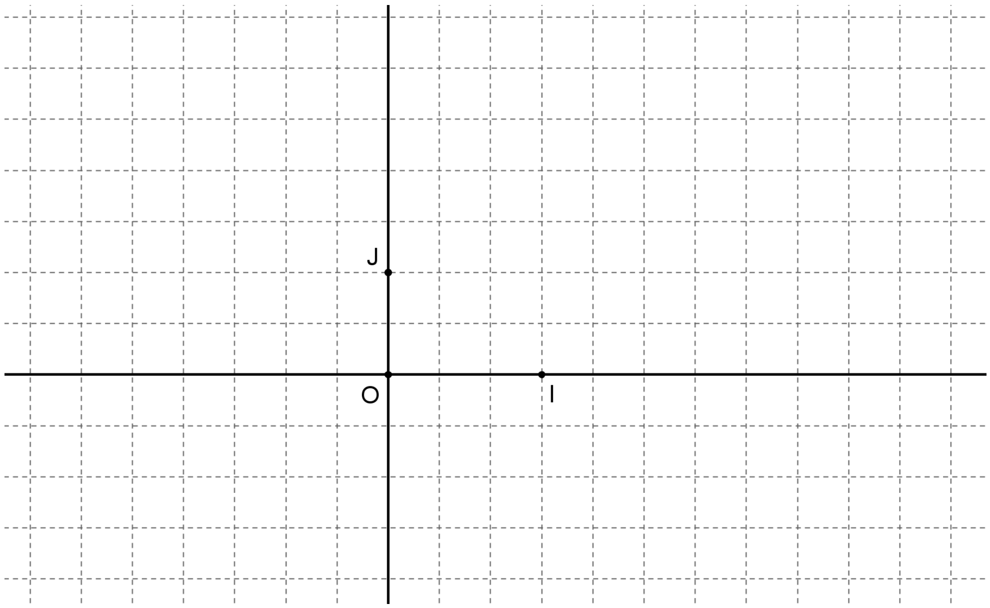
$$\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \text{ dans je repère } \left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)\Leftrightarrow \vec{v}=a\cdot\overrightarrow{OI}+b\cdot\overrightarrow{OJ}}$$

Exemples

Complétez : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$, $\vec{0}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$

Tracez un représentant de chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\2\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2{,}5\end{pmatrix},\ \vec{w}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix},\ \vec{s}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-1{,}5\end{pmatrix},\ \vec{t}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \vec{p}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$



3) Calcul vectoriel

Problème

Soit un repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, les points $A\left(x_A;y_A\right)$, $B\left(x_B;y_B\right)$ et $C\left(x_C;y_C\right)$, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ et un nombre réel α. Quelles sont les coordonnées de $\alpha\cdot\vec{u}$? de $\vec{u}+\vec{v}$? de $\overrightarrow{AB}$? du milieu I de $[AB]$? du centre de gravité G du triangle $\Delta(ABC)$? Comment calculer AB ? $\|\vec{u}\|$? Certaines formules sont valables dans n'importe quel repère, d'autres le sont uniquement dans un R.O.N..

a) Formules valables dans un repère quelconque

- $\alpha\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_u\\\alpha\cdot y_u\end{pmatrix}$

  En effet $\vec{u}=x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}$ donc $\alpha\cdot\vec{u}=\alpha\cdot\left(x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}\right)=\alpha x_u\cdot\vec{i}+\alpha y_u\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\alpha\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_u\\\alpha\cdot y_u\end{pmatrix}$.

- $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x_u\\-y_u\end{pmatrix}$

  En effet il suffit d'appliquer la propriété précédente avec $\alpha=-1$

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_u+x_v \\ y_u+y_v \end{pmatrix}$

  En effet $\vec{u}+\vec{v}=\left(x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}\right)+\left(x_v\cdot\vec{i}+y_v\cdot\vec{j}\right)=\left(x_u+x_v\right)\cdot\vec{i}+\left(y_u+y_v\right)\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_u+x_v \\ y_u+y_v \end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

  En effet $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, or $A\left(x_A;y_A\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A\cdot\vec{i}+y_A\cdot\vec{j}$

  et $B\left(x_B;y_B\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}=x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}$ d'où :

  $$\overrightarrow{AB}=\left(x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}\right)-\left(x_A\cdot\vec{i}+y_A\cdot\vec{j}\right)=\left(x_B-x_A\right)\cdot\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$$

- $I=milieu\ de\left[AB\right]\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

  En effet $I\left(x_I;y_I\right)=milieu\ de\left[AB\right]\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

  $$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_A-x_I \\ y_A-y_I \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_B-x_I \\ y_B-y_I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_A-x_I+x_B-x_I \\ y_A-y_I+y_B-y_I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{cases} x_A+x_B-2x_I=0 \\ y_A+y_B-2y_I=0 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2}=x_I \\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=y_I \end{cases}$$

- $G=centre\ de\ gravit\acute{e}\ de\ \Delta\left(ABC\right)\Leftrightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

  En effet $G\left(x_G;y_G\right)=centre\ de\ gravit\acute{e}\ de\ \Delta\left(ABC\right)$

  $$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_A-x_G \\ y_A-y_G \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_B-x_G \\ y_B-y_G \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_C-x_G \\ y_C-y_G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow\begin{cases} x_A+x_B+x_C-3x_G=0 \\ y_A+y_B+y_C-3y_G=0 \end{cases}$$

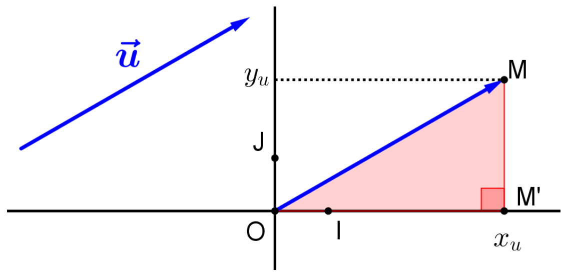
  $$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=x_G \\ \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=y_G \end{cases}$$

b) Formules valables uniquement dans un repère orthonormé

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$

  Démonstration

  Soient $M(x_u ; y_u)$ et $M'(x_u ; 0)$:



  Comme $(OI) \perp (OJ)$ le triangle $\Delta(OMM')$ est rectangle en M' donc d'après le théorème de Pythagore $OM^2 = OM'^2 + MM'^2$. Or $OM = \|\vec{u}\|$, $OM' = |x_u|$ et $MM' = |y_u|$ donc $\|\vec{u}\|^2 = |x_u|^2 + |y_u|^2$ et comme pour tout réel r on a $|r|^2 = r^2$ on obtient :

$$\|\vec{u}\|^2 = x_u{}^2 + y_u{}^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x_u{}^2 + y_u{}^2}$$

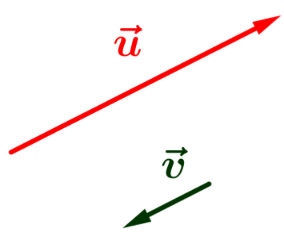
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

  En effet $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc il suffit d'appliquer la formule précédente.

Exercices 1 - 7

4) Vecteurs colinéaires

- **Définition** : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.



- En particulier pour tout vecteur $\vec{u}$ on a $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$ donc le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.
- ***Exemples***

  Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}=k\cdot\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9k\\21k\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}6=-9k\\-14=21k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{6}{9}\\k=-\frac{14}{21}\end{cases}\Leftrightarrow k=-\frac{2}{3}\text{ donc }\vec{u}=-\tfrac{2}{3}\cdot\vec{v}.$$

$$\vec{u}=k\cdot\vec{w}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5k\\-12k\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}6=5k\\-14=-12k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{6}{5}\\k=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}\end{cases}\text{ impossible car }\frac{6}{5}\neq\frac{7}{6}$$

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires mais pas $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

- *Le théorème suivant donne une méthode plus simple pour déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou non.*

Théorème

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ dans un repère quelconque $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors

$$\boxed{\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires }\Leftrightarrow x_u\cdot y_v=x_v\cdot y_u}$$

Démonstration

1er cas : $x_v\neq0$ et $y_v\neq0$

$$\begin{aligned}\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires }&\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\quad\vec{u}=k\cdot\vec{v}\\&\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\quad\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx_v\\ky_v\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\quad\begin{cases}x_u=kx_v\ |\cdot y_v\neq0\\y_u=ky_v\ |\cdot x_v\neq0\end{cases}\\&\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}\quad\begin{cases}x_uy_v=kx_vy_v\\x_vy_u=kx_vy_v\end{cases}\\&\Leftrightarrow x_uy_v=x_vy_u\quad(*)\end{aligned}$$

2e cas : $x_v=0\Leftrightarrow\vec{v}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$ est également colinéaire à $\vec{j}$ donc $x_u=0$ et par conséquent l'égalité (*) est vérifiée.

Réciproquement si l'égalité (*) est vérifiée on a $x_u\cdot y_v=0\cdot y_u=0\Leftrightarrow x_u=0$ ou $y_v=0$. Si $x_u=0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires et par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aussi. Si $y_v=0$ alors $\vec{v}=\vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont encore colinéaires.

3e cas : $y_v=0\Leftrightarrow\vec{v}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires

La démonstration est analogue à celle du 2e cas.

CQFD

- ***Exemples***

  Reprenons les exemples précédents :

  $6\cdot 21=126$ et $-14\cdot(-9)=126$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

  $6\cdot(-12)=-72$ et $-14\cdot 5=-70\neq -72$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires

- Voici **deux applications** pratiques de cette propriété :

  (1) A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

  (2) $(AB)\parallel(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

- ***Exemples***

  Soient $A(3;-5)$, $B(-8;-1)$, $C(-30;7)$, $D(-4;1)$ et $E(14;-9)$ alors :

  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-33\\12\end{pmatrix}$ et $-11\cdot 12=4\cdot(-33)$ vrai donc *A*, *B* et *C* sont alignés.

  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-7\\6\end{pmatrix}$ et $-11\cdot 6=4\cdot(-7)$ faux donc *A*, *B* et *D* ne sont pas alignés.

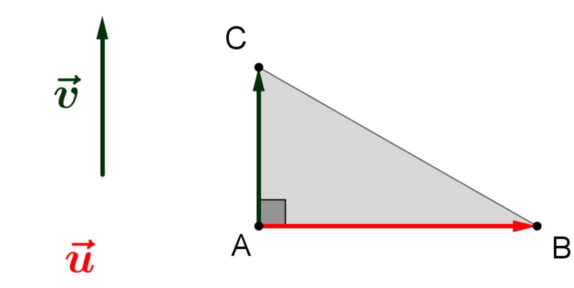
  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}44\\-16\end{pmatrix}$ et $-11\cdot(-16)=4\cdot 44$ vrai donc $(AB)\parallel(CE)$

  $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-22\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}18\\-10\end{pmatrix}$ et $-22\cdot(-10)=8\cdot 18$ faux donc $(BC)\nparallel(DE)$

Exercices 8 - 10

5) Vecteurs orthogonaux

- **Définition** : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si l'un au moins des deux vecteurs est nul **ou** s'il existe trois points non alignés *A*, *B*, *C* tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et le triangle $\Delta(ABC)$ est rectangle en *A*.



  On note : $\vec{u}\perp\vec{v}$

- *Le théorème suivant donne une méthode très simple pour déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux ou non.*

Théorème

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ dans un **R.O.N.** $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Alors :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v = 0}$$

Démonstration

<u>1^er cas</u> : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Supposons par exemple que $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $0 \cdot x_v + 0 \cdot y_v = 0$.

<u>2^e cas</u> : $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Soient $B(x_u ; y_u)$ et $C(x_v ; y_v)$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \Delta(OBC) \text{ rectangle en } O \\
&\Leftrightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2 \\
&\Leftrightarrow (x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2 = x_u^{\,2} + y_u^{\,2} + x_v^{\,2} + y_v^{\,2} \\
&\Leftrightarrow \cancel{x_u^{\,2}} - 2x_u x_v + \cancel{x_v^{\,2}} + \cancel{y_u^{\,2}} - 2y_u y_v + \cancel{y_v^{\,2}} = \cancel{x_u^{\,2}} + \cancel{y_u^{\,2}} + \cancel{x_v^{\,2}} + \cancel{y_v^{\,2}} \\
&\Leftrightarrow -2x_u x_v - 2y_u y_v = 0 \quad \big| :(-2) \\
&\Leftrightarrow x_u x_v + y_u y_v = 0
\end{aligned}$$

CQFD

- **Définition**

  Le nombre $x_u x_v + y_u y_v$ est appelé **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

  Ainsi dans un R.O.N. on a :

  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v \quad \text{et} \quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- ***Exemples***

  Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ -21 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$.

  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 14 \cdot (-9) + (-6)(-21) = -126 + 126 = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 14 \cdot 7 + (-6) \cdot 16 = 98 - 96 = 2 \neq 0$ donc $\vec{u} \not\perp \vec{w}$

- **Applications**

  (1) $\Delta(ABC)$ rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

  (2) $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

- ***Exemples***

  Soient $P(-4;7)$, $Q(5;-3)$, $R(6;16)$, $S(15;6)$ et $T(-2;9)$ dans un R.O.N. alors :

  $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}9\\-10\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix}$ et $9\cdot10+(-10)\cdot9=0$ donc $\Delta(PQR)$ est rectangle en *P*.

  $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}9\\-10\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}-8\\-7\end{pmatrix}$ et $9\cdot(-8)+(-10)\cdot(-7)\neq0$ donc $\Delta(RST)$ n'est pas rectangle en *R*.

  $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\19\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix}19\\-1\end{pmatrix}$ et $1\cdot19+19\cdot(-1)=0$ donc $(QR)\perp(PS)$.

  $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\19\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PT}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $1\cdot2+19\cdot2\neq0$ donc $(QR)\not\perp(PT)$.

Exercices 11 - 13

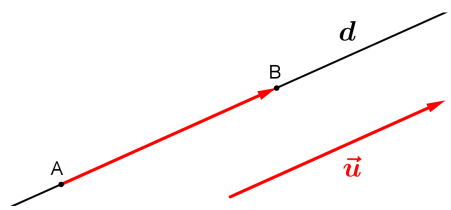
6) Equations cartésiennes d'une droite

a) Vecteur directeur d'une droite

- **Définition**

  Soi *d* une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

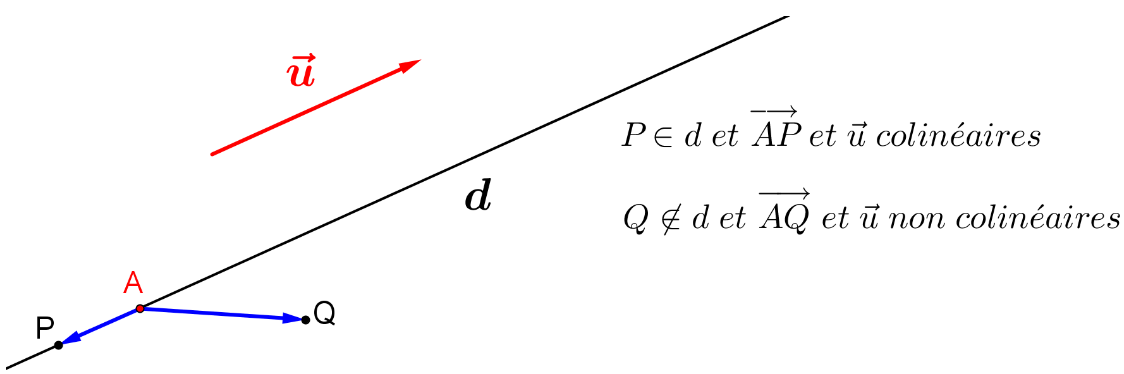
  On dit que $\vec{u}$ est *un* **vecteur directeur** de *d* ssi il existe deux points (distincts) *A* et *B* sur *d* tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.



- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires.
- Un vecteur directeur indique la direction d'une droite donc toutes les droites ayant comme vecteur directeur un même vecteur $\vec{u}$ sont parallèles.
- **Propriété**

  Soit *d* une droite passant par le point *A* et de vecteur directeur $\vec{u}$, alors.

$$\boxed{\forall P \quad P\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}}$$



- Soient $A(x_A;y_A)\in d$, $P(x;y)$ un point du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d dans un **repère quelconque** $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors d'après la propriété précédente on a :

$$\begin{aligned}P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow (x-x_A)y_u=(y-y_A)x_u\\ &\Leftrightarrow xy_u-x_Ay_u=yx_u-y_Ax_u\\ &\Leftrightarrow y_ux-x_uy-x_Ay_u+y_Ax_u=0\end{aligned}$$

En posant $a=y_u$, $b=-x_u$ et $c=-x_Ay_u+y_Ax_u$ on obtient :

$$P(x;y)\in d \Leftrightarrow ax+by+c=0$$

On dit que $ax+by+c=0$ est *une* **équation cartésienne** de *d*, ce qui signifie qu'un point *P* appartient à la droite *d* ssi ses coordonnées vérifient cette équation.

Notation : $d\equiv ax+by+c=0$

Réciproquement soit l'équation $ax+by+c=0$ où a, b, c sont trois coefficients réels tel que $(a;b)\neq(0;0)$. Supposons par exemple que $a\neq 0$ et posons $A\left(-\frac{c}{a};0\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et *d* la droite passant par *A* de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors :

$$\begin{aligned}P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x+\frac{c}{a}\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{c}{a}\right)a=-by\\ &\Leftrightarrow ax+c=-by\\ &\Leftrightarrow ax+by+c=0\end{aligned}$$

Si $a=0$ alors $b\neq 0$ et en posant $A\left(0;-\frac{c}{b}\right)$ on obtient le même résultat par un calcul analogue.

Ceci montre que toute équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ est une équation cartésienne d'une droite *d* de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

- ***Exemple***

Soit d la droite passant par $A(2;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow 4(x-2)=-1\cdot(y+3)\\ &\Leftrightarrow 4x-8=-y-3\\ &\Leftrightarrow 4x+y-5=0\end{aligned}$$

D'où : $d \equiv 4x+y-5=0$

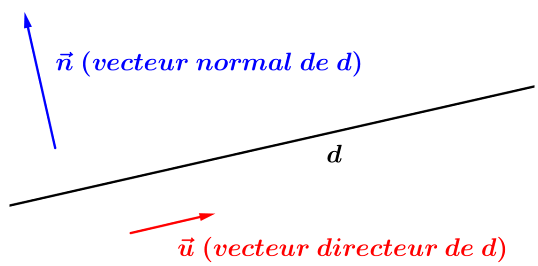
$B(7;-23)\in d$ car $4\cdot 7-23-5=0$

$C(-3;11)\notin d$ car $4\cdot(-3)+11-5\neq 0$

b) Vecteur normal d'une droite

- **Définition**

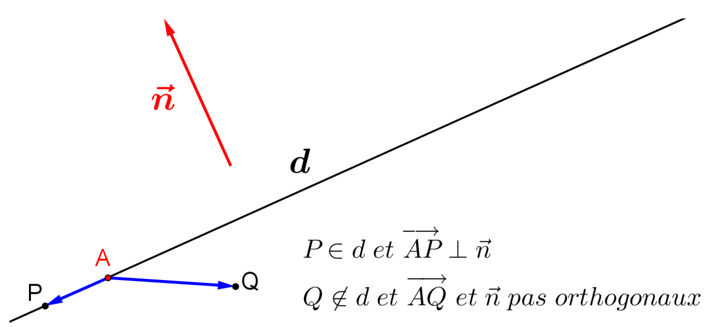
Soi d une droite et $\vec{n}$ un vecteur <u>non nul</u>. On dit que $\vec{n}$ est *un* **vecteur normal** de d ssi $\vec{n}$ est orthogonal à *tout* vecteur directeur de d.



- Toute droite admet une infinité de vecteurs normaux qui sont tous colinéaires.
- Tout vecteur orthogonal à un vecteur normal est un vecteur directeur de d.
- **Propriété**

Soit d une droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$, alors.

$$\boxed{\forall P \quad P\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}}$$



- Soient $A(x_A;y_A)\in d$, $P(x;y)$ un point du plan et $\vec{n}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ un vecteur normal de d dans un **R.O.N.** $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors d'après la propriété précédente on a :

$$\begin{aligned}P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\perp\vec{n}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow (x-x_A)x_n+(y-y_A)y_n=0\\&\Leftrightarrow xx_n-x_Ax_n+yy_n-y_Ay_n=0\end{aligned}$$

En posant $a=x_n$, $b=y_n$ et $c=-x_Ax_n-y_Ay_n$ on obtient : $P(x;y)\in d\Leftrightarrow ax+by+c=0$

On peut montrer comme précédemment que **toute équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ est une équation cartésienne d'une droite *d* de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.**

- ***Exemple***

Soit d la droite passant par $A(7;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$, alors :

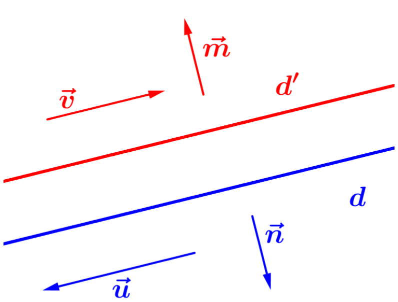
$$\begin{aligned}P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x-7\\y+2\end{pmatrix}\perp\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow 3(x-7)-5(y+2)=0\\&\Leftrightarrow 3x-21-5y-10=0\end{aligned}$$

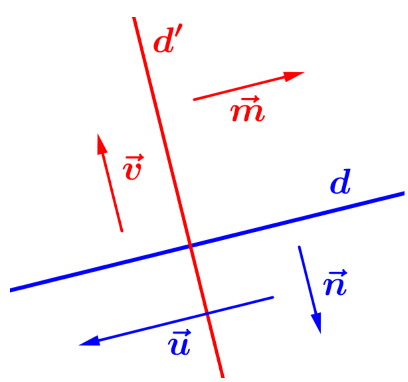
D'où : $d\equiv 3x-5y-31=0$

c) Droites parallèles et droites perpendiculaires

Soient d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et de vecteur normal $\vec{n}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et de vecteur normal $\vec{m}$. Alors il est évident que

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{m}\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{v}$
- $d\perp d'\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{m}\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires





Exercices 14 – 18

7) Equation réduite d'une droite

- ***Exemple***

Soit la droite $d \equiv 3x-2y+5=0$. Pour déterminer un point de *d*, on remplace dans cette équation *x* par n'importe quelle valeur (*p.ex.* $x=-7$) et on résout l'équation d'inconnue *y* obtenue : $-21-2y+5=0 \Leftrightarrow y=-8$. Ainsi $A(-7;-8)\in d$. *Autre méthode* : on commence par exprimer *y* en fonction de *x* : $3x-2y+5=0 \Leftrightarrow -2y=-3x-5 \Leftrightarrow y=1{,}5x+2{,}5$, ce qui permet un calcul plus rapide pour différentes valeurs de *x* :

si $x=-7$ alors $y=1{,}5\cdot(-7)+2{,}5=-8$

si $x=4$ alors $y=1{,}5\cdot 4+2{,}5=8{,}5$

si $x=26$ alors $y=1{,}5\cdot 26+2{,}5=41{,}5$, etc

L'équation $y=1{,}5x+2{,}5$ est appelée **équation réduite** de *d*.

- **Cas général**

Soit $d \equiv ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ une équation cartésienne d'une droite *d*, alors : $ax+by+c=0 \Leftrightarrow by=-ax-c$. Pour exprimer *y* en fonction de *x* il faut diviser les deux membres de l'équation par *b* ce qui nous amène à distinguer deux cas.

1^er^ cas : $b\neq 0$

$by=-ax-c \quad |:b \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ et en posant $p=-\frac{a}{b}$ et $q=-\frac{c}{b}$ l'équation de la droite a la forme : $d \equiv y=px+q$ appelée **équation réduite** de *d*.

2^e^ cas : $b=0$

Alors $a\neq 0$ puisque $(a;b)\neq(0;0)$ d'où: $d\equiv ax+0y+c=0 \Leftrightarrow ax=-c \quad |:a \Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}$ et en posant $k=-\frac{c}{a}$ l'équation de la droite a la forme : $d\equiv x=k$ appelée également **équation réduite** de *d*.

Ainsi chaque droite *d* admet une équation, appelée **équation réduite de *d***, de l'une des deux formes suivantes :

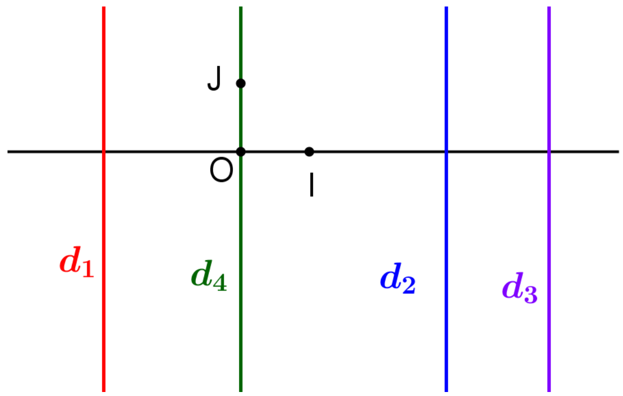
$$\boxed{d \equiv y=px+q \quad ou \quad d\equiv x=k}$$

- **Interprétation graphique**

  - Nous savons (*voir p 13*) que la droite $d\equiv ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ et que l'axe des *y* a pour vecteur directeur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Or $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires ssi $-b \cdot 1 = a \cdot 0 \Leftrightarrow -b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ en d'autres termes :

$$\boxed{d \parallel (Oy) \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow d \equiv x = k}.$$

Exemples : $d_1 \equiv x = -2$, $d_2 \equiv x = 3$, $d_3 \equiv x = 4{,}5$ et $d_4 \equiv x = 0$ (il est évident que $d_4 = (Oy)$).

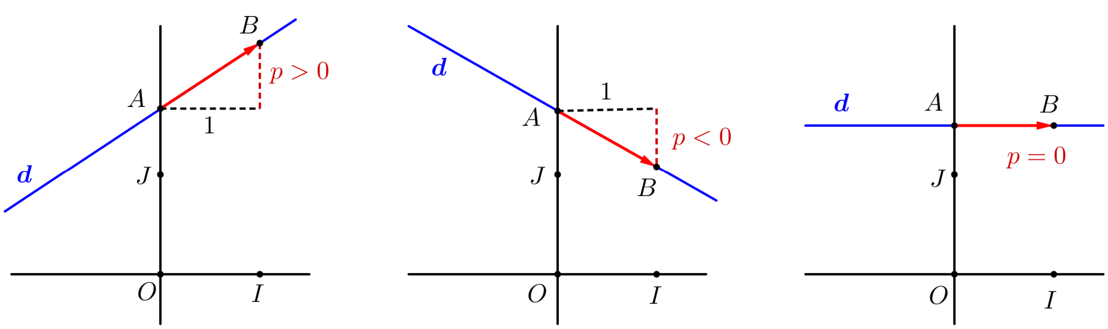


- Soit $d \equiv y = px + q$

  Si $x = 0$ alors $y = q$ donc $A(0;q) \in d \cap (Oy)$. Ainsi A est le point d'intersection de d et de l'axe des y et c'est pourquoi q est appelé **ordonnée à l'origine**.

  Si $x = 1$ alors $y = p + q$ donc $B(1; p+q) \in d$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de *d*. Trois cas peuvent alors se présenter :

  - si $p > 0$ la droite « monte » et d'autant plus vite que p est grand
  - si $p < 0$ la droite « descend » et d'autant plus vite que p est petit
  - si $p = 0$ alors $d \parallel (Ox)$



p est appelé **pente** ou **coefficient directeur** de *d*.

- Soient deux droites *non parallèles aux axes* d'équations réduites $d \equiv y = px + q$ et $d' \equiv y = p'x + q'$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ respectivement $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix}$. Alors :
  - $\boxed{d \parallel d' \Leftrightarrow p = p'}$ (dans un repère quelconque)

    En effet $d \parallel d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires $\Leftrightarrow p \cdot 1 = 1 \cdot p' \Leftrightarrow p = p'$
  - $\boxed{d \perp d' \Leftrightarrow pp' = -1 \Leftrightarrow p' = -\frac{1}{p}}$ (dans un **R.O.N**)

    En effet $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u}'$ orthogonaux $\Leftrightarrow 1 \cdot 1 + p \cdot p' = 0 \Leftrightarrow pp' = -1 \Leftrightarrow p' = -\frac{1}{p}$.

Exercices 19 - 21

8) Intersection de deux droites

Soient deux droites $d \equiv ax + by = c$ et $d' \equiv a'x + b'y = c'$ dans un repère quelconque alors un point $M(x, y) \in d \cap d'$ ssi ses coordonnées vérifient les deux équations, c'est-à-dire le **système d'équations linéaires** :

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Or les deux droites d et d' sont soit sécantes, soit strictement parallèles, soit confondues, c'est-à-dire que le système a soit **une seule solution** (**un couple** de deux nombres), soit aucune solution, soit une infinité de solutions (tous les points des deux droites confondues).

En désignant par $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ les vecteurs directeurs de d et d', on sait que :

$$d \parallel d' \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow ab' = a'b \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

$$d \text{ et } d' \text{ sont sécantes} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ ne sont pas colinéaires} \Leftrightarrow ab' \neq a'b \Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$$

Le nombre de solutions du système dépend donc du nombre $ab' - a'b$ qu'on appelle **déterminant du système** et qu'on note :

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b}$$

Exemples

- $\begin{cases} d \equiv 5x - 6y = -2 & (1) \\ d' \equiv -3x + 4y = 11 & (2) \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - (-3) \cdot (-6) = 20 - 18 = 2 \neq 0$ donc le système a une seule solution (c-à-d les deux droites sont sécantes).

- $\begin{cases} d \equiv 15x-5y=1 & (1) \\ d' \equiv 12x-4y=-3 & (2) \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -5 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} = 15\cdot(-4)-12\cdot(-5)=-60+60=0$ donc les deux droites sont parallèles. Plus précisément :

  $(2) \Leftrightarrow 4y=12x+3 \Leftrightarrow y=3x+\dfrac{3}{4}$

  dans (1) : $15x-5\left(3x+\dfrac{3}{4}\right)-1=0 \Leftrightarrow 15x-15x-\dfrac{15}{4}=1 \Leftrightarrow -\dfrac{15}{4}=1$ impossible donc le système n'a pas de solution et $d\cap d'=\varnothing$ (les deux droites sont *strictement parallèles*).

- $\begin{cases} d \equiv 15x-5y=-10 & (1) \\ d' \equiv 12x-4y=-8 & (2) \end{cases}$ comme pour l'exemple précédent le déterminant vaut 0 :

  $(2) \Leftrightarrow 4y=12x+8 \Leftrightarrow y=3x+2$

  dans (1) : $15x-5(3x+2)=-10 \Leftrightarrow 15x-15x-10+10=0$ ce qui est vrai pour tout x donc le système a une infinité de solutions, à savoir *tous les couples* $(x;3x+2)$ avec $x\in\mathbb{R}$ (les deux droites sont *confondues*).

Supposons maintenant que $\Delta = ab'-a'b \neq 0$, alors le système a une seule solution :

$$\begin{cases} ax+by=c \,|\cdot b' \\ a'x+b'y=c' \,|\cdot(-b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab'x+bb'y=b'c \\ -ba'x-bb'y=-bc' \end{cases} |(+) \Rightarrow (ab'-a'b)x=b'c-bc' \Rightarrow \Delta\cdot x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} ax+by=c \,|\cdot(-a') \\ a'x+b'y=c' \,|\cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -aa'x-a'by=-a'c \\ aa'x+ab'y=ac' \end{cases} |(+) \Rightarrow (ab'-a'b)y=ac'-a'c \Rightarrow \Delta\cdot y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$ en

posant $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ on obtient :

$$\Delta\cdot x=\Delta_x \Leftrightarrow x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ et } \Delta\cdot y=\Delta_y \Leftrightarrow y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

On peut alors énoncer la règle suivante appelée **règle de Cramer** :

> Pour résoudre de système $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$ on commence par calculer son **déterminant principal** : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$.
>
> Si $\Delta\neq 0$ alors le système admet une solution unique :
>
> $$S=\left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta};\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\} \text{ où } \Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$
>
> Si $\Delta=0$ alors le système admet une infinité ou aucune solutions.

Exemple

Soient $d \equiv 3x-2y=17$ et $d' \equiv 4x+7y=13$, pour déterminer l'intersection de ces deux droites, il faut résoudre le système : $\begin{cases} 3x-2y=17 & (1) \\ 4x+7y=13 & (2) \end{cases}$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21+8=29 \neq 0$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 17 & -2 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = 119+26=145$ donc $x = \dfrac{145}{29} = 5$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 39-68=-29$ donc $y = \dfrac{-29}{29} = -1$

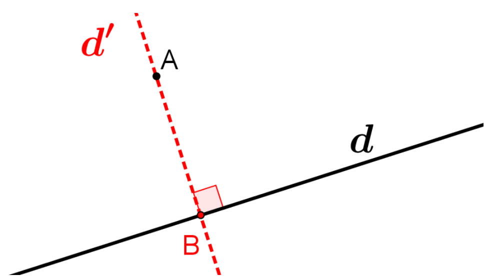
Les deux droites se coupent en $I(5;-1)$.

Exercices 22 - 27

9) Distance d'un point à une droite

- **Définition**

  Soit un point A et une droite d. On appelle **distance de *A* à *d***, et on note Ad, la distance de A au point $B \in d$ tel que $(AB) \perp d$.



Ad = AB

- **Théorème**

  Dans un R.O.N. soient un point $A(x_A;y_A)$, une droite $d \equiv ax+by+c=0$, alors :

$$\boxed{Ad = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Démonstration

Dans un R.O.N. soient un point $A(x_A;y_A)$, une droite $d \equiv ax+by+c=0$ et la droite d' passant par *A* et perpendiculaire à *d*. Alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de *d* et on a :

$$M(x;y) \in d' \Leftrightarrow \overline{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \perp \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow -bx+bx_A+ay-ay_A=0 \Leftrightarrow -bx+ay=ay_A-bx_A$$

$$B(x;y) \in d \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=-c \\ -bx+ay=ay_A-bx_A \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2 \neq 0 \text{ car } (a;b)\neq(0;0)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -c & b \\ ay_A-bx_A & a \end{vmatrix} = -ac-aby_A+b^2x_A \text{ donc } x=\frac{-ac-aby_A+b^2x_A}{a^2+b^2},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & -c \\ -b & ay_A-bx_A \end{vmatrix} = a^2y_A-abx_A-bc \text{ donc } y=\frac{a^2y_A-abx_A-bc}{a^2+b^2},$$

$$\begin{aligned}
Ad^2 = AB^2 &= \left(\frac{-ac-aby_A+b^2x_A}{a^2+b^2}-x_A\right)^2+\left(\frac{a^2y_A-abx_A-bc}{a^2+b^2}-y_A\right)^2 \\
&= \left(\frac{-ac-aby_A+b^2x_A-x_Aa^2-x_Ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2y_A-abx_A-bc-y_Aa^2-y_Ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-ac-aby_A-x_Aa^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-abx_A-bc-y_Ab^2}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-a(ax_A+by_A+c)}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-b(ax_A+by_A+c)}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2(ax_A+by_A+c)^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2(ax_A+by_A+c)^2}{(a^2+b^2)^2} \\
&= \frac{(ax_A+by_A+c)^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2} \\
&= \frac{(ax_A+by_A+c)^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

D'où : $Ad=\sqrt{\dfrac{(ax_A+by_A+c)^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

CQFD

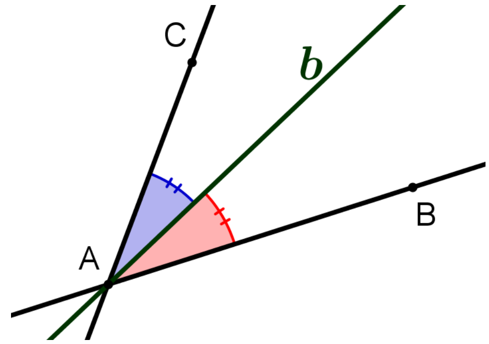
- ***Exemple***

Soient $A(-4;3)$, $(Ox)\equiv y=0$, $(Oy)\equiv x=0$ et $d\equiv x-5y+7=0$, alors :

$$A(Ox)=\frac{|3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=3,\ A(Oy)=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=4 \text{ et } Ad=\frac{|-4-5\cdot 3+7|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{26}}=\frac{12}{\sqrt{26}}$$

- **Définition**

  On appelle **bissectrice** d'un angle $\widehat{BAC}$ la droite *b* qui passe par *A* et qui partage l'angle $\widehat{BAC}$ en deux angles adjacents de même mesure.



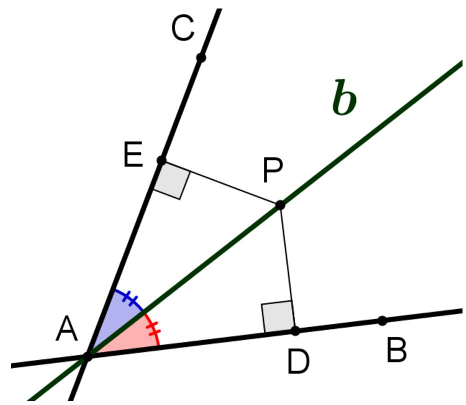
- **Propriété**

  Soient *A*, *B* et *C* trois points non alignés, *b* la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et $P \in b$. Alors : $P(AB) = P(AC)$

  Démonstration

  Soient $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$ tel que $\Delta(ADP)$ soit rectangle en *D* et $\Delta(AEP)$ soit rectangle en *E*.

  Alors $P(AB) = PD$ et $P(AC) = PE$. De plus les deux triangles ont des angles deux à deux de même amplitude : $\widehat{DAP} = \widehat{PAE}$ car $(AP) = b$, $\widehat{PDA} = \widehat{AEP} = 90°$ d'où $\widehat{APD} = \widehat{EPA}$ et une hypoténuse commune $[AP]$ donc ils sont « superposables » (on dit qu'ils sont **isométriques**). Par conséquent $PD = PE$ c'est-à-dire $P(AB) = P(AC)$.



Exercices 28 – 31

10) Equation d'un cercle

- **Définition**

  Soit un point Ω et un nombre réel strictement positif *r*, alors le cercle de centre Ω et de rayon *r* est l'ensemble des points *P* tel que $\Omega P = r$.

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \{P \,/\, \Omega P = r\}$$

- Soient $\Omega(a;b)$ et $P(x;y)$ dans un R.O.N., alors :

$$\begin{aligned} P(x;y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) &\Leftrightarrow \Omega P = r \\ &\Leftrightarrow \Omega P^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

  Ainsi. $\boxed{P(x;y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

- L'équation du cercle peut se mettre sous la forme :

  $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$
  $$\Leftrightarrow x^2+cx+y^2+dy+e=0$$

  en posant $c=-2a$, $d=-2b$ et $e=a^2+b^2-r^2$.

  La première forme de l'équation d'un cercle présente cependant le grand avantage qu'elle indique les coordonnées du centre et le rayon du cercle.

- Réciproquement soit l'équation $x^2+cx+y^2+dy+e=0 \quad (*)$, alors :

  $$x^2+cx+y^2+dy+e=0 \Leftrightarrow x^2+2\frac{c}{2}x+\left(\frac{c}{2}\right)^2+y^2+2\frac{d}{2}y+\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}-e$$
  $$\Leftrightarrow \left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2=s$$

  en posant $s=\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}-e$. Il faut alors *distinguer trois cas* :

  1er cas : $s>0$

  Alors (*) est l'équation du cercle de centre $\Omega\left(-\frac{c}{2};-\frac{d}{2}\right)$ et de rayon $r=\sqrt{s}$.

  2e cas : $s=0$

  Alors $\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{c}{2}=0 \text{ et } y+\frac{d}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{2} \text{ et } y=-\frac{d}{2}$ donc l'équation représente le point $\Omega\left(-\frac{c}{2};-\frac{d}{2}\right)$.

  3e cas : $s<0$

  Alors $\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2=s$ est impossible car la somme de deux carrés est toujours positive !

Exercices 32 - 45

EXERCICES

1) Le plan étant muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A(5;-7,3)$, $B(-9;0)$, $C\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2,4\end{pmatrix}$. Calculez les coordonnées de :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $2\cdot\overrightarrow{CA}$

c) $-\overrightarrow{BC}$

d) $\vec{u}+\vec{v}$

e) $\vec{u}-\vec{v}$

f) $3\vec{u}+2\vec{v}$

g) $3\overrightarrow{BA}-7\overrightarrow{CB}$

h) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{BA}$

2) Le plan étant muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A(11;-2)$, $B(-4,5;1)$, $C(-17;13)$, $D(x;-5)$ et $E(-3;y)$. Déterminez les réels x et y pour que:

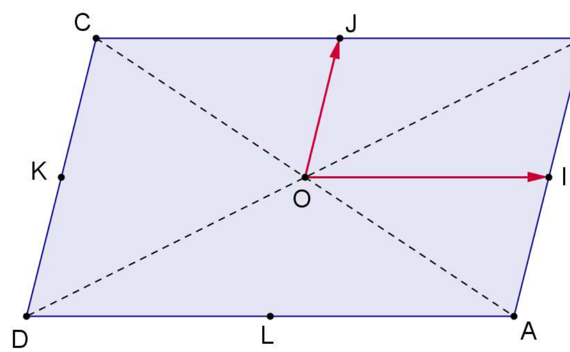
a) $2\overrightarrow{AD}-6\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

b) $5\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{EA}$

c) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{DE}$

d) $\overrightarrow{EA}-11\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BE}+4\overrightarrow{EA}$

3) Soit *ABCD* un parallélogramme de centre *O* et *I*, *J*, *K*, *L* les milieux des quatre côtés :



a) Déterminez les coordonnées des points *O*, *A*, *B*, *C*, *D*, *I*, *J*, *K* et *L*

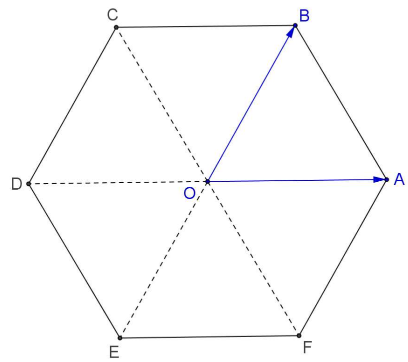
i) dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

ii) dans le repère $\left(C,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

iii) dans le repère $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

b) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{JA}$ dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

4) Soit *ABCDEF* est un hexagone régulier de centre O :



Déterminez les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$:

$$\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{FE},\ \overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{DB}.$$

5) Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ on donne les points $A(-1,4)$, $B(3,7)$ et $C(2,-5)$.

Calculez les coordonnées du point K défini par $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} - 4\overrightarrow{KC} = \vec{0}$:

a) dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

b) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

6) Soient $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque et G son centre de gravité. Calculez les coordonnées de G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

7) Dans un R.O.N. on donne $A(-3;2)$, $B(1;5)$, $C(4;1)$ et $D(x;0)$.

a) Analysez la nature du triangle $\Delta(ABC)$.

b) Déterminez x pour que le triangle $\Delta(ABD)$ soit isocèle en D.

8) Le plan étant muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne $A(24;x)$, $B(-31;-16)$, $C(-3;77)$,

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$

a) Analysez si $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère du plan.

b) Même question pour $\left(O, \vec{u}, \vec{w}\right)$.

c) Même question pour $\left(A, \vec{u}, \vec{w}\right)$.

d) Même question pour $\left(B, -\vec{u}, 2\vec{w}\right)$.

e) Pour quelle(s) valeur(s) de x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

9) Le plan étant muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A(2;-1)$, $B(-3;5)$ et $C(7;-4)$.

a) Trouvez les coordonnées de *A, B, C* et *O* dans le repère $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Montrez que $\left(B,2\vec{j},-3\vec{i}\right)$ est un repère du plan, puis trouvez les coordonnées de *A, B, C* et *O* dans ce repère.

c) Montrez que $\left(C,\vec{i}-\vec{j},2\vec{i}+3\vec{j}\right)$ est un repère du plan, puis trouvez les coordonnées de *A, B, C* et *O* dans ce repère. Plus généralement soit *M* un point de coordonnées $\left(x_M,y_M\right)$ dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\left(X_M,Y_M\right)$ dans $\left(C,\vec{i}-\vec{j},2\vec{i}+3\vec{j}\right)$: exprimez X_M et Y_M en fonction de x_M et y_M.

10) Soient $A(-1;8)$, $B(2;5)$, $C(7;-16)$, $D(3;-4)$ et $E(x;-9)$.

a) Analysez si parmi les points *A, B, C* et *D* il y en a trois qui sont alignés.

b) Déterminez *x* pour que *A, D* et *E* soient alignés.

11) Dans un R.O.N. on donne $P(-5;-3)$, $Q(3;-1)$, $R(2;3)$, $S(-6;1)$.

a) Montrez par deux méthodes différentes que $PQRS = \#$.

b) Montrez par deux méthodes différentes que $PQRS$ est un rectangle.

c) Analysez si les diagonales sont perpendiculaires. Que peut-on en conclure ?

12) On donne $A(1;8)$, $B(5;-2)$ et $C(-2,1)$ dans un R.O.N. du plan. Montrez par deux méthodes différentes que $\Delta(ABC)$ est un triangle rectangle.

13) Soient $A(1;2)$, $B(4;-2)$, $C(-1;-2)$, $D(-4;2)$ dans un R.O.N.. Montrez que *ABCD* est un losange.

14) Déterminez une équation cartésienne (générale et réduite) de la droite d sachant que :

a) *d* passe par $A(-9;11)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

b) *d* passe par $B\left(\frac{2}{3};-1\right)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$.

c) *d* passe par $C(2;13)$ et a pour vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$.

d) *d* passe par $E(3;1)$ et par $F(-15;4)$.

15) Dans un R.O.N. on donne $A(-5;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$.

a) Déterminez une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

b) Déterminez un vecteur directeur de *d*.

16) Soient $A(2;-3)$, $B(-1;4)$ et $C(7;0)$ dans un repère quelconque.

a) Vérifiez que $\Delta(ABC)$ est un triangle.

b) Calculez le centre de gravité G de ce triangle.

c) Déterminez les équations des trois médianes de ce triangle et vérifiez que G appartient à chacune de ces droites.

17) Soient $A(6;-1)$ et $d \equiv 7x-2y-3=0$ dans un R.O.N..

a) Déterminez l'équation de la droite *a* telle que $A\in a$ et $a \parallel (Ox)$.

b) Déterminez l'équation de la droite *b* telle que $A\in b$ et $b \parallel d$.

c) Déterminez l'équation de la droite *c* telle que $A\in c$ et $c \perp (Ox)$.

d) Déterminez l'équation de la droite *e* telle que $A\in e$ et $e \perp (Oy)$.

e) Déterminez l'équation de la droite f telle que $A\in f$ et $f \perp d$.

18) Soient $d \equiv 7x-9y+11=0$ et $d' \equiv ax+4y-1=0$ dans un R.O.N..

a) Pour quelles valeurs de *a* a-t-on $d \parallel d'$?

b) Pour quelles valeurs de *a* a-t-on $d \perp d'$?

19) On donne quatre droites par leurs équations cartésiennes :

$$d_1 \equiv x-y+2=0 \qquad d_2 \equiv 2x+3y+6=0$$
$$d_3 \equiv 2x+7=0 \qquad d_4 \equiv -5y+15=0$$

a) Pour chacune de ces droites déterminez une équation réduite puis représentez-les.

b) Vérifiez si les points $A\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{3}\right)$, $B(1;3)$ et $O(0;0)$ appartiennent à ces droites.

20) Parmi les droites suivantes, quelles sont celles qui sont parallèles ? perpendiculaires ? (toutes les équations sont données dans un R.O.N.)

$d_1 \equiv 4=\frac{y}{2}$	$d_2 \equiv 6x=5-4y$	$d_3 \equiv x=7-y$
$d_4 \equiv 4x-6y=0$	$d_5 \equiv y=9+x$	$d_6 \equiv \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=11$
$d_7 \equiv 4x+3=5$	$d_8 \equiv 2x-3y=1$	$d_9 \equiv 5x-7y=5(x-y+2)$

21) Dans un R.O.N. on donne le point $A(-4;7)$ et la droite $d \equiv 3x-5y+8=0$. Déterminez l'équation réduite des droites d_1 et d_2 passant par *A* tel que $d_1 \parallel d$ et $d_2 \perp d$.

22) Soient $M\left(-3;\frac{1}{2}\right)$, $P(-2;0)$ et $d \equiv 2x+2y+1=0$. Déterminez $(MP)\cap d$. Vérifiez votre résultat sur une figure.

23) Trouvez les points *A*, *B* et *C* sachant que :

$(AB) \equiv 2x-y=0$ $\qquad$ $(AC) \equiv x+y=3$ $\qquad$ $(BC) \equiv 3x-2y=4$

24) Soient $A(9;-1)$, $B(0;8)$ et $C(4;-3)$.

a) Vérifiez que *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

b) Déterminez une équation cartésienne de la droite *d* telle que $C \in d$ et $d \parallel (AB)$.

c) Déterminez une équation cartésienne de la droite d' telle que $B \in d'$ et $d' \parallel (AC)$.

d) Déterminez $D \in d \cap d'$.

e) Quelle est la nature du quadrilatère *ABDC* ? Déduisez-en une méthode (beaucoup !) plus simple pour obtenir *D*.

25) Soient $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(3;-1)$ dans un R.O.N..

a) Déterminez les équations des trois médiatrices du triangle $\Delta(ABC)$.

b) Montrez que les trois médiatrices se coupent en un point Ω.

c) Montrez que $\Omega A = \Omega B = \Omega C$. Comment appelle-t-on le point Ω ?

d) Déterminez les équations des trois hauteurs du triangle $\Delta(ABC)$.

e) Montrez que les trois hauteurs se coupent en un point *H*. Comment appelle-t-on ce point *H* ?

f) Déterminez le centre de gravité du triangle $\Delta(ABC)$.

g) Montrez qu'il existe une droite qui passe par Ω, *H* et *G*. Cette droite est appelée **droite d'Euler** *(mathématicien suisse du 18^e siècle)*. Précisez les positions de ces trois points.

26) Dans un R.O.N., déterminez une équation de la diagonale et de chacun des côtés non donnés du rectangle dont une diagonale a pour équation cartésienne $3x+7y-10=0$ et dont deux côtés ont respectivement pour équations $5x+2y-7=0$ et $5x+2y=36$.

27) Dans un R.O.N., déterminez une équation cartésienne de chacun des côtés d'un triangle dont on donne le sommet $A(-4;-5)$ et deux hauteurs d'équations $3x+8y+13=0$ et $5x+3y-4=0$.

28) Soient deux droites $d \equiv 8x-6y+7=0$, $d' \equiv 12y-5x+1=0$ et $A(2;3)$ dans un R.O.N.. De quelle droite le point A est-il le plus éloigné ?

29) Soient $A(2;2)$, $B(-3;1)$ et $C(5;-4)$ dans un R.O.N.. Calculez l'aire du triangle $\Delta(ABC)$.

30) Dans un R.O.N. on donne les deux droites $d \equiv \frac{y}{2} = \frac{2}{3}x+1$ et $d' \equiv 3y-4x+14=0$.

a) Montrez que $d \parallel d'$.

b) Calculez Pd' où P est un point quelconque de d. Que constatez-vous ?

31) Soient $A(1;0,5)$, $B(-4;3)$ et $C(-2;-1)$ dans un R.O.N. (figure !).

a) Déterminez les équations des droites (AB), (AC) et (BC).

b) Montrez que l'ensemble des points (appelé aussi le **lieu** des points) P qui sont équidistants de (AB) et (AC) est la réunion de deux droites perpendiculaires sécantes en A. On sait que l'une de ces deux droites est la bissectrice b_A de l'angle $\widehat{BAC}$. Laquelle ?

c) Déterminez de même les bissectrices b_B de l'angle $\widehat{CBA}$ et b_C de l'angle $\widehat{ACB}$.

d) Montrez que les trois bissectrices sont concourantes en un point D équidistant des trois côtés du triangle $\Delta(ABC)$.

32) Donnez une équation cartésienne du cercle …

a) de centre $\Omega(4;-3)$ et de rayon 2.

b) de centre $\Omega(0;-1)$ et passant par $R(12;-6)$.

c) de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) de diamètre $[AB]$ avec $A(-5;4)$ et $B(7;-8)$.

33) Déterminez les lieux suivants :

$\mathbb{L}=\left\{P(x;y)\,/\,x^2-6x+y^2-14y-63=0\right\}$

$\mathbb{M}=\left\{P(x;y)\,/\,x^2+y^2-3x+6y-\dfrac{55}{4}=0\right\}$

$\mathbb{P}=\left\{P(x;y)\,/\,49x^2+42x+49y^2+9=0\right\}$

$\mathbb{O}=\left\{P(x;y)\,/\,x^2-8x+y^2-18y+135=0\right\}$

$\mathbb{I}=\left\{P(x;y)\,/\,x^2+7x+y^2-\dfrac{11}{2}y+51=0\right\}$

$\mathbb{J}=\left\{P(x;y)\,/\,4x^2-4x+4y^2+8y-31=0\right\}$

$\mathbb{K}=\left\{P(x;y)\,/\,36x^2+48x+36y^2-180y+205=0\right\}$

$\mathbb{E}=\left\{P(x;y)\,/\,(2x+1)(5-6x)-(3y+1)(4y+7)=0\right\}$

34) Reprenons les données de l'exercice 31.

a) Etablissez l'équation du cercle de centre D qui est tangent aux trois côtés du triangle $\Delta(ABC)$, appelé **cercle inscrit** du triangle.

b) Calculez l'aire et le périmètre de ce cercle.

35) Donnez une équation cartésienne du cercle passant par les points

a) $A(1;2)$, $B(0;1)$ et $C(1;0)$.

b) $A(-1;3)$, $B(4;-2)$ et $C(-2;-5)$.

36) Soient $A(-2;-3)$, $B(8;1)$, $C(6;6)$ et $D(-4;2)$ dans un R.O.N.. Quelle est la nature du quadrilatère *ABCD* ? Déterminez son cercle circonscrit.

Problèmes

37) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $\mathcal{C}\equiv x^2+10x+y^2-2y+22=0$ dans un R.O.N..

a) Déterminez le centre et le rayon de $\mathcal{C}$.

b) Trouvez deux points A et B de $\mathcal{C}$ qui n'ont ni la même abscisse, ni la même ordonnée.

c) Déterminez les équations des tangentes t_A et t_B au cercle aux points A et B respectivement.

d) Déterminez le point d'intersection I de t_A et t_B.

e) Quelle est la nature du triangle $\Delta(IAB)$?

38) Soient $A(-4;1)$ et $B(2;7)$ dans un R.O.N.. Déterminez les lieux suivants :

a) $\mathbb{L}=\{M \ / \ \text{le triangle } \Delta(ABM) \text{ est rectangle en } M\}$. Comment appelle-t-on ce lieu ?

b) $\mathbb{S}=\{M \ / \ AM=BM\}$. Quel est ce lieu ? Prouvez-le !

39) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ quelconque, $A'=mil[BC]$, $B'=mil[AC]$ $C'=mil[AB]$ et G son centre de gravité.

a) Montrez que $AC^2+AB^2=2AA'^2+\dfrac{BC^2}{2}$ (**théorème des médianes**)

b) Donnez sans démonstration des formules analogues pour les autres médianes.

c) Déduisez-en que $GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{BC^2+AC^2+AB^2}{3}$.

40) Montrez que pour tout $\#(ABCD)$ on a : $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$ par deux methods différentes:

a) En vous plaçant dans un repère approprié.

b) En utilisant le théorème des médianes établi dans l'exercice précédent.

41) Soient A et B deux points fixes tel que $AB=6$. Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des points M tel que $MA=2\cdot MB$.

42) Soient $A(2;5)$ et $B(4;7)$ dans un R.O.N.. Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des points M tel que:

$$MA^2+MB^2=\frac{5}{4}AB^2$$

43) Une perche rigide $[AB]$ de 10 m de long est posée contre un mur vertical. En supposant que son extrémité A glisse le long du mur et son extrémité B le long du sol, quel est le lieu $\mathbb{L}$ du milieu M de la perche ? (figure !)

44) Soient a et b deux droites perpendiculaires sécantes en O et M un point quelconque du plan. On note A et B les projections orthogonales de M sur a et b respectivement (figure !). Déterminez le lieu $\mathbb{L}$ des points M tels que $OA+OB=3$.