# CHAPITRE IV

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

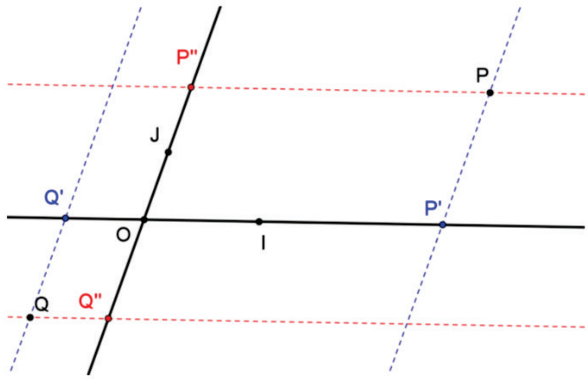
## 1) Repères cartésiens du plan

### a) Construction

Un **repère du plan** est un système qui permet d'indiquer la *position exacte* de n'importe quel point du plan par la donnée de **deux nombres appelés coordonnées** de ce point. Ceci permet de remplacer les raisonnements (souvent difficiles !) sur des figures par un calcul (en général assez simple) sur les coordonnées des points de cette figure. Cette façon de faire de la géométrie a été introduite en 1637 par **René Descartes (1596 – 1650)** et est appelée **géométrie analytique**.

La manière la plus simple et la plus courante de construire un tel repère, appelé **repère cartésien**, est la suivante :

On fixe trois points non alignés $O, I, J$ du plan et on trace les droites $(OI)$ et $(OJ)$. Pour déterminer les coordonnées d'un point quelconque $P$ on trace une droite $d \parallel (OJ)$ qui coupe $(OI)$ en un point $P'$ et une droite $d' \parallel (OI)$ qui coupe $(OJ)$ en un point $P''$ :




Comme $P' \in (OI)$ les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OP'}$ sont colinéaires donc il existe un nombre réel *unique* $x_P$ tel que $\overrightarrow{OP'} = x_P \cdot \overrightarrow{OI}$. De même il existe un nombre réel *unique* $y_P$ tel que $\overrightarrow{OP''} = y_P \cdot \overrightarrow{OJ}$. De plus $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}$ puisque $(OP'PP'') = \#$.

Ainsi il existe un **couple *unique*** de deux nombres réels $(x_P; y_p)$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = x_P \cdot \overrightarrow{OI} + y_P \cdot \overrightarrow{OJ}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont *fixes*, la connaissance des deux réels $x_P$ et $y_P$ nous renseigne sur la position exacte du point P !

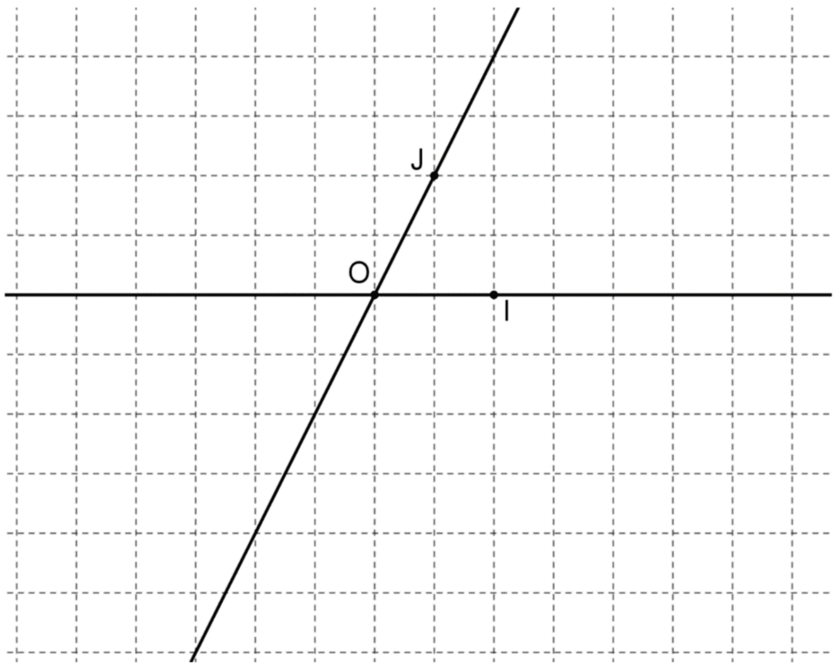
**Vocabulaire**

- $x_P$ et $y_P$ sont appelés **coordonnées** du point $P$ dans le **repère cartésien** $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ et on note : $P\left(x_P;y_p\right)$
- $x_P$ est l'**abscisse** de $P$ et $y_P$ est l'**ordonnée** de $P$
- le point $O$ est l'**origine** du repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$
- $(OI)$ est l'**axe des abscisses** et $(OJ)$ est l'**axe des ordonnées** du repère

Ainsi : $\boxed{P\left(x_P;y_p\right) \text{ dans } \left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=x_P\cdot\overrightarrow{OI}+y_P\cdot\overrightarrow{OJ}}$

***Exemple***

Représentez les points $A(3;0)$, $B(-2;0), C(2;1), D(1;2), E(-2;1{,}5)$, $F(-1{,}5;-2)$ et $G(2{,}5;-3)$ dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ :




**Complétez** :

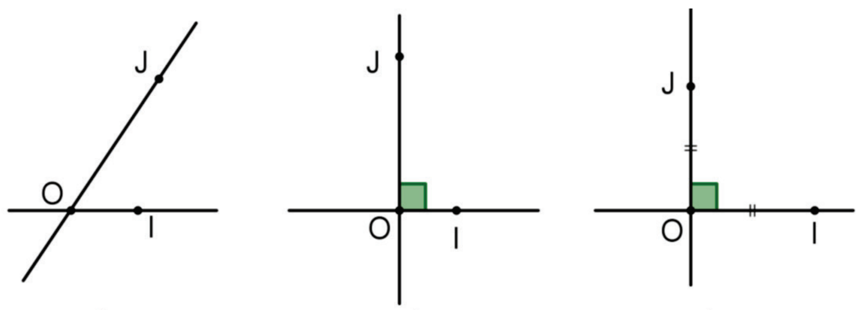
- 1 est ……………..………….. du point $C$ et ……………………….. du point $D$.
- $O(\ldots;\ldots)$, $I(\ldots;\ldots)$ et $J(\ldots;\ldots)$
- $M(5;-9)$ dans $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) \Leftrightarrow$ …………..……………………………….

*Remarques*

- Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont parfois notés plus simplement $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La condition que $O$, $I$, $J$ sont des points <u>non alignés</u> est équivalente à dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.
- Si $M$ est un point quelconque (non fixe) du plan, on note souvent ses coordonnées $M\left(x;y\right)$. L'axe des abscisses est aussi appelé **axe des *x*** et noté $\left(Ox\right)$ et l'axe des ordonnées **axe des *y*** et noté $\left(Oy\right)$.
- Deux **points sont égaux** si et seulement si ils ont les **mêmes coordonnées** :
  $M(x,y)=M'(x',y')\Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$

### b) Repères orthogonaux et orthonormés

Soit $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ un repère cartésien. Si $\left(OI\right)\perp\left(OJ\right)$ on dit que le repère est **orthogonal** et si *de plus* $OI=OJ$ on dit que le repère est **orthonormé** (on note : **R.O.N.**).

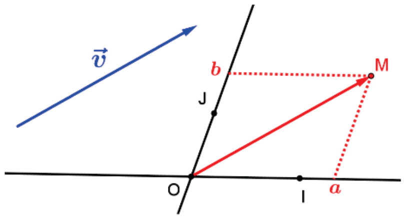



*repère quelconque* *repère orthogonal* *repère orthonormé*

A chaque fois que c'est possible on préfère choisir un R.O.N. parce que d'une part c'est le repère le plus « régulier » (donc facile à utiliser) et d'autre part parce que certaines formules (*que nous ne verrons pas cette année !*) ne sont utilisable *que* dans un R.O.N.. Pour des raisons pratiques on est cependant parfois obligé de choisir un repère orthogonal, par exemple si on doit tracer des points comme $A\left(0,03;569\right)$. De même dans certains problèmes géométriques le repère le plus simple peut être un repère quelconque !

## 2) Coordonnées d'un vecteur

Soit un repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ du plan et un vecteur $\vec{v}$, alors il existe *un seul* point $M(a;b)$ tel que $\vec{v}=\overrightarrow{OM}$.




Connaître ce point *M,* c'est-à-dire ses coordonnées *a* et *b*, c'est connaître un représentant de $\vec{v}$ donc le vecteur $\vec{v}$ lui-même. Il est donc naturel de poser que les coordonnées du point M sont également celles du vecteur $\vec{v}$. Pour faire la différence entre les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur, on note souvent (mais pas toujours) celles-ci *verticalement* :

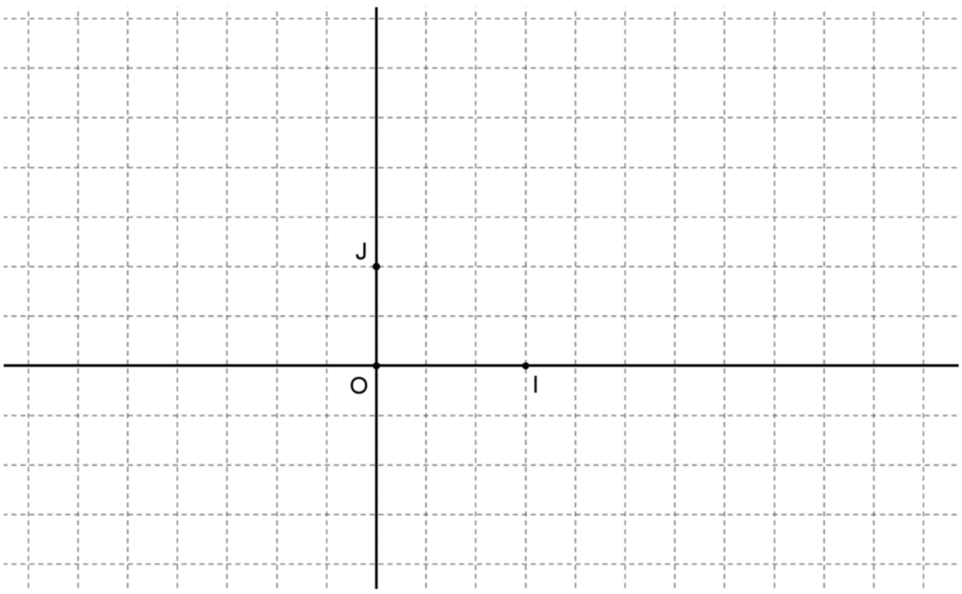
$$\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \text{ dans le repère } \left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right) \Leftrightarrow \vec{v}=a\cdot\overrightarrow{OI}+b\cdot\overrightarrow{OJ}}$$

***Exemples***

Complétez : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$, $\vec{0}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

Tracez un représentant de chacun des vecteurs suivants dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\2\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2,5\end{pmatrix},\ \vec{w}\begin{pmatrix}1\\-0,5\end{pmatrix},\ \vec{s}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-1,5\end{pmatrix},\ \vec{t}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},\ \vec{p}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$




*Exercices 1 - 4*

## 3) Calcul vectoriel

Dans un repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan soient les points $A\left(x_A;y_A\right)$, $B\left(x_B;y_B\right)$ et $C\left(x_C;y_C\right)$, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ et un nombre réel $\alpha$.

- **Egalité de deux vecteurs** :

  Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_u=x_v\\y_u=y_v\end{cases}$$

- **Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel** :

$$\alpha\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_u\\\alpha\cdot y_u\end{pmatrix}$$

  En effet $\vec{u}=x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}$ donc $\alpha\cdot\vec{u}=\alpha\cdot\left(x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}\right)=\alpha x_u\cdot\vec{i}+\alpha y_u\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\alpha\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\cdot x_u\\\alpha\cdot y_u\end{pmatrix}$.

  *Exemple* : si $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ alors $4\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

- **Coordonnées de la somme de deux vecteurs** :

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}$$

  En effet $\vec{u}+\vec{v}=\left(x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}\right)+\left(x_v\cdot\vec{i}+y_v\cdot\vec{j}\right)=\left(x_u+x_v\right)\cdot\vec{i}+\left(y_u+y_v\right)\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}$

  *Exemple* : si $\vec{u}\begin{pmatrix}-9\\7\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix}11\\-8,6\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

- **Coordonnées d'un vecteur défini par deux points** :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

  En effet $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, or $A\left(x_A;y_A\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A\cdot\vec{i}+y_A\cdot\vec{j}$ et $B\left(x_B;y_B\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}=x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}$ d'où :

  $\overrightarrow{AB}=\left(x_B\cdot\vec{i}+y_B\cdot\vec{j}\right)-\left(x_A\cdot\vec{i}+y_A\cdot\vec{j}\right)=\left(x_B-x_A\right)\cdot\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\cdot\vec{j}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

  *Exemple* : si $A\left(-4;13\right)$ et $B\left(5;7,2\right)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

- **Coordonnées du milieu d'un segment :**

$$I=\text{mil}\left[AB\right]\Leftrightarrow I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

En effet $I\left(x_I;y_I\right)=\text{mil}\left[AB\right]\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A-x_I \\ y_A-y_I \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_B-x_I \\ y_B-y_I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A-x_I+x_B-x_I \\ y_A-y_I+y_B-y_I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B-2x_I=0 \\ y_A+y_B-2y_I=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A+x_B}{2}=x_I \\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=y_I \end{cases}$$

- **Coordonnées du centre de gravité d'un triangle :**

$$G=\text{centre de gravité de }\Delta\left(ABC\right)\Leftrightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

En effet $G\left(x_G;y_G\right)=\text{centre de gravité de }\Delta\left(ABC\right)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A-x_G \\ y_A-y_G \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_B-x_G \\ y_B-y_G \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_C-x_G \\ y_C-y_G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B+x_C-3x_G=0 \\ y_A+y_B+y_C-3y_G=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=x_G \\ \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=y_G \end{cases}$$

*Exemple* : si $A\left(14;-8\right)$, $B\left(-5;22\right)$ et $C\left(15;-11\right)$ alors le milieu de $\left[AB\right]$ est $I\left(.....;.....\right)$ et le centre de gravité de $\Delta\left(ABC\right)$ est $G\left(.....;.....\right)$.

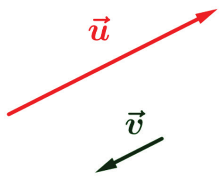
***Exercices 5 - 14***

## 4) Vecteurs colinéaires

- **Rappel** :

  Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel $k$ tel que :

  $$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k \cdot \vec{u}.$$




- En particulier pour tout vecteur $\vec{u}$ on a $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$ donc le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.
- Dire que **deux vecteurs non nuls sont colinéaires** revient donc à dire qu'**ils ont même direction** !
- ***Exemples***

  Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$

  $$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9k\\21k\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}6 = -9k\\-14 = 21k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = -\frac{6}{9}\\k = -\frac{14}{21}\end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3} \text{ donc } \vec{u} = -\tfrac{2}{3} \cdot \vec{v}.$$

  $$\vec{u} = k \cdot \vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5k\\-12k\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}6 = 5k\\-14 = -12k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = \frac{6}{5}\\k = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}\end{cases} \text{ impossible car } \frac{6}{5} \neq \frac{7}{6}$$

  Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires mais pas $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
- *Le théorème suivant donne une méthode plus simple pour déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou non.*

  **Théorème.** Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ dans un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

  Alors :

  $$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow x_u \cdot y_v = x_v \cdot y_u}$$

  *Démonstration.*

  1^er^ cas : $x_v \neq 0$ et $y_v \neq 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = k \cdot \vec{v}$

  $$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kx_v\\ky_v\end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases}x_u = kx_v \,\big|\cdot y_v \neq 0\\y_u = ky_v \,\big|\cdot x_v \neq 0\end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases}x_u y_v = kx_v y_v\\x_v y_u = kx_v y_v\end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow x_u y_v = x_v y_u \qquad (*)$$

2^e^ cas : $x_v = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{\jmath}$ sont colinéaires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$ est également colinéaire à $\vec{j}$ donc $x_u = 0$ et par conséquent l'égalité (*) est vérifiée.

Réciproquement si l'égalité (*) est vérifiée on a $x_u \cdot y_v = 0 \cdot y_u = 0 \Leftrightarrow x_u = 0$ ou $y_v = 0$. Si $x_u = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{\jmath}$ sont colinéaires et par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aussi. Si $y_v = 0$ alors $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont encore colinéaires.

3^e^ cas : $y_v = 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{\imath}$ sont colinéaires

La démonstration est analogue à celle du 2^e^ cas.

CQFD

On peut reformuler cette propriété en introduisant la notion de déterminant de deux vecteurs :

**Définition**. Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ dans un repère quelconque $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Le **déterminant** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$, est le nombre réel défini par :

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } &\Leftrightarrow x_u y_v - x_v y_u = 0 \\ &\Leftrightarrow \det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0 \end{aligned}}$$

- ***Exemples***

  Reprenons les exemples précédents :

  $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -14 & 21 \end{vmatrix} = 6 \cdot 21 - (-14) \cdot (-9) = 126 - 126 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

  $\det(\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -14 & -12 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-12) - (-14) \cdot 5 = -72 + 70 \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires

- Voici **deux applications pratiques de cette propriété** :

  (1) $\boxed{A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0}$

  (2) $\boxed{(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0}$

- ***Exemples***

Soient $A(3;-5)$, $B(-8;-1)$, $C(-30;7)$, $D(-4;1)$ et $E(14;-9)$ alors :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-33\\12\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-11 & -33\\4 & 12\end{vmatrix}=-11\cdot 12-4\cdot(-33)=0$

Donc $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-7\\6\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-11 & -7\\4 & 6\end{vmatrix}=-11\cdot 6-4\cdot(-7)\neq 0$

Donc $A$, $B$ et $D$ ne sont pas alignés.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}44\\-16\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CE})=\begin{vmatrix}-11 & 44\\4 & -16\end{vmatrix}=-11\cdot(-16)-4\cdot 44=0$

Donc $(AB)\parallel(CE)$.

d) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-22\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}18\\-10\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DE})=\begin{vmatrix}-22 & 18\\8 & -10\end{vmatrix}=-22\cdot(-10)-8\cdot 18\neq 0$

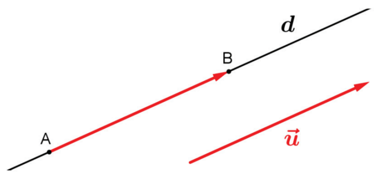
Donc $(BC)\nparallel(DE)$.

*Exercices 15 - 21*

## 5) Equations cartésiennes d'une droite

- **Définition**

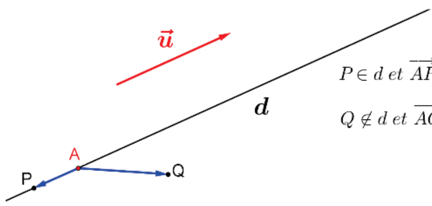
Soi $d$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On dit que $\vec{u}$ est *un* **vecteur directeur** de $d$ ssi il existe deux points (distincts) $A$ et $B$ sur $d$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.




- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires.
- Un vecteur directeur indique la direction d'une droite donc toutes les droites ayant **le même vecteur** $\vec{u}$ sont **parallèles**.
- **Propriété**

Soit $d$ une droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$, alors

$$\boxed{\forall P \text{ du plan : } \quad P\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}}$$



- Soient $A(x_A;y_A)\in d$, $P(x;y)$ un point du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $d$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors d'après la propriété précédente on a :

$$\begin{aligned} P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AP},\vec{u})=0 \\ &\Leftrightarrow (x-x_A)y_u-(y-y_A)x_u=0 \\ &\Leftrightarrow xy_u-x_Ay_u-yx_u-y_Ax_u=0 \\ &\Leftrightarrow y_ux-x_uy-x_Ay_u+y_Ax_u=0 \end{aligned}$$

En posant $a=y_u$, $b=-x_u$ et $c=-x_Ay_u+y_Ax_u$ on obtient :

$$P(x;y)\in d \Leftrightarrow ax+by+c=0$$

On dit que $ax+by+c=0$ est *une* **équation cartésienne** de *d*, ce qui signifie qu'un point *P* appartient à la droite *d* ssi ses coordonnées vérifient cette équation.

Notation :

$$d \equiv ax+by+c=0$$

Réciproquement on peut montrer que toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où *a*, *b*, *c* sont trois coefficients réels (tel que *a* et *b* non tous les deux nuls) est **une équation cartésienne d'une droite *d* de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.**

- ***Exemple***

Soit *d* la droite passant par $A(2;-3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} P(x;y)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AP},\vec{u})=0 \\ &\Leftrightarrow 4(x-2)+1\cdot(y+3)=0 \\ &\Leftrightarrow 4x+y-5=0 \end{aligned}$$

D'où : $d\equiv 4x+y-5=0$

$B(7;-23)\in d$ car $4\cdot 7-23-5=0$

*Exercices 22 – 26*

## 6) Equation réduite d'une droite

- ***Exemple***

  Soit la droite $d \equiv 3x-2y+5=0$. Pour déterminer un point de *d*, on remplace dans cette équation *x* par n'importe quelle valeur, *p.ex.* $x=-7$, et on résout l'équation d'inconnue *y* obtenue : $-21-2y+5=0 \Leftrightarrow y=-8$. Ainsi $A(-7;-8)\in d$. *Autre méthode* : on commence par exprimer *y* en fonction de *x* : $3x-2y+5=0 \Leftrightarrow -2y=-3x-5 \Leftrightarrow y=1,5x+2,5$, ce qui permet un calcul plus rapide pour différentes valeurs de *x* :

  si $x=-7$ alors $y=1,5\cdot(-7)+2,5=-8$

  si $x=4$ alors $y=1,5\cdot 4+2,5=8,5$

  si $x=26$ alors $y=1,5\cdot 26+2,5=41,5$, etc

  L'équation $y=1,5x+2,5$ est appelée **équation réduite** de *d*.

- **Cas général**

  Soit $d \equiv ax+by+c=0$ (avec *a* et *b* non tous les deux nuls) une équation cartésienne d'une droite *d*, alors : $ax+by+c=0 \Leftrightarrow by=-ax-c$. Pour exprimer *y* en fonction de *x* il faut diviser les deux membres de l'équation par *b* ce qui nous amène à distinguer deux cas.

  1$^{er}$ cas : $b\neq 0$

  $by=-ax-c \quad |:b \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ et en posant $p=-\frac{a}{b}$ et $q=-\frac{c}{b}$ l'équation de la droite a la forme : $d\equiv y=px+q$ appelée **équation réduite** de *d*.

  2$^{e}$ cas : $b=0$

  Alors $a\neq 0$ puisque *a* et *b* ne peuvent pas être nuls tous les deux, d'où:

  $d\equiv ax+0y+c=0 \Leftrightarrow ax=-c \quad |:a \Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}$ et en posant $k=-\frac{c}{a}$ l'équation de la droite a la forme : $d\equiv x=k$ appelée également **équation réduite** de *d*.

  Ainsi chaque droite *d* admet une équation, appelée **équation réduite de *d***, de l'une des deux formes suivantes :

  $$\boxed{d\equiv y=px+q \quad ou \quad d\equiv x=k}$$

- **Interprétation graphique**

  - Nous savons (*voir p 10*) que la droite $d\equiv ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et que l'axe *(Oy)* a pour vecteur directeur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Or $\vec{u}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires

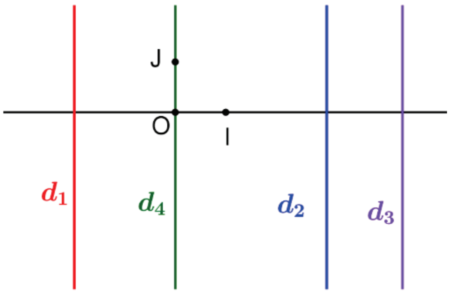
ssi $-b \cdot 1 = a \cdot 0 \Leftrightarrow -b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ en d'autres termes :

$$\boxed{d \parallel (Oy) \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow d \equiv x = k}.$$

*Exemples* :

Sur le graphique ci-dessous on a :

$d_1 \equiv x = -2$, $d_2 \equiv x = 3$, $d_3 \equiv x = 4{,}5$ et $d_4 \equiv x = 0$ (il est évident que $d_4 = (Oy)$).



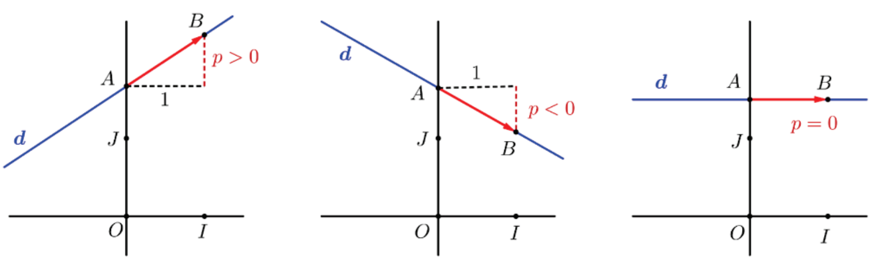

On voit que $d_1$ est l'ensemble des points qui ont pour abscisse $-2$, $d_2$ est l'ensemble des points qui ont pour abscisse 3, etc.

- Soit $d \equiv y = px + q$

Si $x = 0$ alors $y = q$ donc $A(0;q) \in d \cap (Oy)$. Ainsi $A$ est le point d'intersection de $d$ et de l'axe des $y$ et c'est pourquoi $q$ est appelé **ordonnée à l'origine**.

Si $x = 1$ alors $y = p + q$ donc $B(1; p+q) \in d$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d$. Trois cas peuvent alors se présenter :

- si $p > 0$ la droite « monte » et d'autant plus vite que $p$ est grand
- si $p < 0$ la droite « descend » et d'autant plus vite que $p$ est petit
- si $p = 0$ alors $d \parallel (Ox)$




***p*** est appelé **pente** ou **coefficient directeur** de $d$.

- Soient deux droites *non parallèles à (Oy)* d'équations réduites $d \equiv y = px + q$ et $d' \equiv y = p'x + q'$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ respectivement $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ p' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{d \parallel d' \Leftrightarrow p = p'}$$

En effet $d \parallel d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires $\Leftrightarrow p \cdot 1 = 1 \cdot p' \Leftrightarrow p = p'$

*Exercices 27 - 37*

## 7) Intersection de deux droites

Soient deux droites $d \equiv ax + by + c = 0$ et $d' \equiv a'x + b'y + c' = 0$.

Un point $M(x, y)$ appartient à l'**intersection** de ces deux droites si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations en même temps :

$$M(x, y) \in d \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

On dit que ces deux équations forment un **système d'équations linéaires.**

Or il n'y a que trois possibilités pour l'intersection de ces deux droites :

- $d$ et $d'$ sont **sécantes**, c'est-à-dire qu'elles se coupent un seul point $I(x_I, y_I)$ : dans ce cas on dit que le système a **une seule solution**, le couple $(x_I, y_I)$.
- $d$ et $d'$ sont **strictement parallèles**, c'est-à-dire $d \cap d' = \varnothing$, et le système n'a **aucune solution**.
- $d$ et $d'$ sont **confondues**, c'est-à-dire $d = d'$, et le système a **une infinité de solutions** : les coordonnées de tous les points des deux droites confondues.

***Exemples***

- Soient $d \equiv 3x - 2y - 17 = 0$ et $d' \equiv 4x + 7y - 13 = 0$, pour déterminer si ces deux droites sont parallèles ou sécantes, il suffit de regarder si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ou non. Or $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $d'$ et $2 \cdot 4 \neq 3 \cdot (-7)$ donc les deux droites sont sécantes. Pour trouver leur point d'intersection il faut alors résoudre le système de deux équations à deux inconnues $x$ et $y$ :

$$\begin{cases} 3x - 2y - 17 = 0 & (1) \\ 4x + 7y - 13 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Exprimons l'une des deux inconnues en fonction de l'autre à l'aide de l'une des deux équations, *par exemple* $x$ en fonction de $y$ à l'aide de (1) :

$$(1) \Leftrightarrow 3x = 2y + 17 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{17}{3}$$

Remplaçons ensuite $x$ par l'expression trouvée **dans l'autre** équation (on peut dire aussi qu'on **substitue** l'expression trouvée à $x$ dans l'autre équation) :

$$\textit{dans } (2) :\ 4\left(\frac{2}{3}y + \frac{17}{3}\right) + 7y - 13 = 0$$

Nous avons obtenu une équation **à une seule inconnue** que nous savons résoudre :

$$\begin{aligned}
4\left(\frac{2}{3}y + \frac{17}{3}\right) + 7y - 13 = 0 &\Leftrightarrow \frac{8}{3}y + \frac{68}{3} + 7y - 13 = 0 \quad |\cdot 3 \\
&\Leftrightarrow 8y + 68 + 21y - 39 = 0 \\
&\Leftrightarrow 29y + 29 = 0 \\
&\Leftrightarrow 29y = -29 \quad |:29 \\
&\Leftrightarrow y = -1
\end{aligned}$$

Enfin pour trouver $x$ il suffit de remplacer $y$ par $-1$ dans l'expression trouvée plus haut : $x = \frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{17}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{17}{3} = 5$

*Conclusion* : les deux droites se coupent au point $I(5;-1)$.

*Remarque* : Cette méthode est appelée **résolution par substitution**. A titre d'exercice vous pouvez vérifier qu'on trouve le même résultat en exprimant $y$ en fonction de $x$ à l'aide de l'équation (2) par exemple.

- Soient $d \equiv 9x + 12y - 31 = 0$ et $d' \equiv 6x + 8y - 22 = 0$ de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$ respectivement. Comme $-12\cdot 6 = 9\cdot(-8) = -72$, ces deux vecteurs sont colinéaires et par conséquent $d \parallel d'$. Afin de déterminer si les deux droites sont strictement parallèles ou confondues, nous allons employer la même méthode que précédemment :

$$\begin{cases} 9x + 12y - 31 = 0 & (1) \\ 6x + 8y - 22 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 8y = -6x + 22 \quad |:8 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{8}x + \frac{22}{8}$$

*dans* (1) : $9x + 12\left(-\frac{6}{8}x + \frac{22}{8}\right) - 31 = 0 \Leftrightarrow 9x - 9x + 33 - 31 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ ce qui est impossible donc le système n'a pas de solution et les deux droites sont strictement parallèles !

- En remplaçant dans l'exemple précédent $d$ par $d \equiv 9x+12y-33=0$ on obtient avec les mêmes calculs à la fin :

  *dans* (1) : $9x+12\left(-\frac{6}{8}x+\frac{22}{8}\right)-33=0 \Leftrightarrow 9x-9x+33-33=0 \Leftrightarrow 0x=0$, ce qui est vrai pour tout réel $x$ donc le système admet une infinité de solutions : tous les couples de la forme $\left(x;-\frac{6}{8}x+\frac{22}{8}\right)$.

  *Conclusion* : les deux droites sont confondues ( $d=d'$ ).

***Exercices 38 - 42***