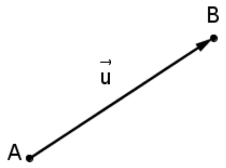
# Vecteurs du plan

## 1. Définitions et généralités

***Définition.*** Un ***vecteur*** est une « flèche », caractérisée par sa ***longueur***, sa ***direction*** et son ***sens***.[1]

***Exemple.*** Sur la figure ci-contre, on a représenté le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, d'***origine*** $A$ et d'***extrémité*** $B$.




La ***longueur*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celle du ***segment*** $[AB]$, sa ***direction*** est celle de la ***droite*** $(AB)$ et son ***sens*** est celui de $A$ vers $B$.

***Attention.*** Un vecteur n'est pas un ensemble de points ! Il ne faut donc pas confondre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec le segment $[AB]$.

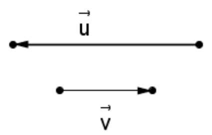
***Définition.*** Le ***vecteur nul***, noté $\vec{0}$, est un vecteur dont la longueur est 0. Sa direction et son sens ne sont pas définis. On le représente par un point.

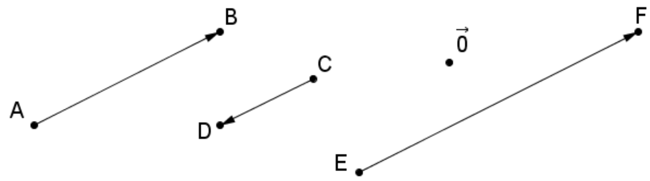
Par exemple, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et plus généralement, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ pour tout point $M$.

***Définition.*** La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est encore appelée ***norme***. On note $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

***Définition.*** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant ***même direction*** sont dits ***colinéaires*** ou ***parallèles***. On note alors : $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

***Exemples.***



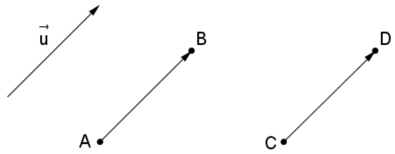

$\vec{u} \parallel \vec{v} \parallel \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF} \parallel \vec{0}$

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

[1] Attention : il ne faut pas confondre ***direction*** et ***sens*** : par exemple le mouvement d'un ascenseur a ***une direction***, la verticale, et ***deux sens*** : la montée et la descente.

**Définition.** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***égaux*** si et seulement si ils ont ***même longueur***, ***même direction*** et ***même sens***. On dit alors que $\vec{u}$ est un ***représentant*** de $\vec{v}$.

***Exemple.*** Sur la figure ci-contre, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des ***représentants*** du vecteur $\vec{u}$.




***Attention.*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, mais $[AB] \neq [CD]$.

***Remarque.*** Tout vecteur $\vec{u}$ admet une ***infinité de représentants***, mais ***un seul*** représentant d'origine ou d'extrémité donnée. Par exemple, $\overrightarrow{CD}$ est l'unique représentant de $\vec{u}$ d'origine $C$ et $\overrightarrow{AB}$ est l'unique représentant de $\vec{u}$ d'extrémité $B$.

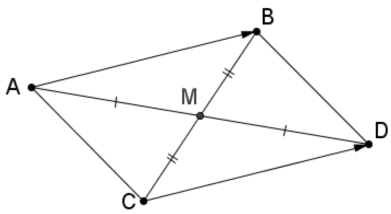
***Conditions pour l'égalité entre deux vecteurs.***

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow$ $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)

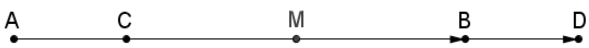
$\Leftrightarrow$ $\text{mil}[AD] = \text{mil}[BC]$

Les deux cas de figure possibles sont représentés ci-dessous.




$ABDC$ est un (vrai) parallélogramme

$M = \text{mil}[AD] = \text{mil}[BC]$




$ABDC$ est un parallélogramme aplati

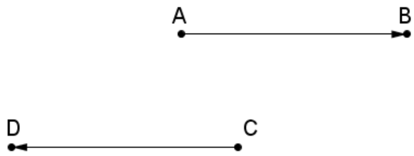
$M = \text{mil}[AD] = \text{mil}[BC]$

***Conséquences.***

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ : si deux vecteurs sont égaux, leurs ***opposés*** (voir définition suivante) sont aussi égaux.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ : si deux vecteurs sont égaux, les vecteurs obtenus en ***échangeant*** l'***origine*** de l'un avec l'***extrémité*** de l'autre sont aussi égaux.

***Définition***. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***opposés*** si et seulement si ils ont ***même longueur*** et ***même direction***, mais des ***sens opposés***. On note : $\vec{u} = -\vec{v}$.

***Exemples*** :




$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

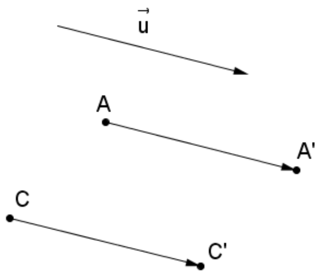
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$

***Rappel***. Etant donné un vecteur $\vec{u}$ du plan, la translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est l'application du plan dans lui-même qui associe à tout point $M$ le point $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Le point $M'$ est appelé image de $M$ par $t_{\vec{u}}$.

***Exemple***.



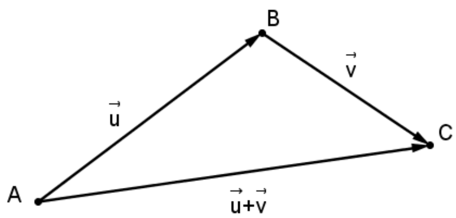

$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$

$t_{\vec{u}}(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$

## 2. Addition et soustraction des vecteurs

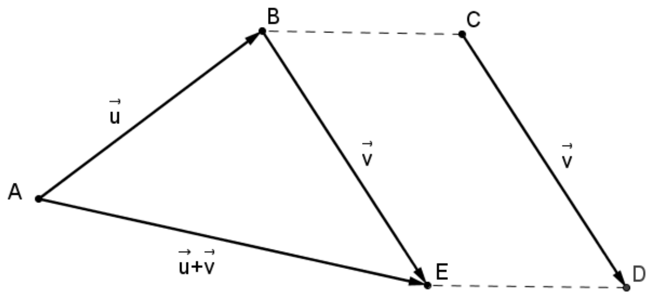
L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\mathcal{V}$. On définit sur $\mathcal{V}$ une ***addition*** de la manière suivante :

1$^{\text{er}}$ cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux ***vecteurs consécutifs***, c.-à-d. l'extrémité de $\vec{u}$ et l'origine de $\vec{v}$ sont ***confondus*** ; par exemple, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Dans ce cas on définit : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



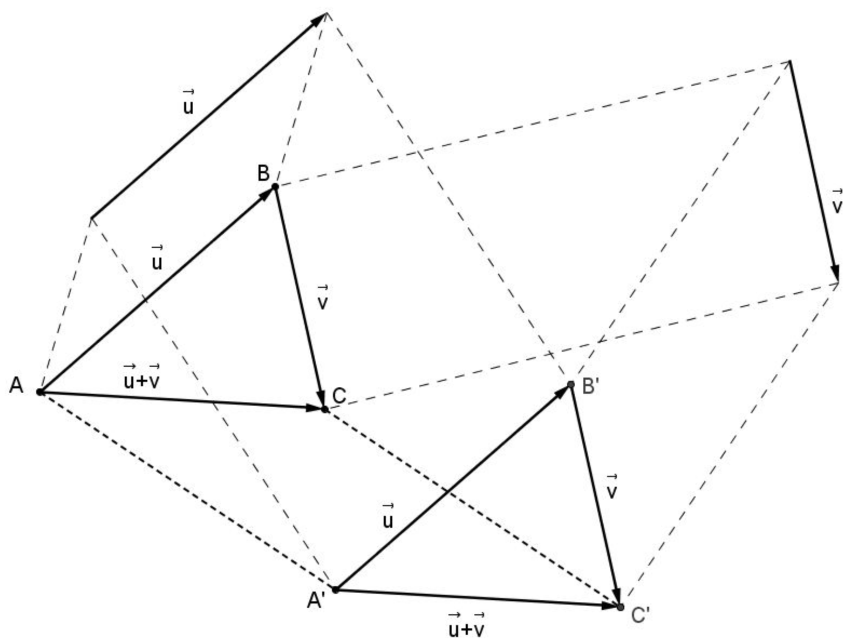

L'égalité $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$, vraie pour tous les points $A$, $B$ et $C$ du plan est appelée ***relation de Chasles***.

2[e] cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ne sont pas consécutifs. Dans ce cas, on choisit deux représentants qui sont consécutifs et on applique à nouveau la relation de Chasles.




$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

***Remarque***. Cette définition de l'addition des vecteurs ***a un sens*** : le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ ***ne dépend pas du choix des représentants*** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, comme le montre la figure suivante :



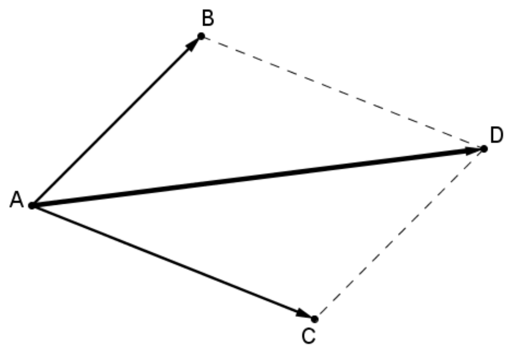

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont des représentants de $\vec{u}$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont des représentants de $\vec{v}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont des représentants du ***même vecteur*** ; ce vecteur est par définition $\vec{u}+\vec{v}$.

Cas particulier important :

***Règle du parallélogramme***. Lorsque $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs ayant la ***même origine***, alors $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, où $D$ est l'unique point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.




En effet :

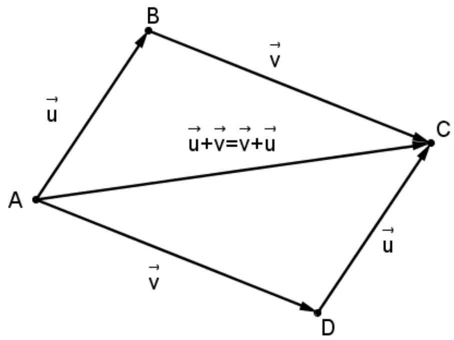
$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

<u>Propriétés de l'addition des vecteurs</u>

a) L'addition des vecteurs est ***commutative***, c.-à-d.

$$\boxed{(\forall \vec{u},\vec{v}\in\mathcal{V})\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$$

En effet :

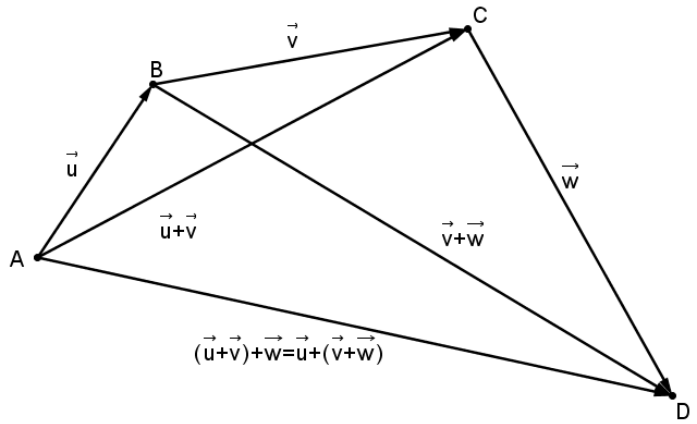



$$\begin{cases}\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\\ \vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

b) L'addition des vecteurs est ***associative***, c.-à-d.

$$\boxed{(\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V})\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}$$

En effet :

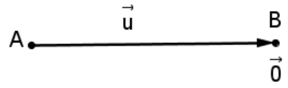



$$\begin{cases}(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD}\\ \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) &= \overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AD}\end{cases}$$

c) L'addition des vecteurs admet $\vec{0}$ comme ***élément neutre***, c.-à-d.

$$\boxed{(\forall \vec{u} \in \mathcal{V}) \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}}$$

En effet :

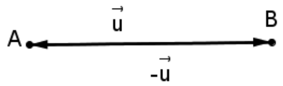



$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

d) L'addition des vecteurs est ***symétrique***, c.-à-d.

$$\boxed{(\forall \vec{u} \in \mathcal{V}) \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}}$$

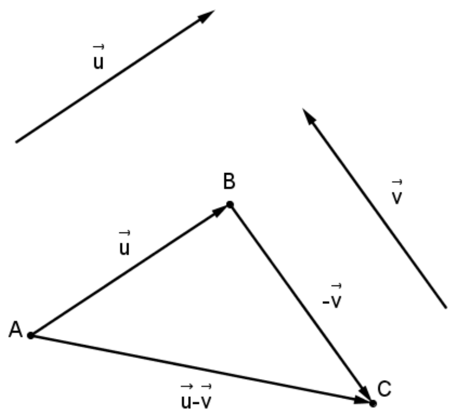
En effet :




$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

***Définition***. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. La ***différence*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} - \vec{v}$, est par définition la somme de $\vec{u}$ et de l'***opposé*** de $\vec{v}$, c.-à-d. :

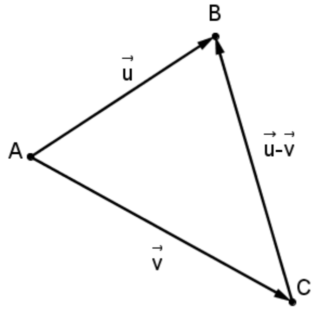
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$




<u>Cas particulier important</u> :

Lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs ayant la ***même origine***, alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$



On pourra vérifier à l'aide de figures que la soustraction n'est ***ni commutative***, ***ni associative***. Cependant, la soustraction possède la propriété importante suivante :

$$\boxed{(\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathcal{V}) \quad \vec{u}-\vec{v} = -(\vec{v}-\vec{u})}$$

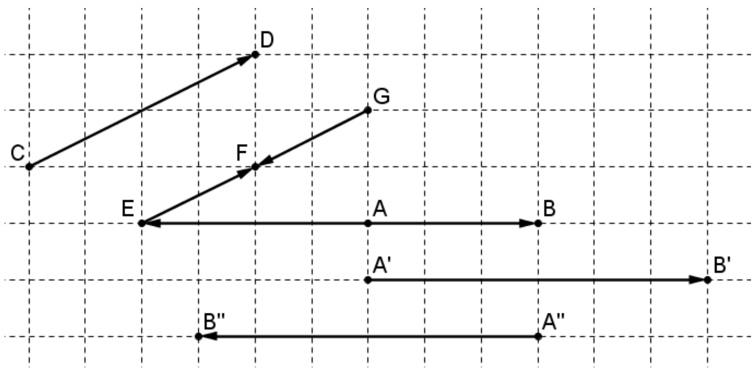
En d'autres termes, les vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{v}-\vec{u}$ sont ***opposés***.

# 3. Multiplication d'un vecteur par un réel

***Définition***. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et $k$ un réel. On appelle ***produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel*** $k$ et on note $k\cdot\vec{u}$ ou $k\vec{u}$ le vecteur

- de ***longueur*** $|k|\cdot\|\vec{u}\|$,
- de ***direction*** celle de $\vec{u}$ ,
- de ***sens*** celui de $\vec{u}$ si $k>0$ et opposé à celui de $\vec{u}$ si $k<0$ .

***Exemples***.




$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ ;
$\overrightarrow{A''B''} = -2\overrightarrow{AB}$ ;
$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ;
$\overrightarrow{GF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ;
$\overrightarrow{AE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ .

***Remarques***.

- Les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont toujours ***colinéaires***.
- Si $k=0$ alors $k\vec{u} = 0\cdot\vec{u} = \vec{0}$ .
- Si $k=1$ alors $k\vec{u} = 1\cdot\vec{u} = \vec{u}$ .
- Si $k=-1$ alors $k\vec{u} = -1\cdot\vec{u} = -\vec{u}$ .

<u>Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel</u>

$(\forall \vec{u},\vec{v} \in \mathcal{V})(\forall k,k' \in \mathbb{R})$

a) Distributivité par rapport à l'addition dans $\mathcal{V}$ : $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$

b) Distributivité par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$ : $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$

c) Associativité mixte : $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

d) Règle du produit nul : $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

***Démonstration***. A l'aide de figures (exemples) en exercice.

***Exemples.***

(1) $\quad 3(\vec{u}+\vec{v}) = 3\vec{u}+3\vec{v}$ d'après a).

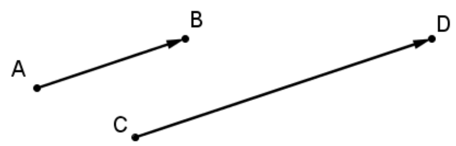
(2) $\quad 2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC}$ d'après b) et la relation de Chasles.

(3) $\quad -2(4\vec{w}) = -8\vec{w}$ d'après c).

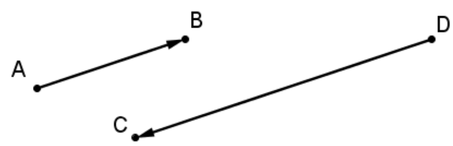
## 4. Vecteurs colinéaires

On a déjà vu la définition de la colinéarité :

***Définition.*** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** (parallèles) et on note $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la ***même direction*** ou bien l'un des deux est le vecteur nul.




$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens




$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de sens opposés

***Théorème.*** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ***non nuls*** du plan. Alors $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si et seulement si il existe un réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

***Démonstration.***

" $\Leftarrow$ " Si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors, par définition, $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

" $\Rightarrow$ " Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ***non nuls*** du plan tels que $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont ***même sens*** alors on prend


$$k = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Comme $k > 0$, le vecteur $k\vec{u}$ a même direction et même sens que $\vec{u}$ et donc même direction et même sens que $\vec{v}$. Il a également même longueur que $\vec{v}$ car sa longueur est égale à :

$$|k|\cdot\|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\cancel{\|\vec{u}\|}}.\cancel{\|\vec{u}\|} = \|\vec{v}\|.$$

Donc $k\vec{u} = \vec{v}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des ***sens opposés*** alors on prend


$$k = -\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Comme $k < 0$, le vecteur $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$ mais le sens opposé à celui de $\vec{u}$. Il a donc même direction et même sens que $\vec{v}$. Il a également même longueur que $\vec{v}$ car sa longueur est égale à :

$$|k| \cdot \|\vec{u}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\cancel{\|\vec{u}\|}} \cdot \cancel{\|\vec{u}\|} = \|\vec{v}\|.$$

Donc $k\vec{u} = \vec{v}$.

☑

***Remarques.***

- Une relation du type $\vec{v} = k\vec{u}$ est appelée ***relation de colinéarité*** entre deux vecteurs.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs ***non nuls*** alors $k \neq 0$ et :
$$\boxed{\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \tfrac{1}{k}\vec{v}}.$$
- La relation de colinéarité entre un vecteur quelconque $\vec{u}$ et le vecteur nul $\vec{0}$ est : $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$, mais si $\vec{u} \neq \vec{0}$ il n'existe pas de relation du type $\vec{u} = k \cdot \vec{0}$.

Les propositions suivantes sont évidentes mais d'une utilité considérable dans les exercices.

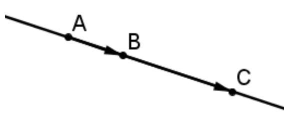
***Condition d'alignement de 3 points.*** Trois points $A$, $B$ et $C$ du plan sont alignés si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

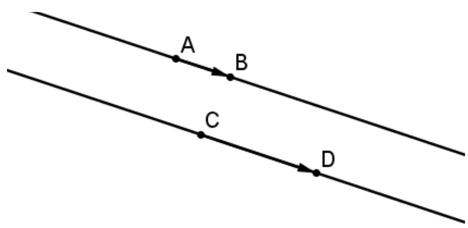
On peut reformuler cette propriété de la manière suivante :

***Condition d'appartenance d'un point à une droite.*** Etant donnée une droite $(AB)$ du plan, on a :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$$

***Condition de parallélisme de deux droites.*** Deux droites $(AB)$ et $(CD)$ du plan sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



# 5. Formulation vectorielle du théorème de Thalès

***Théorème de Thalès (Cas du triangle).*** Supposons que $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = k'\overrightarrow{AC}$, où $k$ et $k'$ sont deux réels. Alors :

$$\left(B'C'\right) \parallel \left(BC\right) \Leftrightarrow k = k'.$$

Dans le cas où $k = k'$, on a aussi $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$.

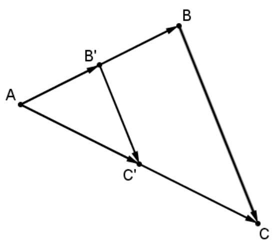



*Figure avec* $k = k' = \frac{1}{2}$

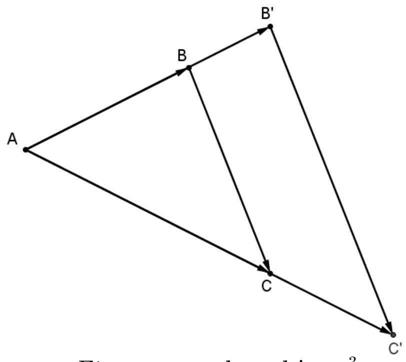



*Figure avec* $k = k' = \frac{3}{2}$

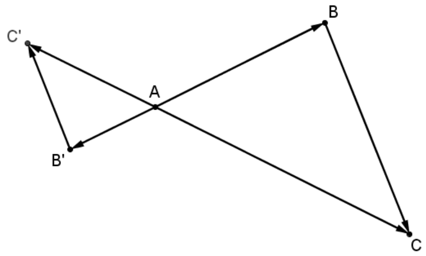



*Figure avec* $k = k' = -\frac{1}{2}$

***Démonstration.*** Par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B'C'} &= \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} \\
&= k\overrightarrow{BA} + k'\overrightarrow{AC} \\
&= k\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AC} + (k' - k)\overrightarrow{AC} \\
&= k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + (k' - k)\overrightarrow{AC} \\
&= k\overrightarrow{BC} + (k' - k)\overrightarrow{AC} \quad (*)
\end{aligned}$$

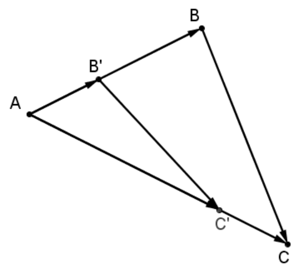



*Figure avec* $k \neq k'$ :

$\left(BC\right) \nparallel \left(B'C'\right)$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{B'C'} \parallel \overrightarrow{BC} \\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{B'C'} = r\overrightarrow{BC} \\
\Leftrightarrow\ & k\overrightarrow{BC} + (k' - k)\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{BC} \\
\Leftrightarrow\ & (k' - k)\overrightarrow{AC} = r\overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{BC} \\
\Leftrightarrow\ & (k' - k)\overrightarrow{AC} = (r - k)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Or, $ABC$ est un triangle, donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires. La dernière égalité a donc lieu si et seulement si les deux membres sont égaux au vecteur nul, c.-à-d. ssi $k' = k$ et $r = k$.

Lorsque $k' = k$, on a d'après $(*)$ : $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$.

☑

**_Théorème de Thalès (Cas du trapèze)_**. Soit $ABB'A'$ un trapèze de bases parallèles $[AA']$ et $[BB']$, $C \in \left(AB\right)$ et $C' \in \left(AB\right)$. Soit $k$ et $k'$ tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k'\overrightarrow{AB}$. Alors :

$$\left(BB'\right) \parallel \left(CC'\right) \Leftrightarrow k = k'.$$

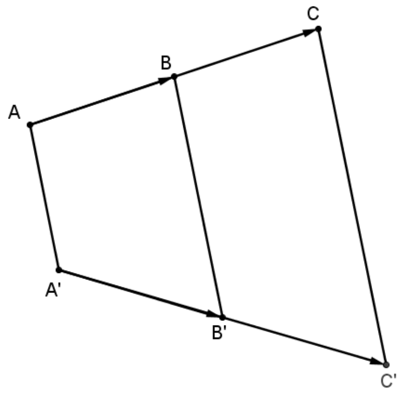



*Figure avec $k = k' = 2$*

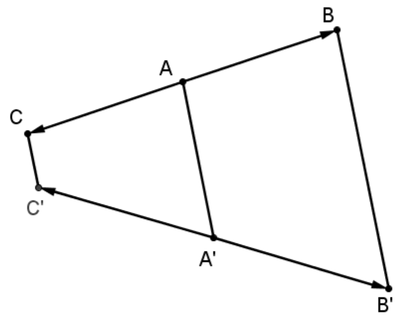



*Figure avec $k = k' = -1$*

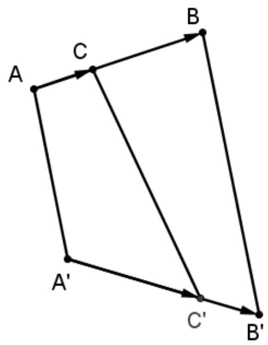
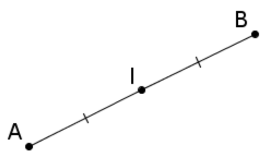



*Figure avec $k \neq k'$ : $BB' \nparallel CC'$*

**_Démonstration_**. Admise.

## 6. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

**_Proposition_**. Soit $[AB]$ un segment et $I$ un point du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :




(1) $I = \text{mil}[AB]$

(2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(4) Pour tout point $M$ : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$ ou $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

**_Démonstration_**.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) : $I = \text{mil}[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(3) $\Leftrightarrow$ (4) : Soit $M$ un point quelconque du plan.

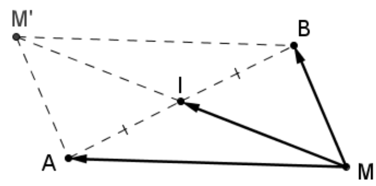
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$




☑

## 7. Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

***Proposition***. Soit $ABC$ un triangle quelconque, $A' = \text{mil}[BC]$, $B' = \text{mil}[AC]$, et $C' = \text{mil}[AB]$. Soit $G$ un point du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

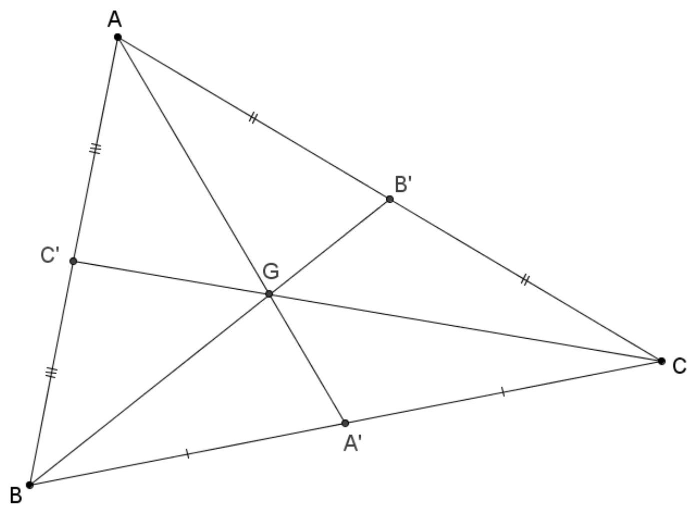
(1) $G$ est le point d'intersection des médianes $BB'$ et $CC'$

(2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

(3) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

(4) Pour tout point $M$ : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$

ou $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$



***Remarque***. Si le point $G$ vérifie l'une des 4 propriétés équivalentes de la proposition ci-dessus, il appartient aussi à la 3e médiane $AA'$. Cela découle directement de la propriété (3) : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, qui implique que $A$, $G$ et $A'$ sont alignés. Retenons ce résultat bien connu :

***Corollaire***. Les trois médianes d'un triangle $ABC$ sont ***concourantes*** en un point $G$, appelé ***centre de gravité*** du triangle $ABC$.

***Démonstration du théorème.***

(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $G$ le point d'intersection des médianes $BB'$ et $CC'$.

- En appliquant la propriété (4) du milieu à $C' = \text{mil}[AB]$, on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC}$, qui est colinéaire à $\overrightarrow{CC'}$ puisque $C$, $G$ et $C'$ sont alignés.
- De même, en appliquant la propriété (4) du milieu à $B' = \text{mil}[AC]$, on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GB}$, qui est colinéaire à $\overrightarrow{BB'}$ puisque $B$, $G$ et $B'$ sont alignés.

Par conséquent $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ est le vecteur nul, car il est colinéaire à deux vecteurs non colinéaires.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

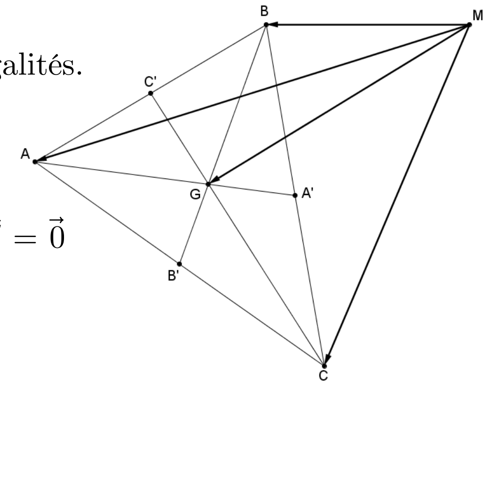
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ car $A' = \text{mil}[BC]$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

On prouve de façon analogue les deux égalités.




(2) $\Leftrightarrow$ (4) : Soit $M$ un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$

(3) $\Rightarrow$ (1) : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \Rightarrow G \in BB'$

$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \Rightarrow G \in CC'$

Donc $\{G\} = BB' \cap CC'$.

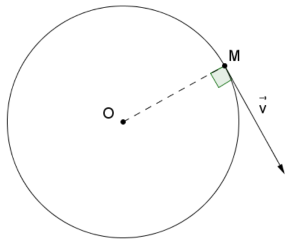
☑

## 8. L'utilité des vecteurs en physique

Beaucoup de ***grandeurs*** en physique ne peuvent être complètement définies par ***un seul nombre***, comme par exemple une ***vitesse*** ou une ***force***. Ces grandeurs sont ***modélisées*** par des vecteurs.

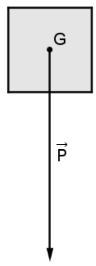
a) Lorsqu'un point mobile $M$ se déplace sur une courbe, sa vitesse est représentée par le ***vecteur vitesse*** $\vec{v}$, dont les caractéristiques sont :

- ***point d'application (origine du vecteur)*** : le point $M$
- ***longueur*** : la vitesse en m/s ou km/h
- ***direction*** : celle de la tangente en $M$ à la courbe
- ***sens*** : celui du mouvement du solide

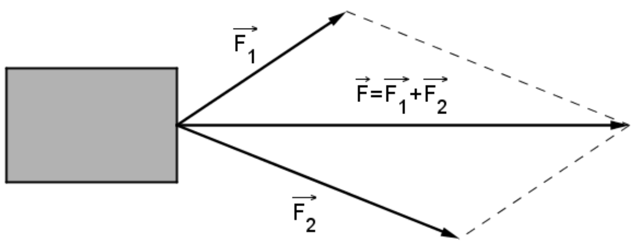



b) Par définition, une ***force*** est toute cause capable de modifier le mouvement d'un corps ou de déformer un corps. La force qui s'exerce sur un solide est représenté par le ***vecteur force***. Un exemple est le ***poids*** $\vec{P}$ dont les caractéristiques sont :

- ***point d'application*** : le centre de gravité du solide
- ***longueur*** : l'intensité du poids en N (Newton), qui vaut $m \cdot g$, où $m$ est la masse en kg du corps et $g$ est l'accélération de la pesanteur, c.-à-d. $9{,}81 \text{ m/s}^2$.
- ***direction*** : verticale
- ***sens*** : vers le centre de la terre




Lorsque plusieurs forces s'exercent sur un solide, la force totale qui en résulte (ou ***résultante***) est la ***somme vectorielle*** des différentes forces.




Un système est dit en ***équilibre*** (mécanique) lorsque la somme des forces qui s'exercent sur lui est le vecteur $\vec{0}$ (voir figure ci-contre).