CHAPITRE VI

INEGALITES

COURS

COURS

1) Inégalités

Rappelons quelques propriétés des inégalités dans $\mathbb{R}$ vues en classe de 5^e.

- Il existe **quatre sortes d'inégalités** entre deux nombres réels a et b :

  (1) $a < b$

  (2) $a \leq b$

  (3) $a > b$

  (4) $a \geq b$

- Une inégalité a un **membre gauche** (représenté ici par a) et un **membre droit** (représenté par b).

- Une inégalité peut être **vraie** ou **fausse**, p.ex. les inégalités $5 < 7$, $-17,6 \geq -54,12$, $-\frac{2}{7} \leq \frac{13}{29}$, $8 \leq 8$ sont vraies, alors que les inégalités $-45 < -67$, $9 > 9$, $\frac{4}{5} > \frac{5}{4}$ sont fausses.

- Deux **inégalités équivalentes** (on note : $\cdots \text{ssi} \cdots$ ou $\ldots \cdots \Leftrightarrow \cdots$) sont deux inégalités qui sont ou bien simultanément vraies ou bien simultanément fausses.

  Exemples :
  - $7+2<10 \Leftrightarrow 7<10-2$ (les deux inégalités sont vraies)
  - $-8-1 \geq -2 \Leftrightarrow -8 \geq -2+1$ (les deux inégalités sont fausses)

- Voici un exemple simple mais très utile d'inégalités équivalentes :

$$\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R} \qquad a \leq b \Leftrightarrow b-a \geq 0}$$

- Ajoutons (ou retranchons) un même nombre aux deux membres d'une inégalité :

  Exemples
  - $5<12$ vraie et $5+7<12+7$, $5-10<12-10$ vraies aussi
  - $-19 \geq -35$ vraie et $-19+23 \geq -35+23$, $-19-7 \geq -35-7$ vraies aussi
  - $9<-5$ fausse et $9+72<-5+72$, $9-13<-5-13$ fausses également !

Propriétés 1

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall a,b,c \in \mathbb{R} & a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c \\ & a \leq b \Leftrightarrow a-c \leq b-c \end{array}}$$

En ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres d'une inégalité on obtient une inégalité équivalente.

Remarques :
- Cette propriété reste évidemment valable pour les autres inégalités : $<$, $\geq$ *et* $>$.
- On peut facilement démontrer cette propriété de la manière suivante :

$$a+c \leq b+c \Leftrightarrow (b+c)-(a+c) \geq 0 \Leftrightarrow b+\cancel{c}-a-\cancel{c} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq b$$

$$a-c \leq b-c \Leftrightarrow (b-c)-(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow b-\cancel{c}-a+\cancel{c} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq b$$

- Multiplions (ou divisons) les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif non nul :

  Exemples
  - $8<12$ vraie et $8 \cdot 3<12 \cdot 3$, $8:4<12:4$ vraies aussi
  - $-21 \geq -56$ vraie et $-21 \cdot 2 \geq -56 \cdot 2$, $-21:7 \geq -56:7$ vraies aussi
  - $9<-15$ fausse et $9 \cdot 5<-15 \cdot 5$, $9:3<-15:3$ fausses également !

Propriétés 2

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall a,b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}_+^* & a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \\ & a \leq b \Leftrightarrow a:c \leq b:c \end{array}}$$

En multipliant ou en divisant les deux membres d'une inégalité par un même nombre réel strictement positif on obtient une inégalité équivalente.

Démonstration :

$$a\cdot c\leq b\cdot c \Leftrightarrow b\cdot c-a\cdot c\geq 0\Leftrightarrow c(b-a)\geq 0\Leftrightarrow b-a\geq 0\,(car\ c>0)\Leftrightarrow a\leq b$$

$$a:c\leq b:c\Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{c}\leq b\cdot\frac{1}{c}\Leftrightarrow a\leq b\quad\left(\text{car }\frac{1}{c}>0\right)$$

- Multiplions (ou divisons) les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif non nul :

  Exemples

  - $8<12$ vraie et $8\cdot(-3)>12\cdot(-3)$, $8:(-4)>12:(-4)$ vraies
  - $-21\geq -56$ vraie et $-21\cdot(-2)\leq -56\cdot(-2)$, $-21:(-7)\leq -56:(-7)$ vraies
  - $9<-15$ fausse et $9\cdot(-5)>-15\cdot(-5)$, $9:(-3)>-15:(-3)$ fausses également !

Propriété 3

$$\boxed{\begin{array}{ll}\forall a,b\in\mathbb{R}\ \forall c\in\mathbb{R}_-^* & a\leq b\Leftrightarrow a\cdot c\geq b\cdot c\\ & a\leq b\Leftrightarrow a:c\geq b:c\end{array}}$$

En multipliant ou en divisant les deux membres d'une inégalité par un même nombre réel strictement négatif on obtient une inégalité équivalente à condition de **changer le sens** de l'inégalité.

Démonstration :

$$a\cdot c\geq b\cdot c\Leftrightarrow a\cdot c-b\cdot c\geq 0\Leftrightarrow c(a-b)\geq 0\Leftrightarrow a-b\leq 0\,(\text{car }c<0)\Leftrightarrow b-a\geq 0\Leftrightarrow a\leq b$$

$$a:c\geq b:c\Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{c}\geq b\cdot\frac{1}{c}\Leftrightarrow a\leq b\left(\text{car }\frac{1}{c}<0\right)$$

2) Inéquations du pemier degré à une inconnue

- Une **inéquation** à une inconnue est une inégalité dans laquelle un nombre est « caché » (ou « représenté ») par une lettre appelée **inconnue** de l'inéquation. Si en plus cette lettre n'a pas d'exposant (c'est-à-dire a pour exposant 1) on dit que c'est une inéquation du **premier degré**.
- **Résoudre** une telle inéquation revient à trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles on obtient une inégalité vraie ! Ces nombres sont appelés **solutions** de l'inéquation et l'ensemble des solutions est noté S.

- **Deux règles**

  Pour résoudre une inéquation, on utilise les trois propriétés des inégalités que nous venons de voir pour trouver une inéquation équivalente aussi simple que possible. Ces propriétés peuvent s'énoncer en deux règles très simples :

Règle 1

On peut faire passer un **terme** d'un membre à l'autre d'une inéquation à condition de **changer son signe**.

Règle 2

On peut multiplier ou diviser **tous les termes** des deux membres d'une inéquation par un même nombre non nul à condition de **changer le sens** de l'inégalité si ce **nombre est négatif**.

Remarque

Ce sont les mêmes règles que pour les équations, la seule différence étant qu'il faut changer le sens de l'inégalité si on la multiplie par un nombre négatif !

Exemples

- $4x-5<3 \Leftrightarrow 4x<3+5 \quad (règle\ 1)$
  $\Leftrightarrow 4x<8 \quad |:4 \quad (règle\ 2)$
  $\Leftrightarrow x<2 \qquad S=\left]-\infty,2\right[$
- $\frac{y}{3}-1\geq\frac{7}{3}-\frac{y}{2} \quad |\cdot 6 \quad \text{(règle 2)} \Leftrightarrow 2y-6\geq 14-3y$
  $\Leftrightarrow 2y+3y\geq 14+6 \quad \text{(règle 1)}$
  $\Leftrightarrow 5y\geq 20 \quad |:5 \quad \text{(règle 2)}$
  $\Leftrightarrow y\geq 4 \qquad S=\left[4,+\infty\right[$
- $5(7-v)<3v-4(2v+1) \Leftrightarrow 35-5v<3v-8v-4$
  $\Leftrightarrow -5v-3v+8v<-4-35 \quad (règle\ 1)$
  $\Leftrightarrow 0v<-39$ faux pour tout $v\in\mathbb{R}$ donc $S=\varnothing$
- $5(7-v)\geq 3v-4(2v+1) \Leftrightarrow 35-5v\geq 3v-8v-4$
  $\Leftrightarrow -5v-3v+8v\geq -4-35 \quad (règle\ 1)$
  $\Leftrightarrow 0v\geq -39$ vrai pour tout $v\in\mathbb{R}$ donc $S=\mathbb{R}$.

- Ces exemples montrent que l'ensemble S des solutions d'une telle inéquation est en général une demi-droite (donc une infinité de solutions) et parfois (mais rarement !) l'ensemble vide (aucune solution) ou l'ensemble $\mathbb{R}$ (tous les réels sont solutions).

Exercices 1 à 8

3) Systèmes d'inéquations

Un **système d'inéquations** (du premier degré à une inconnue) est un ensemble de plusieurs inéquations dont on cherche les **solutions communes**.

Exemples

- $\begin{cases} 3x-1 \le 5+7x & (1) \\ 5x-9 \le 3x-1 & (2) \end{cases}$

  Résolvons les deux inéquations séparément :

  $(1) \Leftrightarrow 3x-7x \le 5+1 \Leftrightarrow -4x \le 6 \,\big|\, :(-4) < 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{2}$ $\qquad S_1 = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

  $(2) \Leftrightarrow 5x-3x \le -1+9 \Leftrightarrow 2x \le 8 \,\big|\, :2 \Leftrightarrow x \le 4$ $\qquad S_2 = \left]-\infty, 4\right]$

  x est solution du système ssi $x \ge -\dfrac{3}{2}$ **et** $x \le 4$, donc $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\dfrac{3}{2}, 4\right]$

- $\begin{cases} 4x+3 < -33 & (1) \\ 2(7-x) > 11-5(x-3) & (2) \end{cases}$

  $(1) \Leftrightarrow 4x < -36 \Leftrightarrow x < -9$ $\qquad S_1 = \left]-\infty, -9\right[$

  $(2) \Leftrightarrow 14-2x > 11-5x+15 \Leftrightarrow 3x > 12 \,\big|\, :3 \Leftrightarrow x > 4$ $\qquad S_2 = \left]4, +\infty\right[$

  Or on ne peut pas avoir à la fois $x < -9$ **et** $x > 4$ donc $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$

- $\begin{cases} 5-y \le 0 & (1) \\ 8(y-1) \le 3y+17 & (2) \end{cases}$

  $(1) \Leftrightarrow -y \le -5 \,\big|\, \cdot(-1) \Leftrightarrow y \ge 5$ $\qquad S_1 = \left[5, +\infty\right[$

  $(2) \Leftrightarrow 8y-8 \le 3y+17 \Leftrightarrow 5y \le 25 \,\big|\, :5 \Leftrightarrow y \le 5$ $\qquad S_2 = \left]-\infty, 5\right]$

  Or $y \ge 5$ et $y \le 5 \Leftrightarrow y = 5$ donc $S = \{5\}$

- $\begin{cases} 84-9x \le -5x+32 & (1) \\ 6x-7 > 28-x & (2) \end{cases}$

  $(1) \Leftrightarrow -4x \le -52 \,\big|\, :(-4) \Leftrightarrow x \ge 13$ $\qquad S_1 = \left[13, +\infty\right[$

  $(2) \Leftrightarrow 6x+x > 28+7 \Leftrightarrow 7x > 35 \,\big|\, :7 \Leftrightarrow x > 5$ $\qquad S_2 = \left]5, +\infty\right[$

  Or $x \ge 13$ et $x > 5 \Leftrightarrow x \ge 13$ donc $S = S_1 \cap S_2 = \left[13, +\infty\right[$

Sur ces exemples on constate que l'ensemble des solutions d'un tel système peut être un segment, une demi-droite, un singleton, l'ensemble vide ou $\mathbb{R}$ si toutes les inéquations du système ont $\mathbb{R}$ comme ensemble des solutions.

Exercices 9 - 13

4) Encadrements

- *Exemple*

Quand on mesure la longueur x et la largeur y d'une feuille de papier rectangulaire avec une équerre on obtient des mesures « au millimètre près ». Par exemple on peut obtenir, en mm : $295 \leq x \leq 296$ et $209 \leq y \leq 210$. Ces doubles inégalités sont appelées **encadrements** de x et de y. La différence entre la plus petite valeur et la plus grande valeur possible qui vaut 1 dans les deux cas exprime la **précision** de ces encadrements (ici les mesures ont donné des encadrements à 1 mm près). Que peut-on alors dire du périmètre p et de l'aire A de cette feuille ?

On sait que $p = 2x + 2y$ et $A = x \cdot y$ donc en remplaçant x et y par les plus petites valeurs possibles (295 et 209) on obtient les plus petites valeurs possibles pour p et A : $2 \cdot 295 + 2 \cdot 209 = 1008 \leq p$ et $295 \cdot 209 = 61655 \leq A$. De même en remplaçant x et y par les plus grandes valeurs possibles (296 et 210) on obtient les plus grandes valeurs possibles pour p et A : $2 \cdot 296 + 2 \cdot 210 = 1012 \geq p$ et $296 \cdot 210 = 62160 \geq A$. On obtient ainsi les *encadrements* suivants de p et de A :

$$1008 \leq p \leq 1012 \text{ et } 61655 \leq A \leq 62160$$

On voit que ces calculs donnent des encadrements bien moins précis que les mesures : p est donné à $1012 - 1008 = 4\ mm$ près et A à $62160 - 61655 = 505\ mm^2$ près !

- **Définitions**

Soient a, b et x trois nombres réels tels que $a \leq x \leq b$. Cette double inégalité est appelée **encadrement** de x par les nombres a et b. La différence $b - a$ est appelée **amplitude** de cet encadrement et exprime la précision de celui-ci.

- *Remarque*

Aucune mesure dans la nature n'est précise à 100% puisqu'elle dépend toujours de la qualité des instruments de mesure qui ne sont jamais parfaits ni d'une précision absolue! Le résultat d'une mesure n'est donc jamais *un* nombre mais toujours un *encadrement* de la grandeur mesurée. De plus, comme le montre notre exemple, les *calculs* qu'on fait avec ces encadrements tendent généralement à augmenter l'amplitude, c'est-à-dire l'imprécision, de ces encadrements!

- Nous allons voir maintenant comment calculer avec des grandeurs dont on ne connaît que des encadrements.

- **Addition de deux encadrements quelconques**

Supposons que $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $b-a \geq 0$ et $d-c \geq 0$ donc :

$b-a+d-c \geq 0 \Leftrightarrow (b+d)-(a+c) \geq 0 \Leftrightarrow a+c \leq b+d$. D'où :

$$\boxed{\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad (a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d) \Rightarrow a+c \leq b+d}$$

Attention :il n'y a **pas d'équivalence** dans cette formule mais une simple **implication** ! En effet **si** $a \leq b$ et $c \leq d$ **alors** $a+c \leq b+d$, mais la réciproque est fausse : **si** $a+c \leq b+d$ **alors** on n'a **pas** *nécessairement* $a \leq b$ et $c \leq d$, p. ex. pour $a=5, b=8, c=13 \; et \; d=11$.

En appliquant deux fois la formule que nous venons de montrer, on a.

$$\boxed{\forall a,b,c,d,x,y \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad c \leq y \leq d) \Rightarrow a+c \leq x+y \leq b+d}$$

- **Soustraction de deux encadrements quelconques**

Supposons que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ et cherchons un encadrement de $x-y$. Comme $x-y=x+(-y)$ et que $c \leq y \leq d \,\big|\cdot(-1) \Leftrightarrow -c \geq -y \geq -d \Leftrightarrow -d \leq -y \leq -c$

on a d'près ce qui précède : $a+(-d) \leq x+(-y) \leq b+(-c) \Leftrightarrow a-d \leq x-y \leq b-c$.

Remarque

Plutôt que de retenir cette formule par cœur, essayez de vous rappeler la méthode qui consiste à remplacer la soustraction $x-y$ par l'addition $x+(-y)$.

Exemple

Encadrez $x-y$ sachant que $9 \leq x \leq 11$ et $5 \leq y \leq 8$:

$5 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow -5 \geq -y \geq -8 \Leftrightarrow -8 \leq -y \leq -5$,

donc $9+(-8) \leq x+(-y) \leq 11+(-5) \Leftrightarrow 1 \leq x-y \leq 6$.

- **Multiplication de deux encadrements positifs**

Supposons que $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$, alors $0 < a \cdot c \leq b \cdot c$ et $0 < c \cdot b \leq d \cdot b$ et par conséquent $0 < a \cdot c \leq b \cdot c \leq d \cdot b$, d'où $a \cdot c \leq b \cdot d$.

Ainsi : $\boxed{\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}_+ \quad (a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d}$

Ici encore on a une simple implication (pas d'équivalence !) comme on le voit facilement en prenant p. ex. $a=5, b=6, c=11 \; et \; d=10$:

On a bien $\underbrace{a \cdot c}_{55} \leq \underbrace{b \cdot d}_{60}$ et $a \leq b$, mais $c \not\leq d$!

En appliquant deux fois la formule que nous venons de montrer, on a :

$$\boxed{\forall a,b,c,d,x,y \in \mathbb{R}_+ \quad (a \le x \le b \quad \text{et} \quad c \le y \le d) \Rightarrow a \cdot c \le x \cdot y \le b \cdot d}$$

Attention : la formule sur la multiplication de deux encadrements *ne marche pas* avec des réels quelconques !

Exemples

Si $-5 \le x \le 2$ et $-10 \le y \le 4$ alors <u>on n'a pas</u> : $\overbrace{(-5)(-10)}^{50} \le xy \le \overbrace{2 \cdot 4}^{8}$!!

Si $-7 \le x \le -5$ et $6 \le y \le 9$ alors <u>on n'a pas</u> : $\underbrace{(-7) \cdot 6}_{-42} \le xy \le \underbrace{-5 \cdot 9}_{-45}$!!

- **Puissance d'un encadrement <u>positif</u>**

En appliquant la formule précédente avec $a = c$, $x = y$ et $b = d$ on obtient :

$$\forall a,b,x \in \mathbb{R}_+ \quad a \le x \le b \Rightarrow a^2 \le x^2 \le b^2$$

et de proche en proche:

$\forall a,b,x \in \mathbb{R}_+ \quad a \le x \le b \Rightarrow a^3 \le x^3 \le b^3$, $\forall a,b,x \in \mathbb{R}_+ \quad a \le x \le b \Rightarrow a^4 \le x^4 \le b^4$,

…., $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall a,b,x \in \mathbb{R}_+ \quad a \le x \le b \Rightarrow a^n \le x^n \le b^n$.

Vous verrez plus tard la raison pour laquelle, contrairement à ce qui se passe pour les formules précédentes, la réciproque de cette implication est vraie, c'est-à-dire:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall a,b,x \in \mathbb{R}_+ \quad a \le x \le b \Leftrightarrow a^n \le x^n \le b^n}$$

- **Racine carrée d'un encadrement <u>positif</u>**

Exemple

$4 \le 9 \quad et \quad \sqrt{4} \le \sqrt{9} \; (car\ 2 \le 3)$

Cas général

Soient a, b deux réels strictement positives, alors:

$$\begin{aligned} a \le b &\Leftrightarrow a - b \le 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 \le 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \le 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \le 0 \quad \left(car\ \sqrt{a} + \sqrt{b} \ge 0\right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b} \end{aligned}$$

Ainsi: $\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}_+ \quad a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}}$

En appliquant cette formule aux encadrements on obtient:

$$\boxed{\forall a,b,x \in \mathbb{R}_+ \quad a \le x \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{b}}$$

- **Inverse d'un encadrement positif**

En supposant que $0 < a \le b$, que peut-on dire des nombres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$?

Exemples

- $2 < 5$ et $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{3} < \frac{7}{5}$ et $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$

Cas général

$(0<)a < b \,\Big|\, \cdot\frac{1}{ab} > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, ainsi :

$$\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \quad a \le b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}}$$

En appliquant cette formule aux encadrements on obtient:

$$\boxed{\forall a,b,x \in \mathbb{R}_+^* \quad a \le x \le b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}}$$

- **Division de deux encadrements positifs**

Soient x et y deux nombres donnés par les encadrements positifs $(0<)a \le x \le b$ et $(0<)c \le y \le d$. Cherchons un encadrements de $\frac{x}{y}$:

Comme $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ on cherche d'abord un encadrement de $\frac{1}{y}$ où les inégalités vont dans le même sens que celles de l'encadrement de x : $\frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c}$ puis on multiplie les encadrements de x e t de $\frac{1}{y}$: $a \cdot \frac{1}{d} \le x \cdot \frac{1}{y} \le b \cdot \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c}$.

Remarque

Comme pour la soustraction il vaut mieux retenir la méthode que la formule c'est-à-dire remplacer la division $\frac{x}{y}$ par la multiplication $x \cdot \frac{1}{y}$!

Exemple

Soient $2 \leq x \leq 3$ *et* $5 \leq y \leq 6$ deux encadrements de x et de y, alors $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$ et

par conséquent : $2 \cdot \frac{1}{6} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 3 \cdot \frac{1}{5}$, donc $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{5}$.

Exercices 14 – 45

5) Inéquations de degré >1 et tableaux de signes

Signe d'un binôme du premier degré :

Exemples :

a) Etudions le ***signe*** de $3x-6$:

- $3x-6>0 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2$
- $3x-6=0 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$
- $3x-6<0 \Leftrightarrow 3x<6 \Leftrightarrow x<2$

On peut résumer cette étude dans le ***tableau de signes*** de $3x-6$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

b) Etudions de même le signe de $-2x+10$:

- $-2x+10>0 \Leftrightarrow -2x>-10 \Leftrightarrow x$ ....
- $-2x+10=0 \Leftrightarrow -2x=-10 \Leftrightarrow x$ ....
- $-2x+10<0 \Leftrightarrow -2x<-10 \Leftrightarrow x$ ....

Complétez le ***tableau de signes*** de $-2x+10$:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-2x+10$			

En général, étudions le ***signe d'un binôme*** $ax+b$ du premier degré (a et b sont deux réels donnés, $a \neq 0$) :

1er cas : $a>0$:

$$ax+b \underset{<}{\overset{>}{=}} 0 \Leftrightarrow ax \underset{<}{\overset{>}{=}} -b \Leftrightarrow x \underset{<}{\overset{>}{=}} -\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$ (signe de a)

<u>2^e cas</u> : $a < 0$:

$$ax+b \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow ax \overset{>}{\underset{<}{=}} -b \Leftrightarrow x \overset{<}{\underset{>}{=}} -\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$ (signe de a)

Retenons la :

> ***Règle pour le signe*** d'un binôme $ax+b$ du 1^{er} degré :
>
> Le signe de a se trouve toujours ***à droite*** dans le tableau du signe.
>
> (L'opposé du signe de a se trouve ***à gauche*** dans le tableau du signe.)

Passons maintenant aux ***<u>inéquations de degré >1</u>***. Beaucoup d'entre elles peuvent être résolues à l'aide d'un ***tableau de signes***.

Exemples :

a) $(3x-6)(-2x+10) \geq 0$ (inéquation du 2^e degré)

Remarquons que nous avons déjà étudié le signe des deux facteurs du 1^{er} membre. Nous en déduisons ***le signe de leur produit***, à compléter :

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x+10$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(3x-6)(-2x+10)$					

Par conséquent, l'ensemble de solutions de l'inéquation en haut est : $S =$ ....

b) A l'aide du même tableau de signes nous pouvons résoudre les inéquations suivantes :

- $(3x-6)(-2x+10) > 0$ $S =$ ....
- $(3x-6)(-2x+10) \leq 0$ $S =$ ....
- $(3x-6)(-2x+10) < 0$ $S =$ ....

c) $4x^2 > 9$

Lorsqu'***un des deux membres est non nul***, on applique la ***méthode suivante*** :

1. On passe tous les termes à gauche de l'inégalité ***afin d'avoir 0 à droite***.
2. On ***factorise*** l'expression de gauche.
3. On fait un tableau de signes du produit.
4. On lit l'ensemble des solutions dans la dernière ligne du tableau

Donc :

$$\begin{aligned} 4x^2 > 9 &\Leftrightarrow 4x^2 - 9 > 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+3)(2x-3) > 0 \end{aligned}$$

Il reste à déterminer le signe des deux facteurs du membre de gauche. Or :

- $2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$
- $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Ce sont les réels en lesquels les 2 binômes changent de signe : on les appelle encore ***valeurs critiques*** de l'inéquation.

En appliquant la règle de la page précédente (signe de a à droite dans le tableau), on obtient le ***tableau des signes du produit*** :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x-3)(2x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S=$ ....

d) On obtient de même le tableau de signes du quotient $\dfrac{2x+3}{2x-3}$, avec la seule différence que ***ce quotient n'existe pas lorsque*** $2x-3=0$. ($\Longrightarrow$ ***2 barres verticales***).

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{2x+3}{2x-3}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

On peut donc aussi résoudre des ***inéquations rationnelles*** à l'aide de tableaux de signes.

Indiquez l'ensemble de solutions des inéquations suivantes :

- $\dfrac{2x+3}{2x-3} \geq 0$ $\qquad S=$ ....
- $\dfrac{2x+3}{2x-3} > 0$ $\qquad S=$ ....
- $\dfrac{2x+3}{2x-3} \leq 0$ $\qquad S=$ ....
- $\dfrac{2x+3}{2x-3} < 0$ $\qquad S=$ ....