CHAPITRE III

VECTEURS

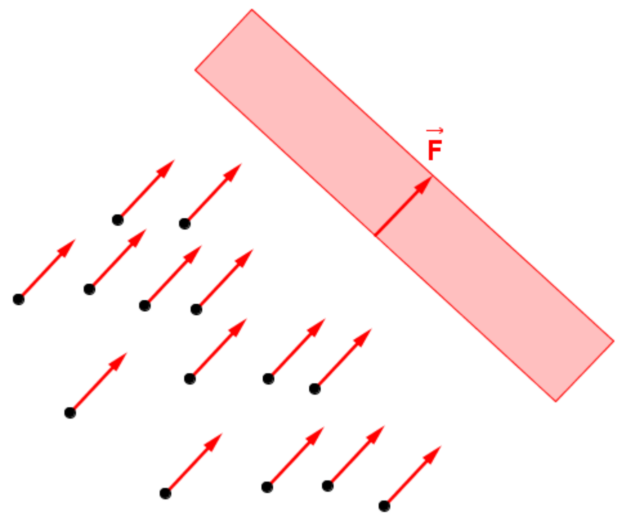
COURS

COURS

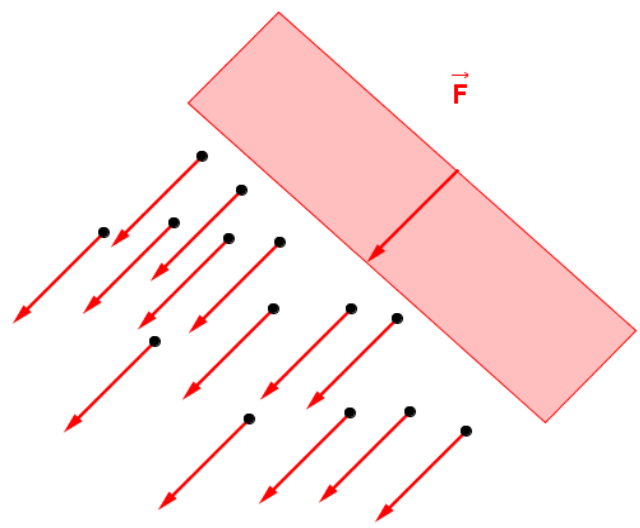
1) Exemple : force exercée par un aimant

Tout le monde sait qu'en plaçant des billes en fer au voisinage d'un aimant (Magnet), celles-ci sont soit attirées, soit repoussées par celui-ci. En physique on parle d'une **force** (d'attraction ou de répulsion), notée $\vec{F}$, exercée par l'aimant sur ces billes et celle-ci est représentée par des flèches partant de chacune de ces billes.

Voici l'exemple d'un aimant (rectangle rouge) qui attire les billes (points noirs) :



et l'exemple d'un aimant qui les repousse :



On constate que sur chacune de ces deux figures toutes les flèches ont :

- la **même longueur** : celle-ci caractérise en effet **l'intensité** de la force (ainsi les flèches de la 1^re^ figure sont moins longues que celles la 2^e^ figure : c'est que la force d'attraction de la 1re figure est moins importante que la force de répulsion de la 2e figure)

- la **même direction (les flèches sont toutes parallèles)** : celle qui est perpendiculaire à la surface de l'aimant tournée vers les billes et qui indique la direction dans laquelle celles-ci vont se déplacer sous l'impulsion de la force $\vec{F}$
- le **même sens** : sur la 1re figure les flèches sont tournées vers l'aimant pour signifier que les billes sont attirées par l'aimant et vont donc se déplacer vers celui-ci, alors que sur la 2e figure les flèches sont orientées dans le sens opposé pour signifier que les billes sont au contraire repoussées par l'aimant et vont s'éloigner de lui.

La notion de « **force** » en physique correspond à la notion de « **vecteur** » en mathématiques.

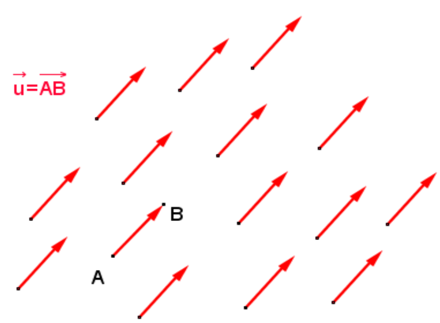
2) Définitions et notations

Définitions

Un **vecteur** est un *ensemble infini de flèches* qui ont toutes :

- même **direction**
- même **sens**
- même **longueur** appelée **norme** du vecteur

Chacune de ces flèches est **un représentant** du vecteur.



Notations

- un vecteur peut être noté de deux manières :
  - une lettre minuscule surmontée d'une flèche, p. ex. : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, …
  - deux lettres majuscules, désignant **l'origine et l'extrémité** d'un représentant particulier du vecteur, surmontées d'une flèche, p. ex. : $\overrightarrow{AB}$

- la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$
- l'ensemble de tous les vecteurs du plan est noté $\mathcal{V}$

Remarques

- pour connaître un vecteur *il suffit de connaître un seul représentant* du vecteur !
- la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que la distance de A à B :

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = AB}$$

- la norme d'un vecteur est un nombre réel positif ou nul : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$
- En 5^e vous avez vu qu'une translation qui transforme A en B est notée $t_{\overrightarrow{AB}}$: on dit que c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$!

Cas particuliers

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le seul vecteur de norme nulle. En effet :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B$$

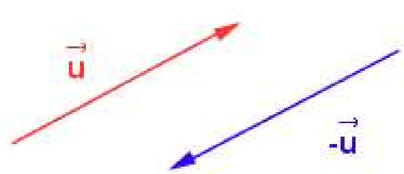
De plus ce vecteur n'a pas de direction (ou toutes les directions, ce qui revient au même…) donc pas de sens non plus ! Ce vecteur est appelé **vecteur nul** et il est noté $\vec{0}$:

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots \quad \text{et} \quad \|\vec{0}\| = 0$$

- Soient A et B deux points distincts, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction (car $(AB) = (BA)$), même norme (car $AB = BA$), mais des sens opposés : on dit que $\overrightarrow{BA}$ est le **vecteur opposé** de $\overrightarrow{AB}$ (ou que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont **des vecteurs opposés**) et on note :

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}}$$

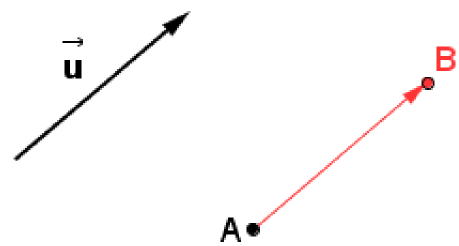
De manière générale, deux **vecteurs opposés** $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont deux vecteurs qui ont même direction, même norme et des sens opposés.



Propriété

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un point A, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire qu'il existe un représentant unique de $\vec{u}$ qui admet A comme origine).

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \quad \forall A \;\; \exists! B \;\; \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

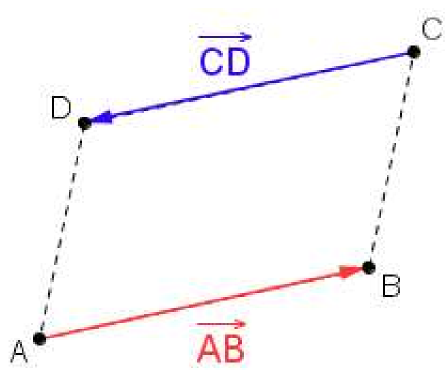


Exercice 1

3) Egalité de deux vecteurs

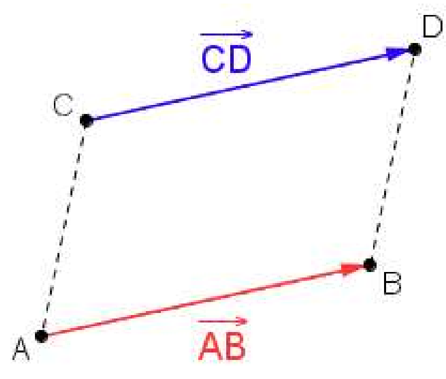
- D'après la définition d'un vecteur, deux **vecteurs** sont **égaux** si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- Soient A, B, C et D quatre points non alignés du plan. Pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux il faut donc que $(AB) \parallel (CD)$ (même direction !) et que $AB = CD$ (même norme !), ce qui est vérifié ssi les quatre points forment un parallélogramme. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

1er cas : (AB**CD**) = #



$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$

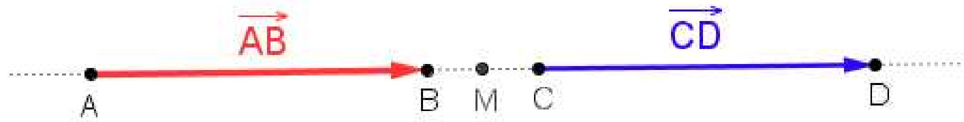
2^e cas: (AB**DC**) = #



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Ainsi on a: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC) = \#$.

- Soient A, B, C et D quatre points alignés du plan. Comme $(AB)=(CD)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ssi $AB=CD$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens :



ou

Sur ces deux figures on a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $M=\text{milieu de }[AD]=\text{milieu de }[BC]$ donc on peut considérer (ABDC) comme une sorte de « parallélogramme aplati », ce qui nous amène à poser la définition suivante :

- **Définition**

  Soient A, B, C et D quatre points *quelconques* du plan, alors :

$$\boxed{(ABDC)=\# \quad \text{si et seulement si} \quad \text{milieu de }[AD]=\text{milieu de }[BC]}$$

- Nous avons alors montré que :

$$\boxed{\forall A, B, C, D \quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABDC)=\#}$$

- *Remarque* : Sur une figure on voit facilement que :

$$\begin{aligned}(ABDC)=\# &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

Exercices 2 - 6

4) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

- *Exemple des aimants :*

  En replaçant un aimant par un aimant 2, 3, … k fois ($k\in\mathbb{R}_+^*$) plus fort, la force exercée sur les billes gardera la même direction et le même sens mais son intensité (c'est-à-dire la longueur des flèches) sera « multipliée » par 2, 3 , … k. La nouvelle force sera alors notée $2\cdot\vec{F}$, $3\cdot\vec{F}$, … $k\cdot\vec{F}$, ce qui définit une multiplication d'une force (donc d'un vecteur) par un réel positif. Il semble alors naturel de définir $-2\cdot\vec{F}$, $-3\cdot\vec{F}$, … , $-k\cdot\vec{F}$ comme les forces (ou vecteurs) *opposées* aux forces $2\cdot\vec{F}$ … $k\cdot\vec{F}$ et $0\cdot\vec{F}=k\cdot\vec{0}=\vec{0}$, ce qui nous amène à poser la définition suivante :

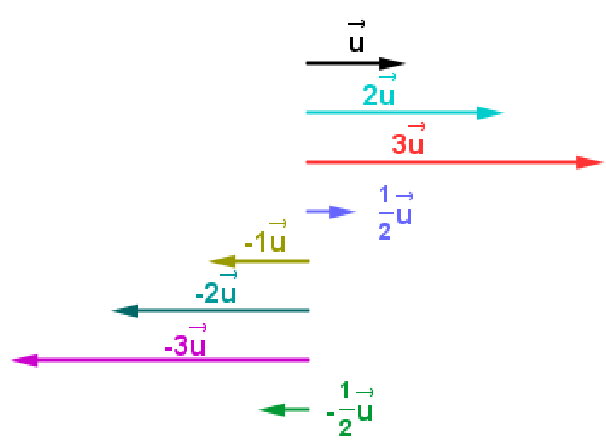
- **Définition**

Soit $\vec{u}\in\mathcal{V}$ et $k\in\mathbb{R}$, alors $k\cdot\vec{u}$ est le vecteur défini par :

- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $k=0$ alors : $0\cdot\vec{u}=k\cdot\vec{0}=\vec{0}$
- si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et **$k>0$** alors :
  - $k\cdot\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
  - $k\cdot\vec{u}$ a **même sens** que $\vec{u}$
  - $\|k\cdot\vec{u}\|=k\cdot\|\vec{u}\|=|k|\cdot\|\vec{u}\|$
- si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et **$k<0$** alors :
  - $k\cdot\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$
  - $k\cdot\vec{u}$ a le **sens opposé** de $\vec{u}$
  - $\|k\cdot\vec{u}\|=-k\cdot\|\vec{u}\|=|k|\cdot\|\vec{u}\|$

- *Remarque* : Dans tous les cas on a :
  - $\boxed{\|k\cdot\vec{u}\|=|k|\cdot\|\vec{u}\|}$
  - $k\cdot\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction (en posant que le vecteur nul a la même direction que n'importe quel vecteur $\vec{u}$)

- *Exemples*



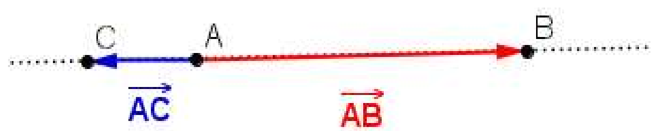
On voit que toutes ces flèches, c'est-à-dire tous les représentants de $\vec{u}$ et de $k\cdot\vec{u}$, sont parallèles. On exprime ceci en disant que $\vec{u}$ et $k\cdot\vec{u}$ sont *colinéaires*.

- **Définition**

  On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

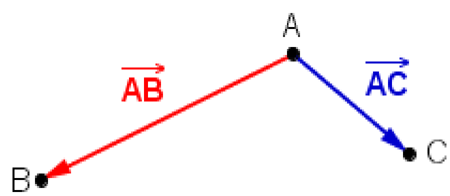
- **Propriétés**
  - $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$
  - si on convient que $\vec{0}$ a *toutes les directions*, alors on peut dire deux vecteurs sont colinéaires ssi ils ont même direction
  - En observant les deux figures suivantes :

    figure 1



A, B, C sont alignés et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

figure 2



A, B, C ne sont pas alignés et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

on voit que :

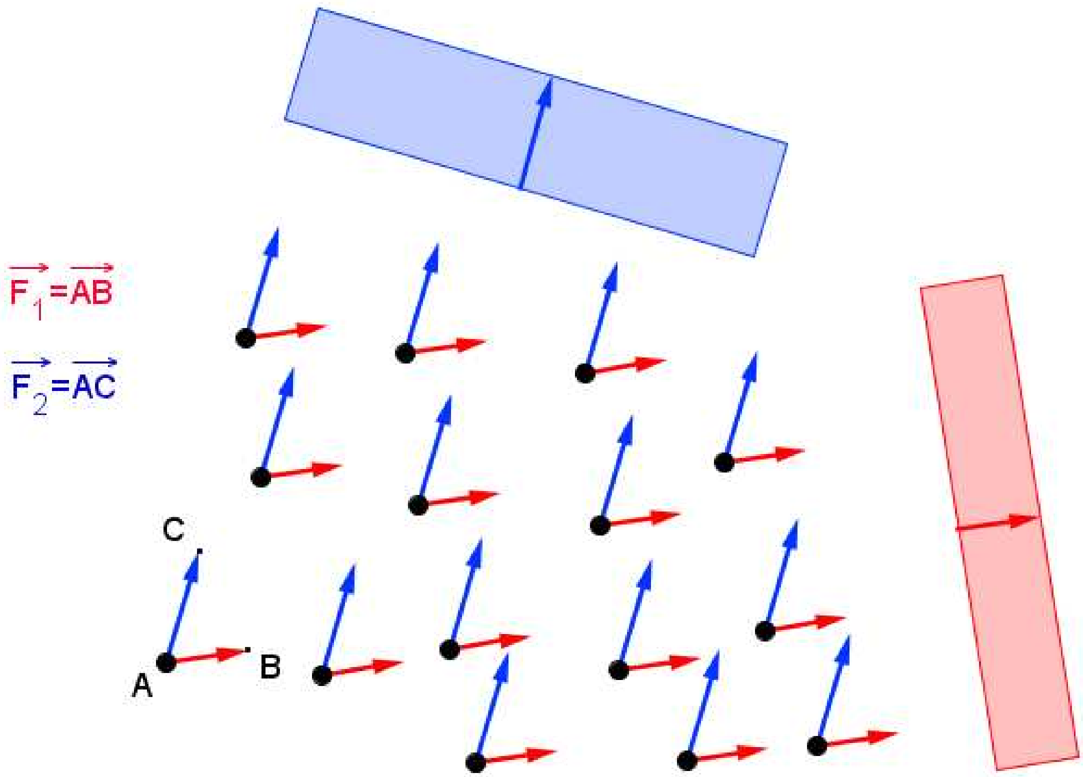
$$\boxed{\forall A, B, C \quad A, B, C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}}$$

Exercices 7 - 11

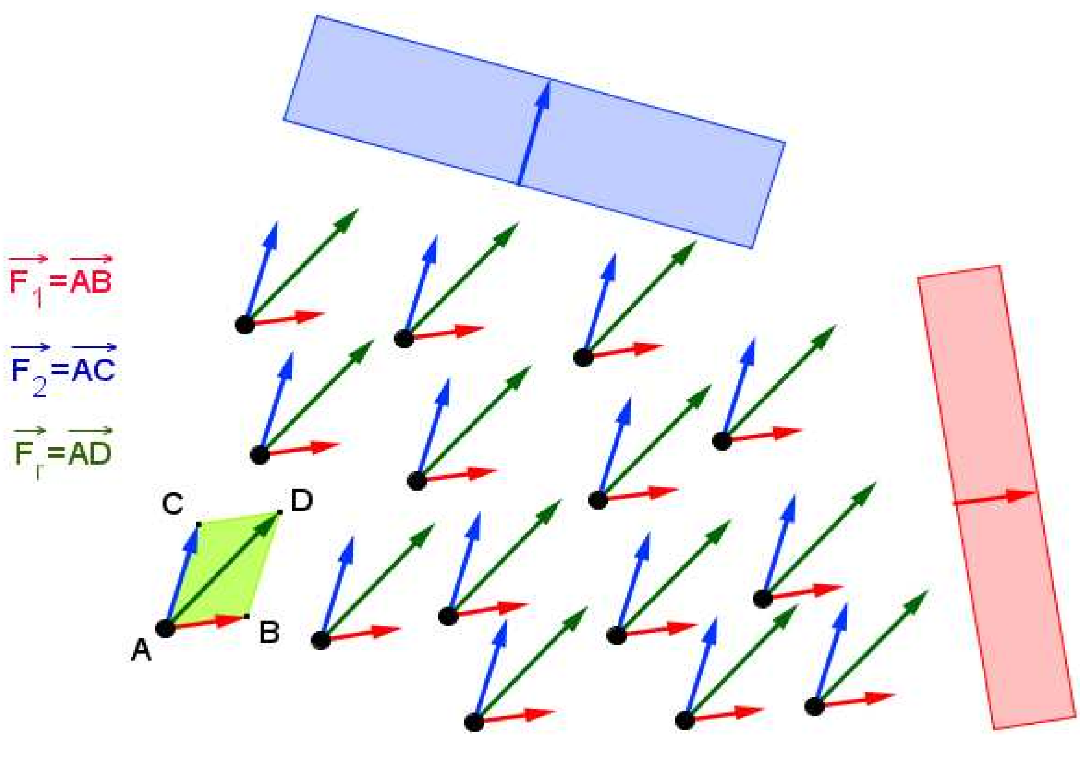
5) Addition et soustraction des vecteurs

- **Exemple**

  Reprenons l'exemple des billes soumises à la force d'attraction $\overrightarrow{F_1}$ d'un aimant (rouge sur la figure) et rajoutons un deuxième aimant (bleu) qui attire les billes avec la force $\overrightarrow{F_2}$ dans une autre direction :



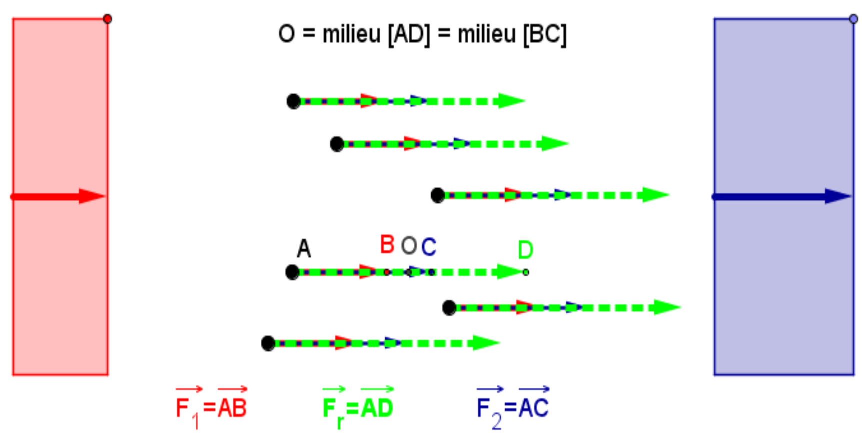
Alors l'expérience montre que tout se passe *comme si* les billes étaient attirées par un troisième aimant (invisible) dans une direction « intermédiaire » avec une force $\overrightarrow{F_r}$ représentée par les flèches vertes :



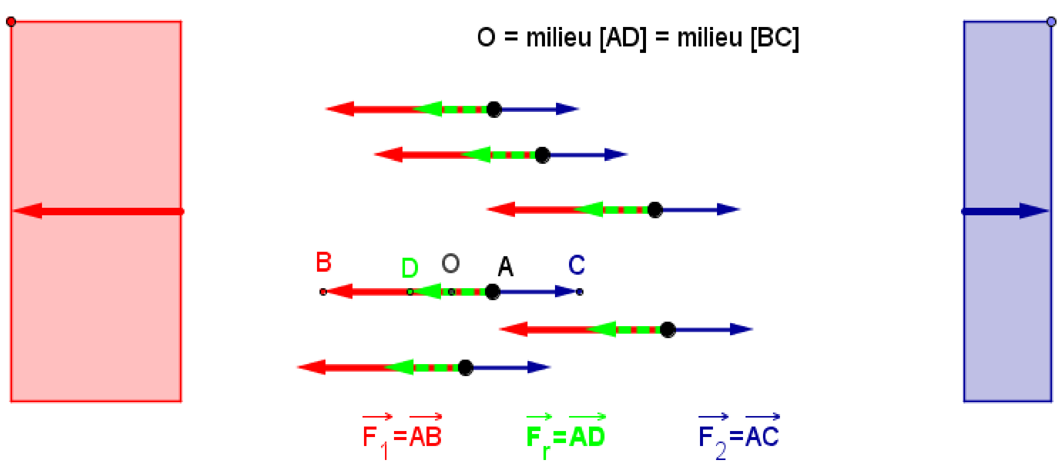
De plus cette force $\vec{F_r}$, appelée **force résultante** en physique, est telle que ses représentants forment la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont formés par les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$:

Si $\vec{F_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_2} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{F_r} = \overrightarrow{AD}$ avec (AB**DC**) = # (*)

Regardons ce qui se passe si les deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ ont même direction et même sens :



ou encore même direction et sens opposés :



On constate que (*) reste valable puisque (ABDC) est un parallélogramme aplati !

Que peut-on dire de la norme de $\overrightarrow{AD}$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

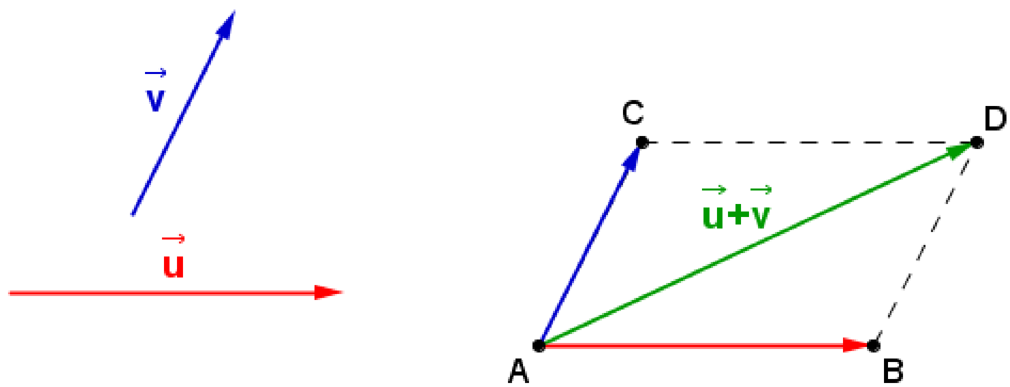
Que se passe-t-il si $\vec{F_2} = -\vec{F_1}$? ………………………………...………………...

- **Définition**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors on appelle **somme de ces deux vecteurs** le vecteur, noté $\vec{u}+\vec{v}$, dont *un représentant* est construit selon l'une des deux règles (équivalentes) suivantes :

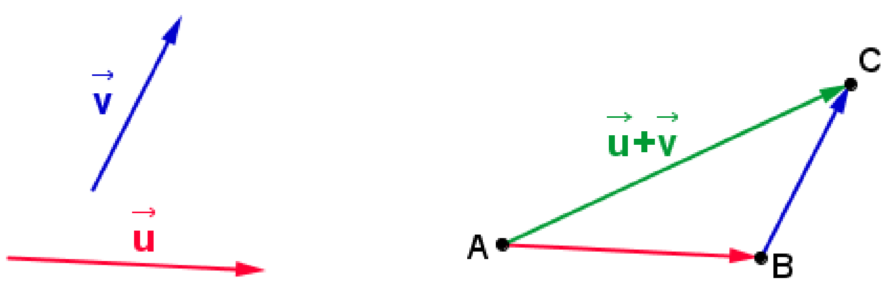
Règle du parallélogramme :

On choisit un point quelconque A, puis on construit le point B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, le point C tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, puis le point D tel que (AB**DC**) = # (éventuellement aplati, si les deux vecteurs sont colinéaires, voir figures page 10). Alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AD}$:



Règle simplifiée :

Sur la figure précédente $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ puisque (AB**DC**) = #, donc il suffit de construire le représentant de $\vec{v}$ **d'origine B**, c'est-à-dire le point C tel que $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et on a directement $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, sans passer par le # :



Remarque

La règle du parallélogramme consiste à choisir deux représentants de même origine ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$), alors qu'avec la règle simplifiée on choisit deux représentants consécutifs ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$).

- La règle simplifiée montre que :

$$\boxed{\forall A, B, C \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

Cette formule, <u>très importante</u> pour le calcul vectoriel, est appelé **<u>relation de Chasles</u>**.

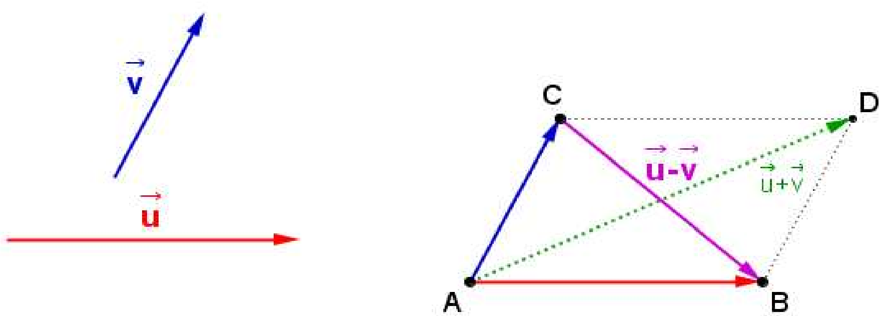
- **<u>Soustraction dans $\mathcal{V}$</u>**

Nous savons qu'on peut définir la soustraction de deux nombres a et b à partir de l'addition en posant : $a-b=a+(-b)$, c'est-à-dire que <u>pour retrancher un nombre b d'un nombre a, on ajoute son opposé</u>. On fait de même pour définir la soustraction dans $\mathcal{V}$:

$$\boxed{\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \vec{u}-\vec{v} \underset{\text{déf}}{=} \vec{u}+\left(-\vec{v}\right)}$$

Construction de $\vec{u}-\vec{v}$:

On choisit un point quelconque A, puis on construit <u>le</u> point B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, <u>le</u> point C tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, puis <u>le</u> point D tel que (AB**DC**) = #. Comme $-\vec{v}=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$, on a $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ d'après la relation de Chasles :



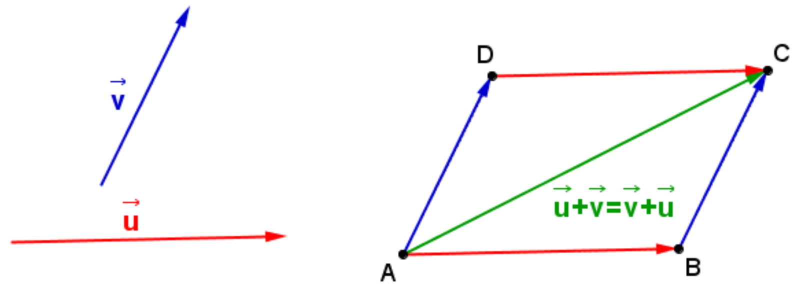
6) <u>Propriétés du calcul vectoriel</u>

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et a, b deux nombres réels.

- L'addition des vecteurs est **commutative** : $\boxed{\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$

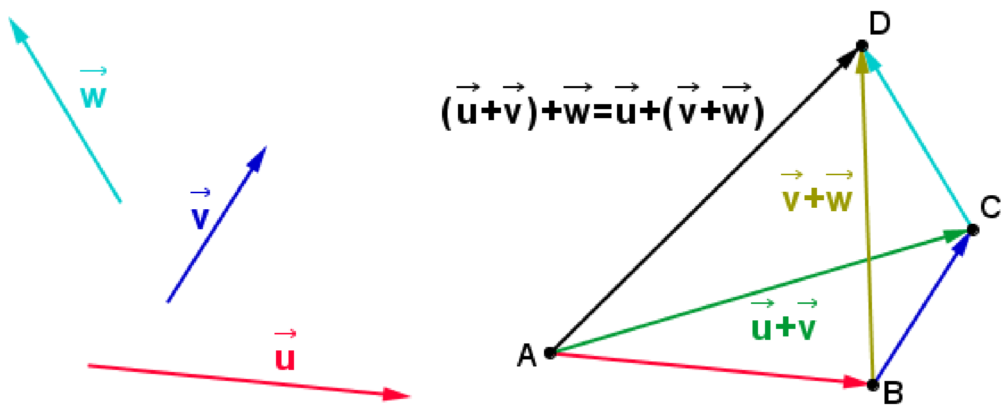
En effet soient A, B, C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et D le point tel que $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{DC}$, alors d'après la relation de Chasles on a :

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$



- L'addition des vecteurs est **associative** : $\boxed{(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}$

  En effet soient A, B, C, D quatre points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$, alors $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ d'après la relation de Chasles et on a de même : $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.



- Comme l'addition des vecteurs est commutative et associative, on peut écrire une somme de plusieurs vecteurs <u>sans parenthèses et dans l'ordre qu'on veut</u> :

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{u}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{u}+\vec{v}=\ldots$$

- $\vec{0}$ est l'**élément neutre** de l'addition des vecteurs : $\boxed{\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}}$

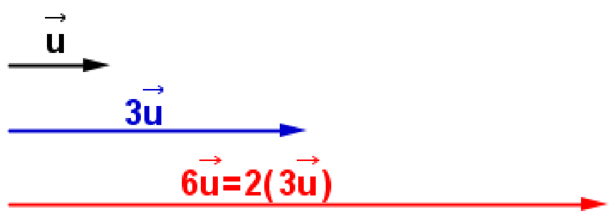
  En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, alors comme $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}$ on a : $\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\vec{0}+\vec{u}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ d'après la relation de Chasles.

- $\boxed{\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}}$

  En effet soient A, B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, alors comme $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ on a : $\vec{u}+(-\vec{u})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ et $(-\vec{u})+\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$ d'après la relation de Chasles.

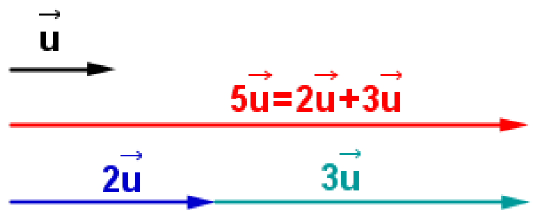
- $\boxed{1\cdot\vec{u}=\vec{u} \quad \text{et} \quad (-1)\cdot\vec{u}=-\vec{u} \quad \text{et} \quad 0\cdot\vec{u}=\vec{0}}$ (évident !)
- $\boxed{(ab)\cdot\vec{u}=a\cdot(b\cdot\vec{u})}$ et on écrit simplement : $ab\vec{u}$

  p. ex. $a=2$ et $b=3$



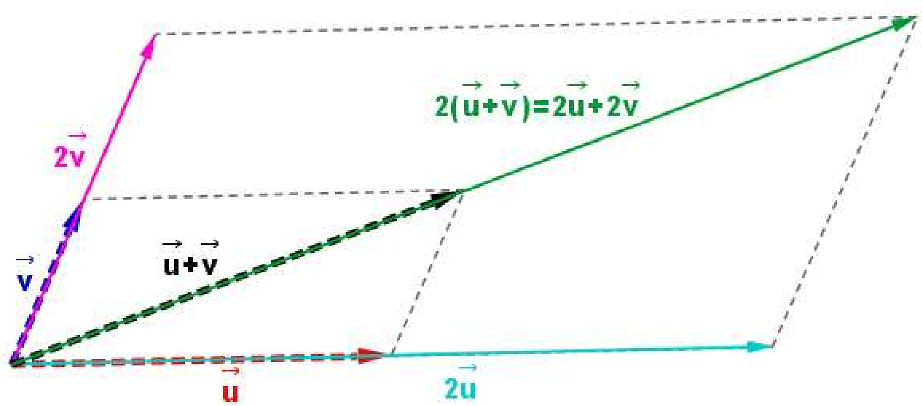
- $\boxed{(a+b)\cdot\vec{u}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u}}$

  p. ex. $a=2$ et $b=3$



- $\boxed{a\cdot(\vec{u}+\vec{v})=a\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}}$

  p. ex. $a=2$



<u>Remarques</u>

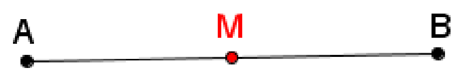
- Ces propriétés montrent que les règles de calcul sur les vecteurs « fonctionnent » de la même manière que celles sur les nombres réels, sauf qu'<u>on ne peut PAS multiplier ou diviser deux vecteurs entre eux</u> !

- Les deux dernières propriétés montrent qu'il y a une *sorte de « distributivité »* pour le calcul vectoriel : la différence avec la *vraie distributivité* est qu'ici on multiplie des objets de *nature différente* : des nombres et des vecteurs !

Exercices 12 – 42

7) Milieu d'un segment

- Soit M le milieu de $[AB]$:



Complétez :

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont ……………………………………………..

……………………………………………….

……………………………………………….

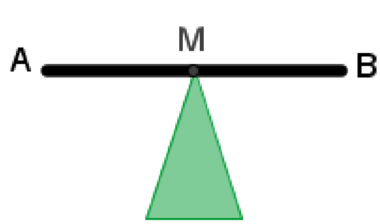
donc ils sont ……………………….. et par conséquent $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=$ ………

- Justifiez (oralement) que la réciproque est vraie
- Ainsi nous avons montré que :

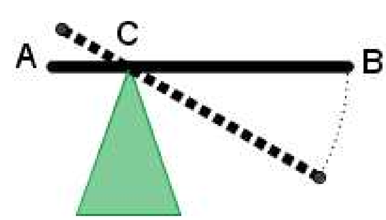
$$\boxed{\forall A, B, M \quad M = \text{milieu de } [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}}$$

- **Interprétation physique :**

Plaçons un bâton [AB] sur la pointe d'un cône en position parfaitement horizontale, puis lâchons-le : si le bâton repose en son milieu M sur la pointe du cône, le bâton reste en équilibre, si par contre il repose sur un point C différent du milieu, il y a déséquilibre et il va tomber.



(équilibre)



(déséquilibre)

Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ (respectivement $\overrightarrow{MB}$) représente la force exercée par l'extrémité A (resp. B) du bâton sur le point M et l'égalité $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ exprime le fait que la force résultante est la force nulle : il ne se passe rien, le bâton reste en équilibre !

Par contre la force résultante $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\neq\vec{0}$ n'étant pas nulle, elle va entraîner le bâton vers le bas (il tombe)…

Conclusion :

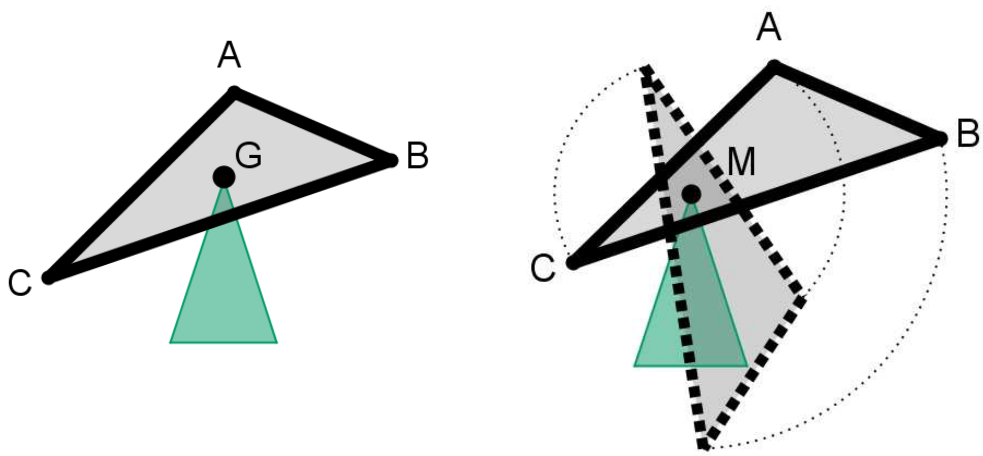
Le milieu est le point d'équilibre appelé **centre de gravité** du segment (du bâton).

Exercices 43 - 47

8) Centre de gravité d'un triangle

- **Interprétation physique :**

Soit ABC un triangle (découpé dans une plaque homogène, p. ex. une plaque en bois). Nous allons chercher « le point d'équilibre » de ce triangle, c'est-à-dire le point G tel que le triangle posé horizontalement sur ce point reste en équilibre :



(équilibre) *(déséquilibre)*

Comme pour le bâton, les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ représentent les forces exercées respectivement par les sommets A, B et C sur le point G. Le point d'équilibre est alors caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, alors que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\neq\vec{0}$.

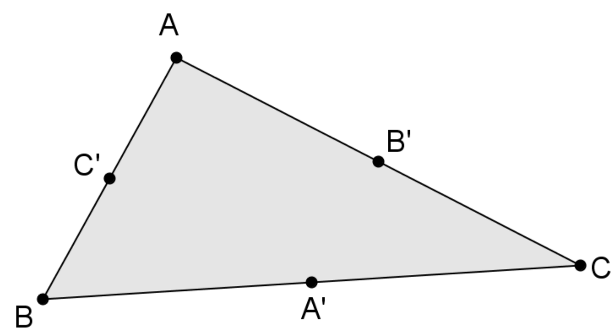
- **Définition**

On appelle **centre de gravité** d'un triangle $\Delta(ABC)$ le point G tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

- **Propriétés de G**

Soient un triangle $\Delta(\text{ABC})$, A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[\text{BC}]$, $[\text{AC}]$, $[\text{AB}]$ et G le centre de gravité, alors :



o $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'},}$

démonstration :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\ (\text{Chasles})\\
&\Leftrightarrow 3\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3\cdot\overrightarrow{GA}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\cdot\overrightarrow{AG}\\
&\Leftrightarrow 2\cdot\overrightarrow{AA'}=3\cdot\overrightarrow{AG}\ (\text{voir exercice })\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AA'}
\end{aligned}$$

Les deux autres égalités se démontrent de façon analogue (exercice !)

o $\boxed{G \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')}$

démonstration :

Nous venons de montrer que les deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, donc les points A, A' et G sont alignés (propriété p. 8) et par conséquent $G \in (AA')$. On montre de même que $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$, d'où le résultat.

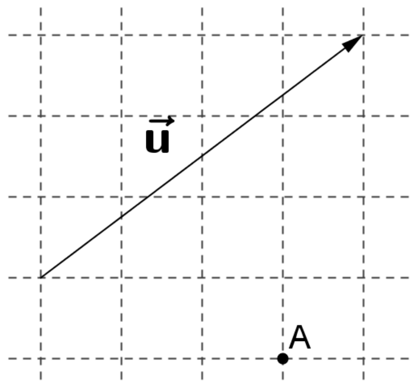
Remarque :

Comme les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les trois **médianes** du triangle, nous venons de montrer que G est le point d'intersection de ces médianes !

Exercices 48 - 56

EXERCICES

1) Recopiez le point A et le vecteur $\vec{u}$ sur le quadrillage de votre feuille :



a) Construisez le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

b) Construisez le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$.

c) Construisez le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -\vec{u}$.

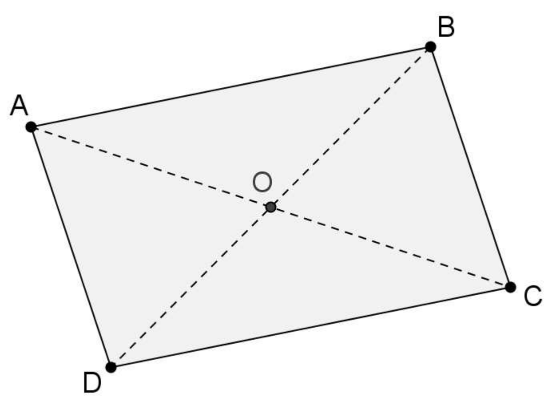
d) Construisez le point E tel que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{DC}$.

e) Quel est le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'origine D ?

f) Quel est le représentant de $\overrightarrow{DA}$ d'extrémité C ?

g) Calculez $\|\vec{u}\|$ (unité = côté d'un carré du quadrillage)..

2) ABCD = # et ses diagonales se coupent en O :



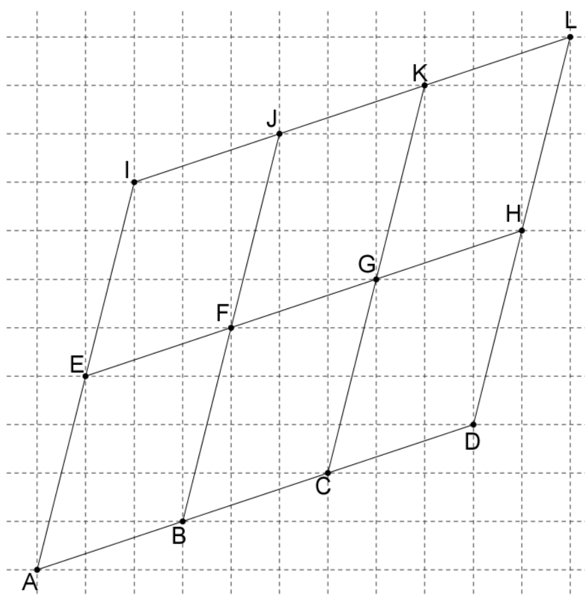
a) Complétez par un vecteur égal :

- $\overrightarrow{DA} = \ldots$
- $\overrightarrow{CD} = \ldots$
- $\overrightarrow{OA} = \ldots$
- $\overrightarrow{DO} = \ldots$

b) Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Justifiez vos réponses !

- $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$
- $BA = DC$
- $[DO] = [OB]$
- $O \in \overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AA}$

3) En utilisant les points A, B, …, L de la figure suivante, donnez trois autres représentants de chacun des vecteurs suivants :



a) $\overrightarrow{EF}$	**c)** $\overrightarrow{FK}$	**e)** $\overrightarrow{BJ}$	**g)** $\overrightarrow{GI}$
b) $\overrightarrow{LH}$	**d)** $\overrightarrow{IK}$	**f)** $\overrightarrow{LF}$	**h)** $\overrightarrow{FI}$

4) Soit un triangle quelconque $\Delta(EFG)$.

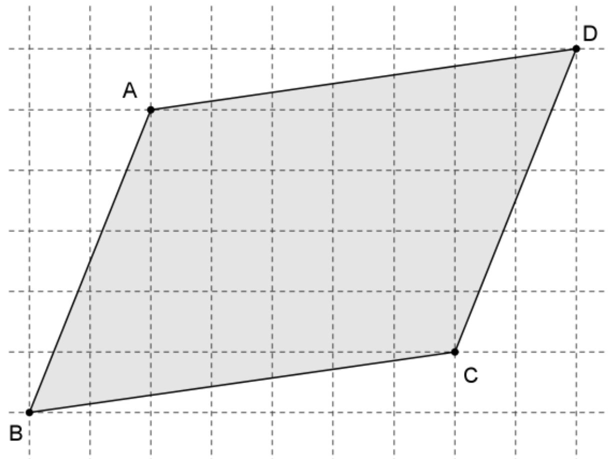
a) Construisez :

- le point H tel que $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
- le point I tel que $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{FG}$
- le point J tel que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{EG}$

b) Montrez que $E = \text{milieu}[IH]$, $F = \text{milieu}[IJ]$ et $G = \text{milieu}[HJ]$.

c) Quel est le rapport des aires des triangles $\Delta(EFG)$ et $\Delta(IJH)$? Justifiez votre réponse !

5) Reproduisez la figure suivante (ABCD = #) :



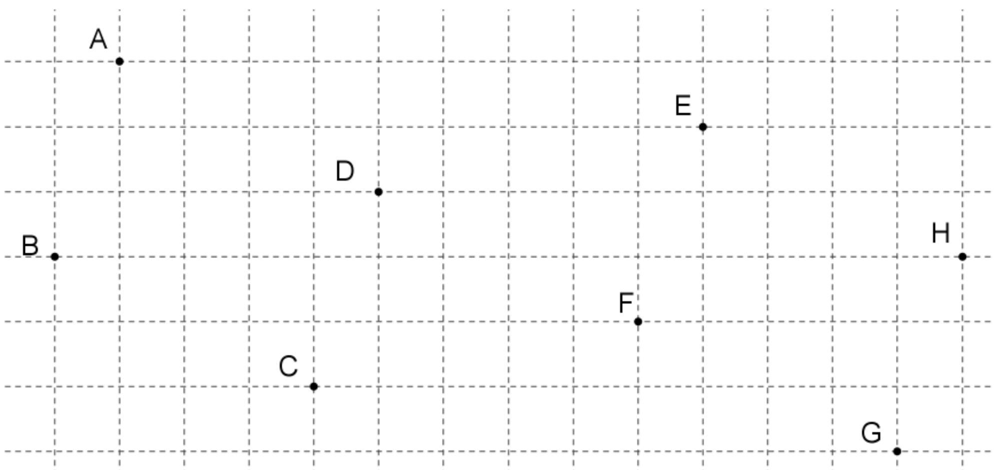
a) Construisez les points E, F, G, H et I définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC}$$

b) Quelle est la nature des quadrilatères BCEF, DGEC et ABHI ?

c) Que représente le point A pour le segment $[IC]$?

6) En vous servant uniquement des points A, B, …, G de la figure suivante :



a) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{AD}$.

d) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{BC}$.

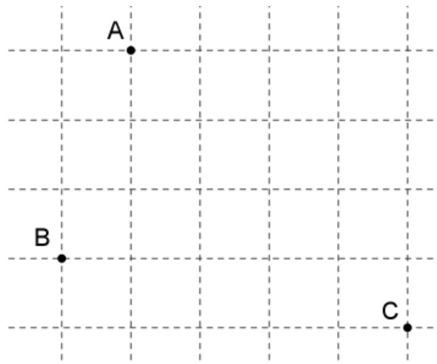
e) Déterminez tous les représentants de $\overrightarrow{DH}$.

f) Déterminez tous les parallélogrammes non aplatis de la figure.

7) Reproduisez la figure ci-contre.

a) Construisez les points D, E, F, G et H tel que :

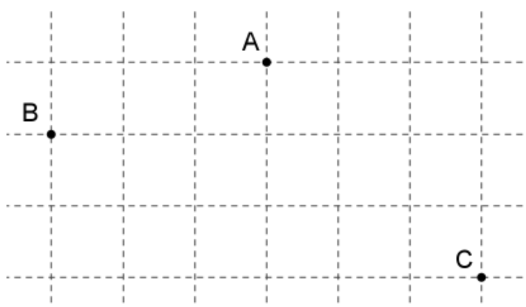
- $3 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$
- $-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$
- $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$
- $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{BE}$
- $3 \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GH}$



b) Complétez en vous basant sur votre figure :

- $\overrightarrow{AG} = \cdots \overrightarrow{AH}$ donc ...
- $\overrightarrow{HC} = \cdots \overrightarrow{HB}$ donc ...

8) Reproduisez la figure suivante puis construisez les points D, E, F définis par $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$. Énumérez tous les parallélogrammes de la figure obtenue !



9) Pour chacune des relations suivantes, faites une figure qui lui correspond :

a) $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$

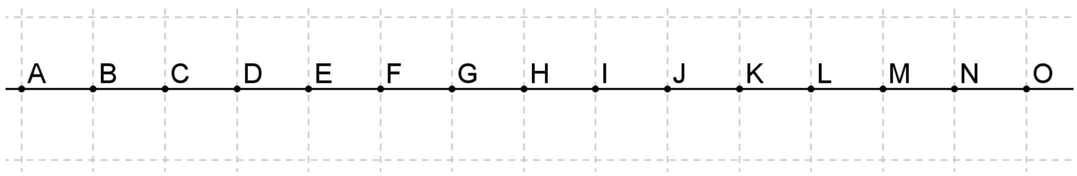
d) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

e) $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

10) Sur une droite d, marquez deux points O et A tels que $OA = 3\,\text{cm}$ puis placez sur cette droite les points B, C, D et E tels que :

$$3\cdot\overrightarrow{OB} = 4\cdot\overrightarrow{OA}\ ;\ 2\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO}\ ;\ \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

11) Soient A, B, …, O 15 points alignés et régulièrement espacés :



Complétez les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \ldots\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{GD} = \ldots\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IO} = \ldots\overrightarrow{GD}$

c) $\overrightarrow{CL} = \ldots\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EB} = \ldots\overrightarrow{CL}$

d) $\overrightarrow{GG} = \ldots\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IL} = \ldots\overrightarrow{GG}$

e) $\overrightarrow{DH} = \ldots\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FA} = \ldots\overrightarrow{HD}$

f) $\overrightarrow{BM} = \ldots\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GO} = \ldots\overrightarrow{MB}$

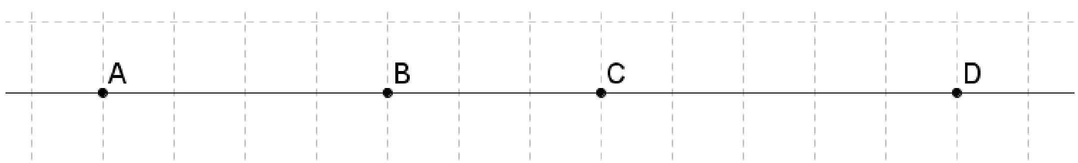
g) $\overrightarrow{OH} = \ldots\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OE} = \ldots\overrightarrow{OH}$

h) $\overrightarrow{AO} = \ldots\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{OA} = \ldots\overrightarrow{CH}$

i) $\overrightarrow{NF} = \ldots\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{FN} = \ldots\overrightarrow{EI}$

j) $\overrightarrow{JE} = \ldots\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{KD} = \ldots\overrightarrow{JE}$

12) Voici une figure avec 4 points alignés A, B, C et D :



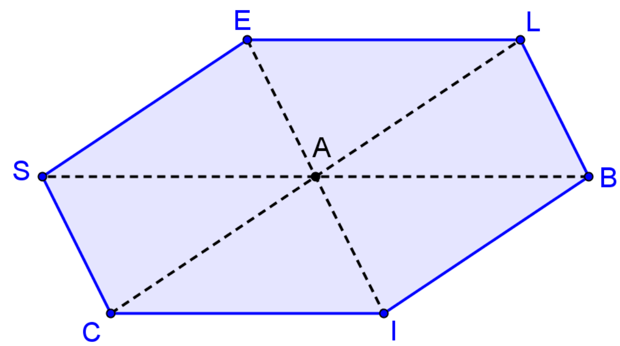
a) Complétez les relations de colinéarité suivantes :

- $\overrightarrow{AC} = \ldots\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BA} = \ldots\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CD} = \ldots\cdot\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{DA} = \ldots\cdot\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{BD} = \ldots\cdot\overrightarrow{DA}$
- $\overrightarrow{CC} = \ldots\cdot\overrightarrow{BA}$

b) Construisez sur la figure ci-dessus les points P, Q, R, S et T (***sans explication***) :

- $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{QA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$
- $6\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{TA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

13) Sur la figure suivante, les quadrilatères (SALE), (SAIC), (SCAE), (BAEL), (LAIB) et (BACI) sont des # :



En utilisant uniquement les points de la figure :

a) Donnez tous les représentants des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ES}$.

b) Complétez chacune des égalités suivantes :

- $-\frac{1}{2}\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{\ldots}$
- $\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\ldots}$

14) Dans chacun des deux cas suivants analysez si les points C, D et F sont alignés :

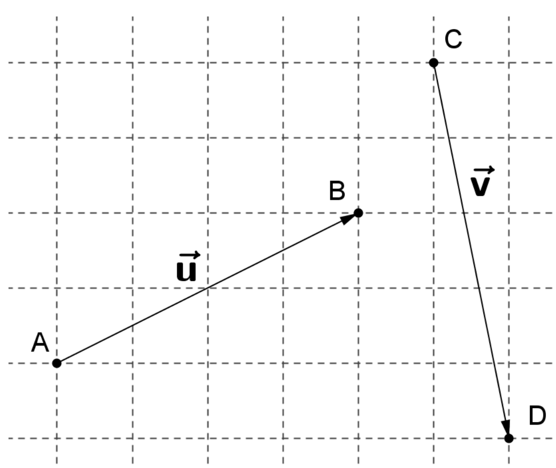
a) $2 \cdot \overrightarrow{FD} + 3 \cdot \overrightarrow{DC} - 4 \cdot \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

b) $x \cdot \overrightarrow{FD} + (1-x) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

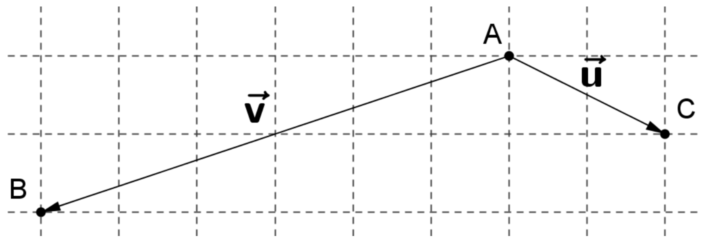
15) Soient A, B, C trois points et a, b, c trois nombres réels tel que $a \neq b$. Montrez que si $a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BC} + c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ alors A, B, C sont alignés.

16) Reproduisez chacune des figures suivantes, puis construisez les vecteurs et les points demandés :

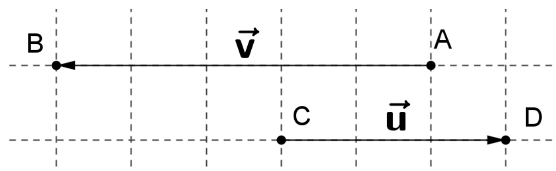
a) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AF}$



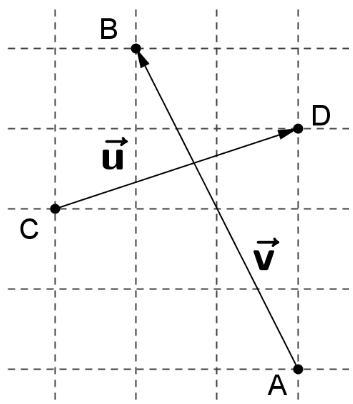
b) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{d} = \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AE}$



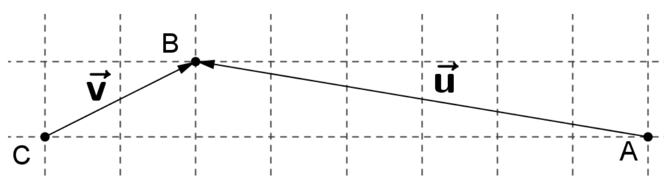
c) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{CE}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BF}$



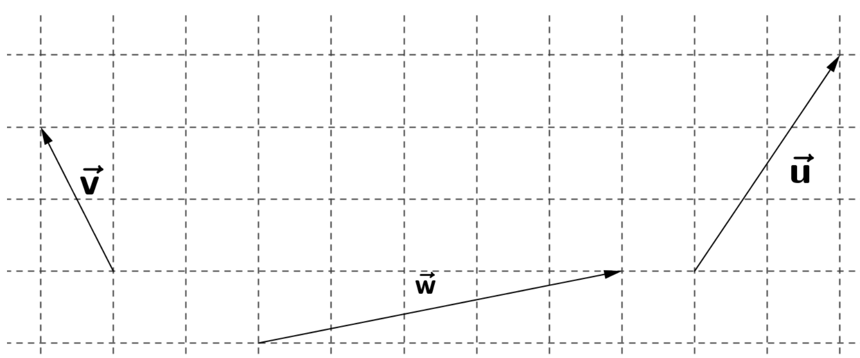
d) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{CE}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{BF}$



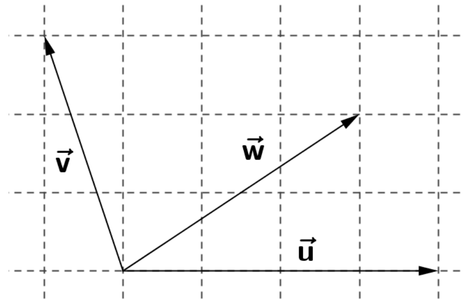
e) $\vec{s} = \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AE}$



f) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ et $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$



g) $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{v} - \vec{w}$, $\vec{c} = \vec{w} - \vec{u}$ et $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



17) En vous servant de la figure, donnez trois représentants de chacun des vecteurs suivants:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{LI}$.

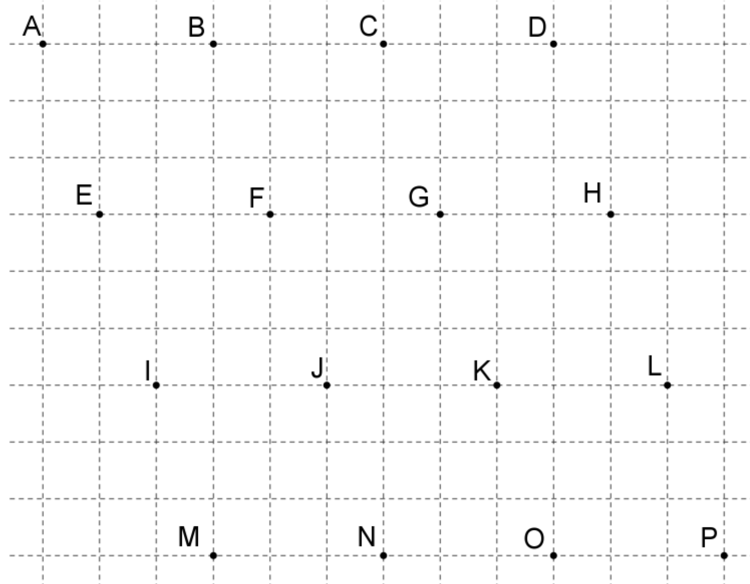
c) $\vec{c} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{LO}$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AM}$.

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GP}$.

f) $\vec{f} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CP}$.

g) $\vec{g} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{BI}$



18) Soient un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On définit les points C, D, E et F par :

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v},\ \overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v},\ \overrightarrow{AE} = -\vec{u} - \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{AF} = -\vec{u} + \vec{v}$$

Analysez la nature du quadrilatère (CDEF).

19) Soient les points A, B, C, D, E et F tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.

a) Faites une figure qui correspond à ces données.

b) Montrez que :

- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$

20) Soit (MACH) un # tel que $MA = 3\,\text{cm}$ et $AC = 4\,\text{cm}$.

a) Figure.

b) Construisez le point B tel que $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}$.

c) Construisez le point D tel que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{CH}$.

21) Soit un #(ABCD) et I le point d'intersection de ses diagonales (figure !). Calculez :

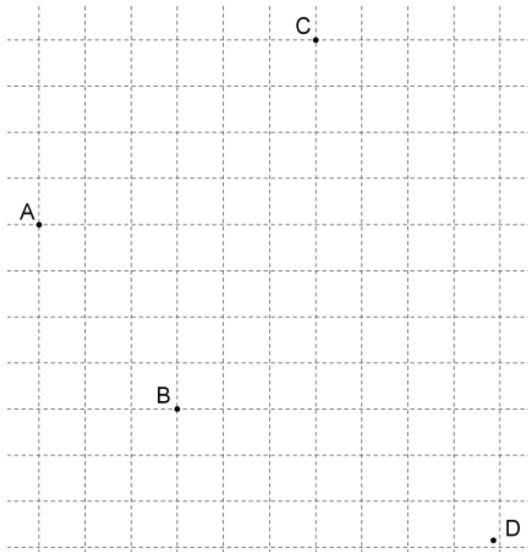
a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=$

b) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AI}=$

c) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BI}=$

d) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}=$

22) On donne quatre points A, B, C, D sur une grille :



a) Construisez les points E et F définis par $\vec{u}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

b) Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$? Justifiez votre réponse par un calcul vectoriel !

23) Soient A, B et C les trois points non alignés de la figure ci-dessous et K le point défini par la relation : $\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{BK}+3\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{BC}$

a) Exprimez $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

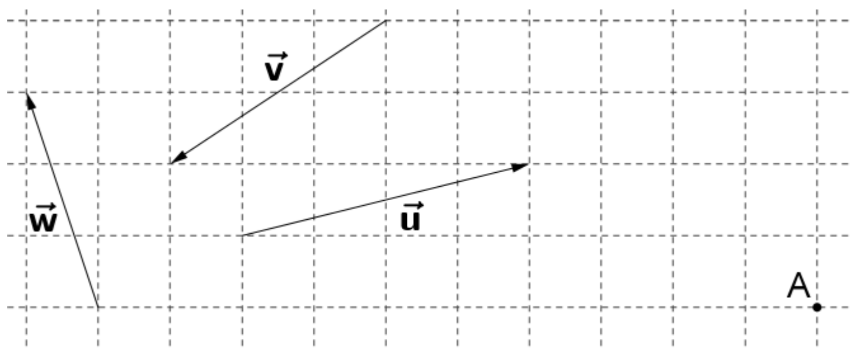
b) Déduisez-en la construction du point K sur la figure.

24) Soient deux points A et B distants de 7 cm (figure). Construisez le point C tel que

$$3\cdot\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{BC}+5\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$$

25) Reproduisez la figure ci-dessous sur votre feuille (dessinez $\vec{w}$ près du bord gauche de votre feuille !) puis construisez :

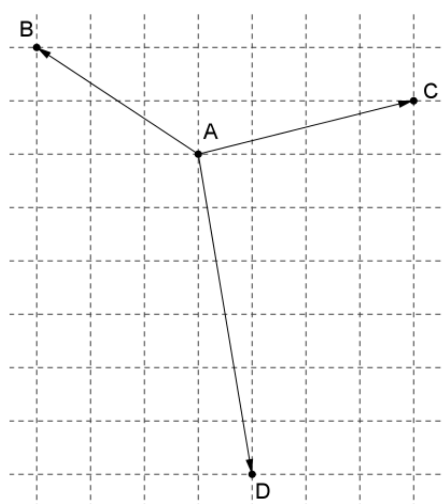
- le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \vec{u}$
- le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{w}$
- le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{v} - \vec{u}$
- le point F tel que $\overrightarrow{FB} = \vec{w} - 3 \cdot \vec{v}$
- le point G tel que DAGC = #



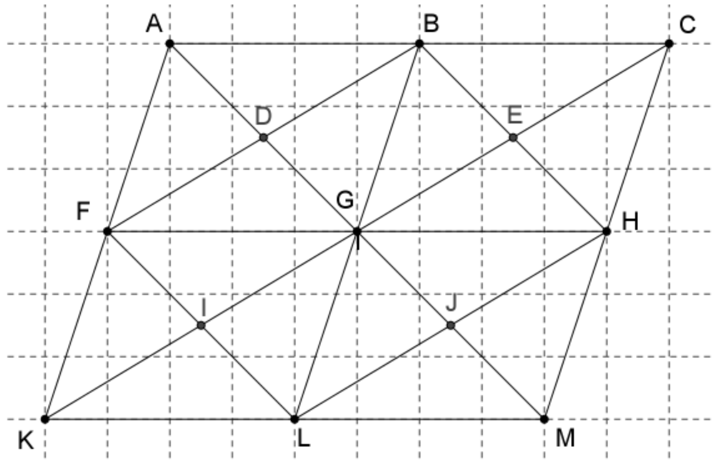
26) Simplifiez l'écriture du vecteur $\vec{u} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}\right) - \overrightarrow{CB}$ où A, B, C, D sont quatre points quelconques.

27) Reproduisez la figure ci-dessous puis construisez les points M et P tels que

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$



28) Sur la figure suivante ACMK est un #, B est le milieu de [AC], H celui de [CM], L celui de [KM] et F celui de [AK] :



a) Comptez le nombre de # non aplatis sur cette figure (uniquement ceux dont les quatre côtés sont tracés) !

b) En utilisant les points de la figure, donnez des vecteurs égaux aux vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{CG}$
- $\overrightarrow{LG}-\overrightarrow{IL}$
- $-\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AM}$
- $-\overrightarrow{MK}+\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{CG}$

c) Complétez par des vecteurs :

- $\ldots-\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{FD}$
- $\overrightarrow{FG}-3\cdot\ldots=\overrightarrow{BK}$

29) Faites les calculs ci-dessous en utilisant les points de la figure suivante :

a) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}$

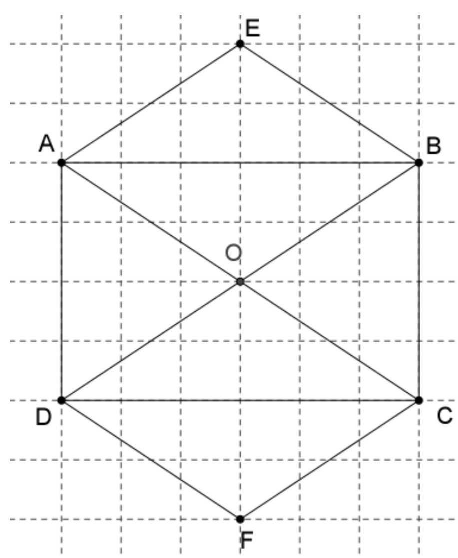
b) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$

c) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OC}$

e) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$



30) Analysez si les points A, B et C sont alignés (puis faites une figure) sachant que :

a) $2\cdot\overrightarrow{BA}=3\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{5}{6}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$

31) Les points A, B, C, D, E et F et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont définis par la figure ci-contre. Construisez les points G, H, I et J et les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{d}$ en faisant à chaque fois une nouvelle figure :

a) $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{EG}$

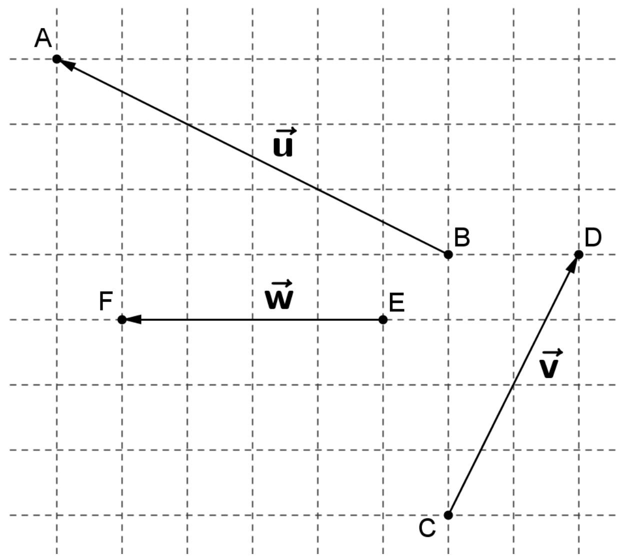
b) $\vec{b}=\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{CH}$

c) $\vec{c}=\vec{v}-\vec{w}+\vec{u}$

d) $\vec{d}=3\cdot\vec{w}-2\cdot\vec{u}+\vec{v}$

e) $\overrightarrow{FI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{FE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

f) $3\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AJ}=2\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}$



32) Soient A et B deux points distants de 1,5 cm (figure).

a) Construisez le point C tel que : $\overrightarrow{BC}=\frac{5}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Construisez le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=-\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$.

c) Déterminez le réel k tel que : $\overrightarrow{CD}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

d) Calculez $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$.

33) Soient ABCD un # et I le milieu de $[AC]$ (figure). En utilisant les points donnés, simplifiez le plus possible les expressions :

a) $\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}$

c) $2\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DA}$

34) Sur la figure suivante, déterminez un représentant de :

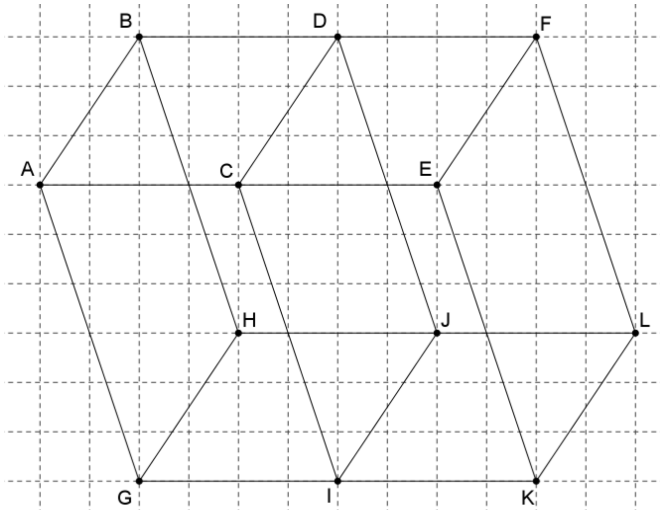
a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{LF}$

b) $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{JF}$

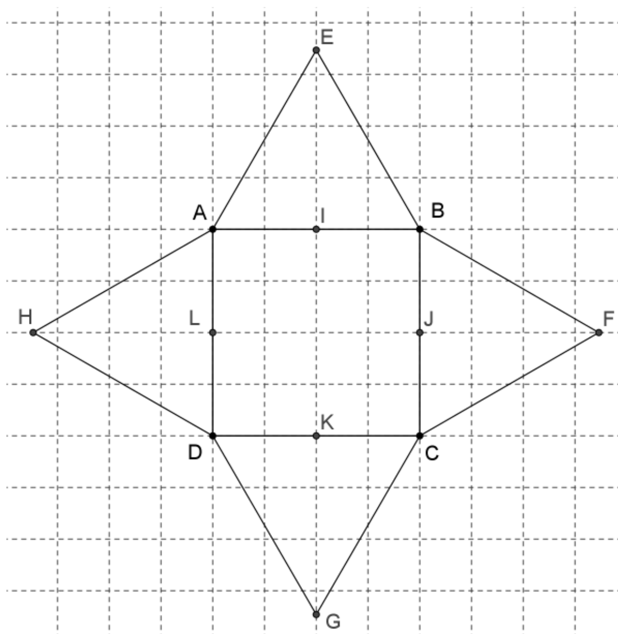
c) $\overrightarrow{EH}-2\cdot\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{LE}$

d) $\overrightarrow{BL}-\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{CF}$

e) $\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{LI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}-\frac{1}{3}\overrightarrow{FK}$



35) Sur la figure suivante les triangles $\Delta(ABE),\Delta(BCF)$, $\Delta(CDG)$ et $\Delta(ADH)$ sont équilatéraux et (ABCD) est un carré :



Complétez en vous servant uniquement des points de la figure :

a) $\ldots+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{IE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DG}=\ldots$

c) $\ldots-\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{HD}$

d) $2\cdot\ldots-\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{LB}$

e) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\ldots$

f) $\overrightarrow{HA}-2\cdot\ldots=\overrightarrow{CF}$

g) $2\cdot\overrightarrow{KJ}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HA}=\ldots$

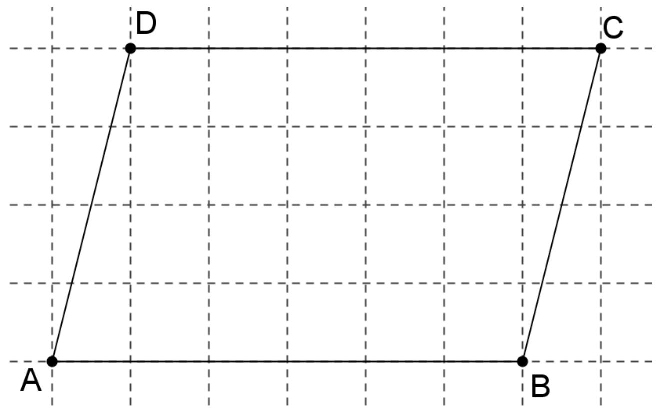
36) Reproduisez la figure suivante puis construisez les points M, N, P et Q définis par : :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{BD} - \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$2\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QD} = 4\cdot\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$$



37) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ avec $AB = 2,5\text{ cm}$, $AC = 5\text{ cm}$ et $BC = 6\text{ cm}$ et les points D et E définis par les équations vectorielles :

- $\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{BC} + 2\cdot\overrightarrow{CD} = 3\cdot\overrightarrow{AD}$
- $9\cdot\overrightarrow{CE} - 14\cdot\overrightarrow{AE} = 5\cdot\overrightarrow{BE}$

Construisez $\Delta(ABC)$ puis D et E.

38) Soient A, B, C trois points non alignés et I, J deux points définis par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{AC}$ et $4\cdot\overrightarrow{BJ} = 3\cdot\overrightarrow{BC}$ (figure). Montrez par un calcul vectoriel que les points A, I et J sont alignés.

39) Soit $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque et D le point défini par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 3\cdot\overrightarrow{AC}$.

a) Construisez D.

b) Exprimez $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) Exprimez $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

d) Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

40) Soient A et B deux points distincts. Construisez les points M, P, Q, R, S, T, U et V définis par les équations vectorielles :

a) $\overrightarrow{AM} = 5\cdot\overrightarrow{BM}$

b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PB}$

c) $\overrightarrow{BQ} - 3\cdot\overrightarrow{AQ} = 2\cdot\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

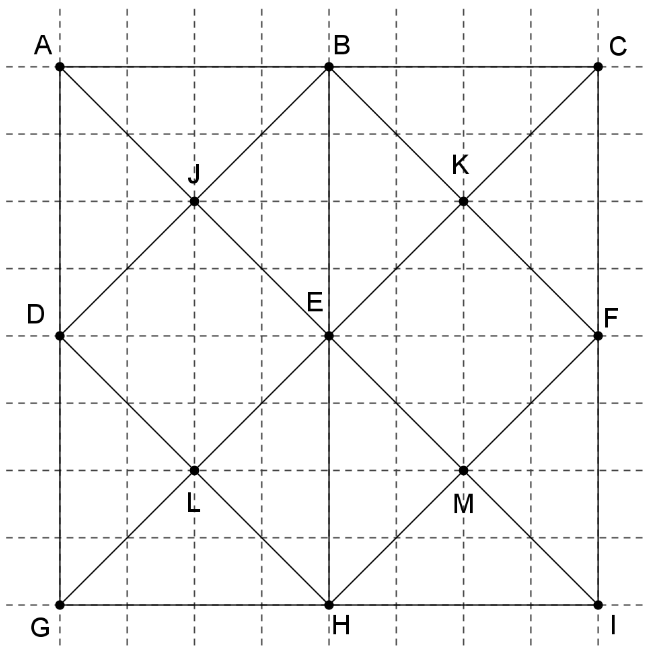
e) $2\cdot\overrightarrow{AS}-3\cdot\overrightarrow{BS}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{BT}-2\cdot\overrightarrow{AT}=2\cdot\overrightarrow{BA}$

g) $2\cdot\overrightarrow{AU}-3\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

h) $\overrightarrow{VA}-5\cdot\overrightarrow{BV}=\vec{0}$

41) En considérant la figure ci-contre, complétez :



a) $\overrightarrow{AM}=\ldots\overrightarrow{FK}$

b) $\overrightarrow{FK}=\ldots\overrightarrow{MA}$

c) $\overrightarrow{BE}=\ldots\overrightarrow{BJ}-\ldots\overrightarrow{FD}$

d) $\overrightarrow{LE}+\overrightarrow{CF}=\ldots$

e) $\overrightarrow{JM}-\overrightarrow{LK}=\ldots$

f) $\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{AB}=\ldots$

g) $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{LG}-\overrightarrow{MI}=\ldots$

h) $\left\|\overrightarrow{LC}\right\|=\ldots$ (unité = côté d'un carré du quadrillage)

42) Etant donné un triangle $\Delta(ABC)$ quelconque, construisez les points Q, R, S, T, U et V définis par les équations vectorielles :

a) $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{RB}-\overrightarrow{RC}=\vec{0}$

c) $2\cdot\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AB}$

d) $2\cdot\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$

e) $\overrightarrow{AU}-2\cdot\overrightarrow{BU}+3\cdot\overrightarrow{CU}=2\cdot\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AV}-3\cdot\overrightarrow{VB}=2\cdot\left(\overrightarrow{CV}+\overrightarrow{AV}-\overrightarrow{BC}\right)$

43) Soient A, B et M trois points, montrez que :

a) M = milieu de $[AB]\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

b) M = milieu de $[AB]\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}$.

44) Soit un triangle quelconque $\Delta(ABC)$ et I le milieu de [BC].

Montrez que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AI}$.

45) On donne le parallélogramme #(ABCD), et on définit les points E et F par les égalités vectorielles $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$. Démontrez vectoriellement que C est le milieu de [EF]. Faites d'abord une figure !

46) Soit $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque et D, E les points définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AC}$.

a) Faites une figure.

b) Prouvez que C est le milieu de $[DE]$.

47) Tracez deux points A et B tels que $AB=5\text{ cm}$.

a) Construisez les points C, D et E définis par :

- $2\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot\overrightarrow{CB}$
- $3\cdot\overrightarrow{AD}-2\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{9}{5}\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$

b) Montrez que B est le milieu de $[CE]$.

48) Soit G le centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrez que :

a) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

b) G est également le centre de gravité du triangle $\Delta(A'B'C')$.

c) Construisez les points D, E, F tels que $\overrightarrow{A'D}=2\cdot\overrightarrow{A'G}$, $\overrightarrow{B'E}=2\cdot\overrightarrow{B'G}$ et $\overrightarrow{C'F}=2\cdot\overrightarrow{C'G}$ puis montrez que G est aussi le centre de gravité du triangle $\Delta(DEF)$.

49) Soient $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque, D le point tel que $A=\text{milieu de}[CD]$, E le point tel que $B=\text{milieu de}[AE]$ et F le point tel que $C=\text{milieu de}[BF]$.

a) Figure.

b) En désignant par G et H les centres de gravité des triangles $\Delta(ABC)$ et $\Delta(DEF)$ respectivement, montrez que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=3\cdot\overrightarrow{GH}$.

c) Déduisez-en que $G=H$.

50) Soit $\Delta(ABC)$ un triangle équilatéral de côté 6 cm (figure). Construisez les points Q et T tels que :

a) $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$

b) $2\cdot\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$

51) Soient $\Delta(ABC)$ un triangle isocèle avec $AB=AC=6\,\text{cm}$ et $BC=4\,\text{cm}$ de centre de gravité G et D, E, F trois points définis par les égalités : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$.

a) Figure.

b) Que peut-on dire des points D, E, F ? Justifiez votre réponse !

c) Montrez par un calcul vectoriel que G est aussi le centre de gravité de $\Delta(DEF)$.

52) Soient $\Delta(ABC)$ un triangle quelconque, G son centre de gravité et D, E, F trois points définis par : $\overrightarrow{AD}+3\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, $2\cdot\overrightarrow{EA}-3\cdot\overrightarrow{EC}=2\cdot\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF}-4\cdot\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}-4\cdot\overrightarrow{FB}$.

a) Exprimez $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

b) Déduisez-en que G est aussi le centre de gravité du triangle $\Delta(DEF)$.

53) Soit G le centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$.

a) Montrez qu'il existe un point unique D tel que $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Que peut-on dire du quadrilatère (ABGD) ?

54) Soit G le centre de gravité d'un triangle $\Delta(ABC)$, A', B', C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.

a) Construisez les points S, P et R définis par :

$\overrightarrow{GS}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ $\quad\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}$ $\quad\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$

b) Montrez que :

$\overrightarrow{GS}=-\overrightarrow{GA}$ $\quad\overrightarrow{GP}=-\overrightarrow{GB}$ $\quad\overrightarrow{GR}=-\overrightarrow{GC}$

c) Quelle est l'isométrie (vue en 5^e !) qui transforme le triangle $\Delta(ABC)$ en le triangle $\Delta(SPR)$?

55) Soient deux triangles $\Delta(ABC)$ et $\Delta(DEF)$ et leurs centres de gravité G et G' respectivement.

a) Montrez que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=3\cdot\overrightarrow{GG'}$

b) Déduisez-en une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles aient le même centre de gravité.

56) Soit un triangle $\Delta(ABC)$ et G son centre de gravité .

a) Construisez les points I, J, K sachant que :

- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BJ}=2\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

b) Montrez que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.