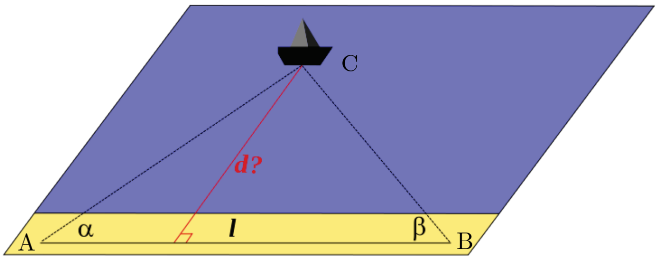
Trigonométrie dans un triangle rectangle

1. Introduction

La **trigonométrie** (du grec τρίγωνος / *trígonos*, « triangulaire », et μέτρον / *métron*, « mesure ») traite des relations entre ***distances*** et ***angles*** dans les ***triangles***. Elle est utilisée en ***astronomie*** et en ***navigation*** avec notamment la technique de ***triangulation***. Déjà six cents ans avant l'ère chrétienne, ***Thalès*** mit au point cette méthode pour évaluer la distance d d'un bateau en mer à la côte. Pour obtenir une mesure approximative de cette distance, il plaça deux observateurs A et B sur le rivage, éloignés d'une distance l ***connue***. Chacun d'entre eux devait mesurer l'angle que faisait la demi-droite le reliant au bateau avec celle le reliant à l'autre observateur. Ces informations suffisent pour déterminer la distance *d*. C'est un exercice que nous allons faire plus tard. Insistons sur le fait que tous les triangles dans ce chapitre sont ***rectangles***.



Considérons deux triangles ABC et $A'B'C'$, rectangles en C et C' respectivement et tels que leurs angles aigus en A et en A' sont égaux. Posons $\alpha = \widehat{A} = \widehat{A'}$.

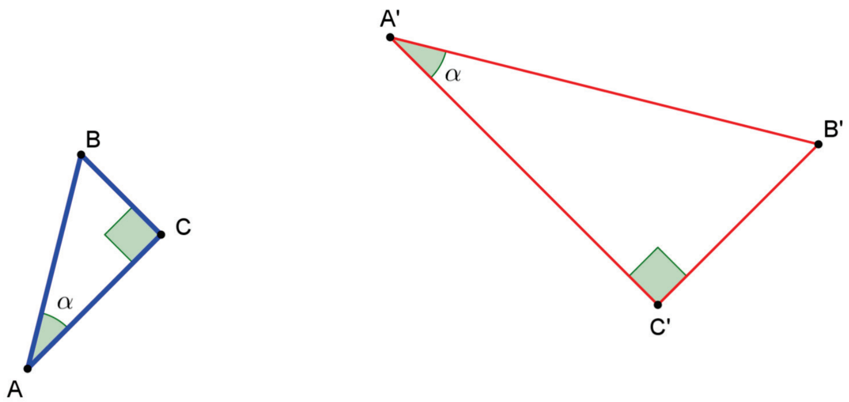


fig. 1

Si nous déplaçons les deux triangles dans le plan de façon à ce que leurs angles en A et A' soient superposés, nous obtenons la figure 2 :

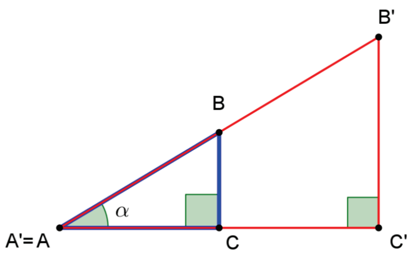


fig. 2

Nous remarquons alors que les segments $[BC]$ et $[B'C']$ sont parallèles et donc, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'}$$

En échangeant les moyens dans cette égalité, on obtient :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

Cela signifie que le rapport

$$\frac{\text{côté adjacent (à l'angle } \alpha)}{\text{hypoténuse}} = \cos\alpha$$

ne dépend que de l'angle aigu α du triangle rectangle choisi. Il est appelé $\cos\alpha$.

De même :

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

Donc le rapport :

$$\frac{\text{côté opposé (à l'angle } \alpha)}{\text{hypoténuse}} = \sin\alpha$$

ne dépend que de l'angle aigu α du triangle rectangle choisi. Il est appelé $\sin\alpha$.

Et finalement :

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$

Donc le rapport :

$$\frac{\text{côté opposé (à l'angle } \alpha)}{\text{côté adjacent (à l'angle } \alpha)} = \tan\alpha$$

ne dépend que de l'angle aigu α du triangle rectangle choisi. Il est appelé $\tan\alpha$.

2. Définitions et premières propriétés

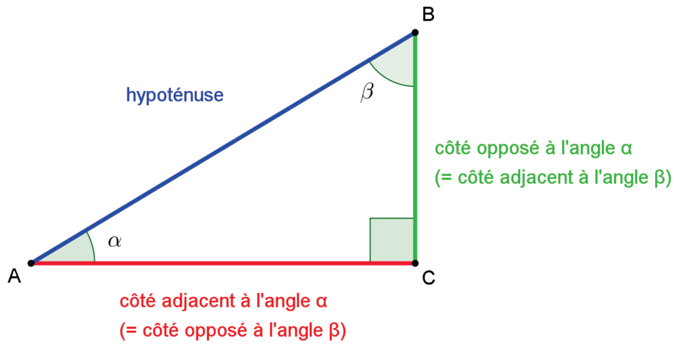


fig. 3

Soit ABC un triangle rectangle en C. Notons α et β les ***angles aigus*** en A et B respectivement. Les quatre ***nombres trigonométriques*** de l'angle $\hat{A} = \alpha$ sont :

a) le ***cosinus*** de l'angle α : $\cos\alpha = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{AB}$

b) le ***sinus*** de l'angle α : $\sin\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AB}$

c) la ***tangente*** de l'angle α : $\tan\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{BC}{AC}$

d) la ***cotangente*** de l'angle α : $\cot\alpha = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \dfrac{AC}{BC}$

Conséquences et propriétés immédiates :

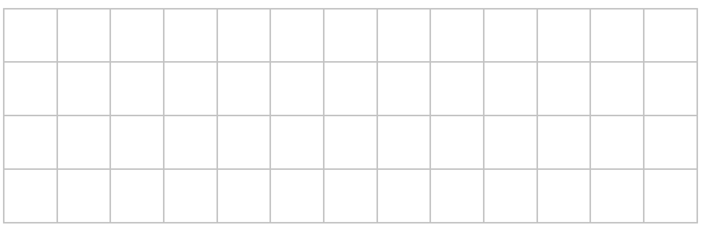
(1) L'angle α est mesuré en degrés (°) mais attention : $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$ n'ont ***pas d'unité*** ! Ce sont des ***rapports de longueurs***.

(2) Pour tout angle aigu α : $\boxed{0 < \cos\alpha < 1}$ et $\boxed{0 < \sin\alpha < 1}$. Expliquer pourquoi ?

....

....

(3) On a aussi : $\boxed{\tan\alpha > 0}$ et $\boxed{\cot\alpha > 0}$, mais $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$ peuvent être aussi grands qu'on veut ! ***Exemple*** : construire ci-dessous un angle α tel que $\tan\alpha = 5$. Que vaut alors $\cot\alpha$? Mesurer α à l'aide de votre rapporteur.



(4) Quel est le lien entre $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$?

$\boxed{\tan\alpha = \text{———}}$ $\boxed{\cot\alpha = \text{———}}$ $\boxed{\tan\alpha\cdot\cot\alpha =}$

(5) Calculer à l'aide des définitions dans le triangle ABC de la figure 3 :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\quad}{\quad}}{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{\quad}{\quad}\cdot\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\quad}{\quad}}{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{\quad}{\quad}\cdot\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \ldots\ldots\ldots$$

Retenons donc : $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ et } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

(6) ***Angles complémentaires*** : En appliquant la définition, on obtient les nombres trigonométriques de l'angle β, qui est l'angle ***complémentaire*** de α, c.-à-d. $\boxed{\alpha+\beta = 90°}$, ou encore $\boxed{\beta = 90° - \alpha}$:

$$\cos\beta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB} = \sin\alpha \qquad \sin\beta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB} = \cos\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{BC} = \cot\alpha \qquad \cot\beta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \frac{BC}{AC} = \tan\alpha$$

Exemple. Mesurer les angles aigus et les longueurs des côtés du triangle rectangle ABC ci-dessous, puis compléter : $\alpha = \ldots\ldots\ldots$ $\beta = \ldots\ldots\ldots$

$\cos\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sin\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

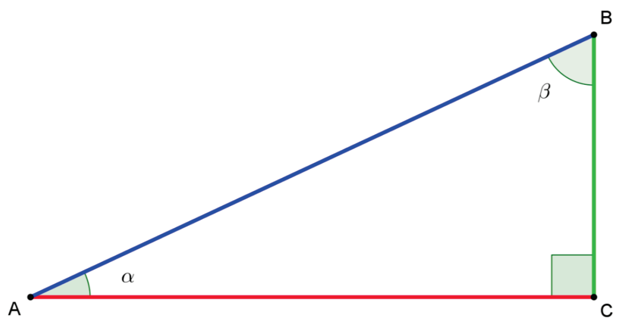
$\cot\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

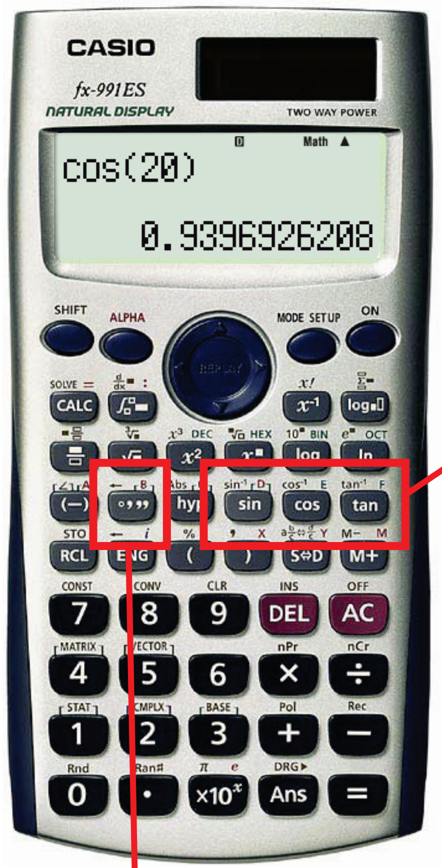
$\sin\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\tan\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cot\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



3. Usage de la calculatrice (CASIO)



Pour commencer, il faut ***choisir le degré*** comme unité d'angle par défaut en tapant :

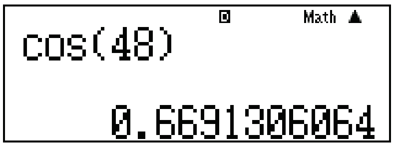
SHIFT MODE 3 (Deg)

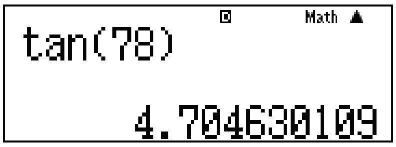
Un petit D s'affiche alors en haut de l'écran.

Il y a ***6 fonctions trigonométriques*** sur votre calculatrice :

1) ***sin, cos et tan*** : ces touches permettent de trouver le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle aigu dont on connaît l'amplitude.

Exemples :





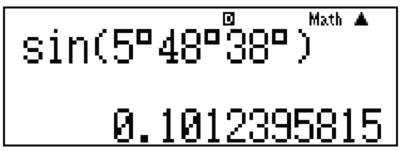
Remarques : a) On n'a pas besoin d'entrer ° derrière l'angle puisque l'unité par défaut est le degré.

b) Pour éviter des erreurs d'arrondi trop grands, il faut indiquer au moins 4 chiffres derrière la virgule du sinus, du cosinus ou de la tangente.

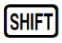
c) Comme pour les heures :

1 ***degré*** est subdivisé en 60 ***minutes*** : $1° = 60'$
1 ***minute*** est subdivisée en 60 ***secondes***, $1' = 60''$

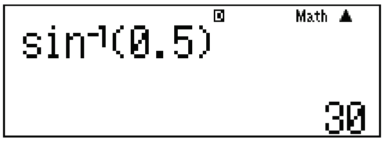
On entre les minutes et les secondes à l'aide de la touche °''' :



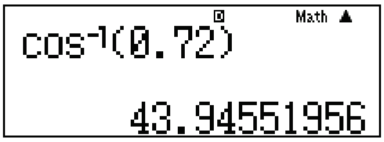
$\sin(5°48'38'') = 0{,}1012395815$

2) ***sin⁻¹, cos⁻¹ et tan⁻¹*** : ces fonctions permettent de trouver l'amplitude d'un angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente. On peut aussi utiliser les notations : $\sin^{-1} = \text{Arcsin}$, $\cos^{-1} = \text{Arccos}$, $\tan^{-1} = \text{Arctan}$. On accède à ces fonctions en utilisant . 

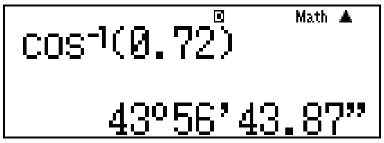
Exemples :

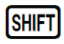


L'angle dont le sinus est 0,5 est 30°



L'angle dont le cosinus est 0,72 est 43,9455…°



Pour convertir l'angle en ° ' ", on tape 

 :

43,9455…° $= 43°56'43,87''$

4. Formules

a) ***Relation fondamentale*** de la trigonométrie

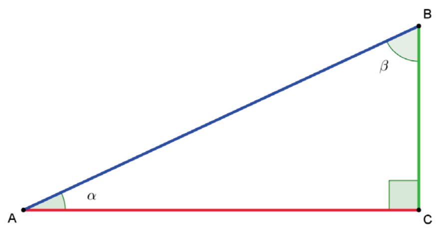
Pour tout angle aigu α :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Remarque : $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$ et $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$

Démonstration : Dans le triangle ABC rectangle en C et tel que $\hat{A} = \alpha$, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} & AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad /:AB^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{AC^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{aligned}$$



Applications : Cette formule permet de déterminer le sinus d'un ***angle aigu*** dont on connaît le cosinus ou inversement, ***sans utiliser la calculatrice***. Par exemple :

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = ?$$

Réponse :

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{16}{25} + \sin^2\alpha = 1\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2\alpha = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Leftrightarrow\ &\sin\alpha = \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

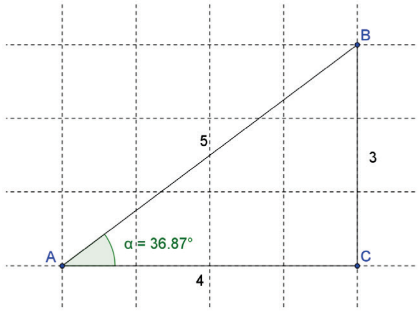
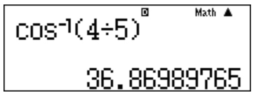
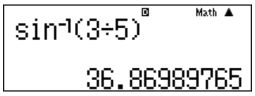


fig. 4

Remarque : Une valeur approchée de l'angle α peut être trouvée à l'aide de la calculatrice :





$$\alpha = \text{Arccos}\left(\tfrac{4}{5}\right) = \text{Arcsin}\left(\tfrac{3}{5}\right) \approx 36{,}87^\circ .$$

b) ***Relations*** entre tan, cot et sin, cos.

Rappelons tout d'abord que :

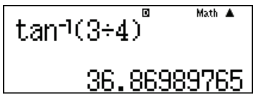
Pour tout angle aigu α :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Applications : Ces formules permettent de calculer la tangente ou la cotangente d'un angle dont on connaît le sinus et le cosinus. Par exemple, on a vu dans l'exemple précédent que :

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

Donc : $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4}$ et $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{4}{3}$



Pour tout angle aigu α :

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}1+\tan^2\alpha &= 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\ &= \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\ &\underset{\text{rel. fond.}}{=} \frac{1}{\cos^2\alpha}\end{aligned}$$

Donc : $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

En ***inversant*** les deux membres de cette égalité on obtient :

$$\frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha\,.$$

En utilisant encore une fois la relation fondamentale, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha\\ &= 1-\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\\ &= \frac{1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}-\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\\ &= \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

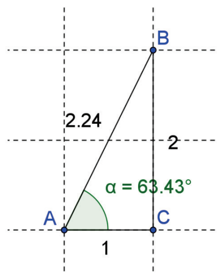
Applications : Ces formules permettent de calculer le sinus et le cosinus d'un angle dont on connaît seulement la tangente, ***sans utiliser la calculatrice***. Par exemple,

$$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = ? \quad \text{et} \quad \sin\alpha = ?$$

Réponse :

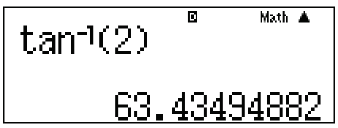
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Remarque : Une valeur approchée de l'angle α peut être trouvée de nouveau à l'aide de la calculatrice :

$$\alpha = \operatorname{Arctan}(2) \approx 63,43°\,.$$



5. Angles remarquables

a) $\cos 45°$, $\sin 45°$, $\tan 45°$ et $\cot 45°$

On considère le triangle ABC ***rectangle*** et ***isocèle*** en C. Alors $\hat{A} = \hat{B} = 45°$.

- $\tan 45° = \dfrac{BC}{AC} = 1$ car $AC = BC$
- $\cot 45° = \dfrac{1}{\tan 45°} = \dfrac{1}{1} = 1$
- $\cos^2 45° = \dfrac{1}{1+\tan^2 45} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin^2 45° = \dfrac{\tan^2 45}{1+\tan^2 45} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 60°$, $\sin 60°$, $\tan 60°$ et $\cot 60°$

On considère le triangle ***équilatéral*** ABC. Alors $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$. On note H le pied de la hauteur issue de B. On sait que $H = \text{mil}[AC]$.

- $\cos 60° = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{1}{2}$ car $AH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}AB$
- D'après la relation fondamentale :

  $\sin^2 60° = 1 - \cos^2 60° = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$
- $\cot 60° = \dfrac{1}{\tan 60°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos 30°$, $\sin 30°$, $\tan 30°$ et $\cot 30°$ (complémentaire de $60°$)

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$$

En résumé :

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$