

CHAPITRE 1

Les ensembles de nombres

1. Les nombres entiers

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{ensemble des entiers naturels} \\ \mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{ensemble des entiers naturels non nuls} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{ensemble des entiers (relatifs)} \\ \mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots - 5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{ensemble des entiers (relatifs) non nuls} \\ \mathbb{Z}_+ &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{ensemble des entiers relatifs positifs} \\ \mathbb{Z}_- &= \{0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots\} = \text{ensemble des entiers relatifs négatifs} \\ \mathbb{Z}_+^* &= \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{ensemble des entiers relatifs strictement positifs} \\ \mathbb{Z}_-^* &= \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\} = \text{ensemble des entiers relatifs strictement négatifs}\end{aligned}$$

Remarques.

- 0 est à la fois positif et négatif. C'est le seul nombre qui jouit de cette propriété.

$$\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\} \quad (1.1)$$

- Les entiers (relatifs) sont munis du signe + ou du signe -. On a :

$$\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

- L'ensemble des entiers relatifs positifs est égal à l'ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \quad (1.3)$$

- L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

- On veillera à ne pas confondre les termes de **chiffre** et d'**entier** : seuls les dix entiers 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9 sont appelés **chiffres**. 12 est donc un nombre entier, mais pas un chiffre.

2. Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'un nombre fini de chiffres derrière la virgule. Par exemple : 123,45 et -5,004 sont des nombres décimaux, mais $1/3 = 0,33333\dots$ n'est pas un nombre décimal car dans son développement décimal il y a une infinité de chiffres 3 derrière la virgule. Pour comprendre la définition mathématique exacte de l'ensemble des nombres décimaux, remarquons que :

$$123,45 = \frac{12345}{100} = \frac{12345}{10^2} \quad \text{et} \quad -5,004 = \frac{-5004}{1000} = \frac{-5004}{10^3}$$

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \text{ est l'ensemble des nombres décimaux}$$

$$\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\} = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{Z}^*, m \in \mathbb{N} \right\} \text{ est l'ensemble des nombres décimaux non nuls}$$

$$\mathbb{D}_+ = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\} \text{ est l'ensemble des nombres décimaux positifs}$$

$$\mathbb{D}_- = \left\{ \frac{n}{10^m} / n \in \mathbb{Z}_-, m \in \mathbb{N} \right\} \text{ est l'ensemble des nombres décimaux négatifs}$$

Exemples.

- $\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2} \in \mathbb{D}$
- $-\frac{3}{200} = -\frac{15}{1000} = -\frac{15}{10^3} \in \mathbb{D}$
- $9 = \frac{9}{1} = \frac{9}{10^0} \in \mathbb{D}$

Remarques.

- Le dernier exemple ci-dessus est important car il montre que tout entier est aussi un nombre décimal. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$ alors :

$$a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0} \in \mathbb{D}$$

car le numérateur $a \in \mathbb{Z}$ et le dénominateur est 10^0 avec l'exposant $0 \in \mathbb{N}$.

Donc : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ (1.5)

- Un nombre décimal peut toujours s'écrire avec un nombre fini de chiffres non nuls derrière la virgule.

3. Les nombres rationnels

On a vu que $1/3$ n'est pas un nombre décimal puisque dans son développement décimal, il y a une infinité de chiffres 3 derrière la virgule. On va donc agrandir l'ensemble des nombres rencontrés jusqu'à présent par les **nombres rationnels** (du latin : ratio = fraction). Chaque nombre rationnel peut s'écrire sous forme d'une **fraction à numérateur et dénominateur entiers**. $1/3$ est donc un nombre rationnel.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\} \text{ est l'ensemble des nombres rationnels}$$

Exemples.

- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{-315}{29} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1998}{-1997} \in \mathbb{Q}$
- $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \in \mathbb{Q}$
- $-0,375 = -\frac{375}{1000} = -\frac{3}{8} \in \mathbb{Q}$

Remarques.

- Les deux derniers exemples montrent que tout décimal est aussi un nombre rationnel. En effet, si $x \in \mathbb{D}$, alors on sait que x peut s'écrire sous la forme $x = \frac{n}{10^m}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $10^m \in \mathbb{N}^*$; donc x peut être représenté par une fraction à numérateur et dénominateur entiers, i.e. $x \in \mathbb{Q}$.

Donc :
$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \quad (1.6)$$

- Tout nombre rationnel peut être écrit soit sous forme d'une fraction (*forme fractionnaire*) soit sous forme d'un *développement décimal*, par exemple :

$\frac{1}{4}$ est une fraction et 0,25 est son développement décimal.

$\frac{5}{9}$ est une fraction et 0,555... est son développement décimal.

Attention : Tous les nombres rationnels admettent un développement décimal, mais ce ne sont pas tous des nombres décimaux. Par exemple : $\frac{1}{4}$ est un nombre décimal mais $\frac{5}{9}$ n'est pas un nombre décimal. Rappelez pourquoi ?

- Tout nombre rationnel admet une *infinité de représentants*, par exemple : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ sont tous des représentants du même nombre rationnel $\frac{1}{3}$. Le *représentant privilégié* est la fraction $\frac{1}{3}$ car elle est *irréductible*. Rappelons qu'une fraction $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ est irréductible si et seulement si a et b n'ont pas de diviseur commun (sauf 1), i.e. $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Considérons maintenant le développement décimal de quelques nombre rationnels :

- $\frac{1}{9} = 0,11111... = 0,\overline{1}$
- $\frac{1}{6} = 0,16666... = 0,1\overline{6}$
- $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857... = 0,\overline{142857}$
- $\frac{1}{101} = 0,118811881188... = 0,\overline{1188}$

On observe dans tous les développements décimaux des suites de chiffres qui se répètent indéfiniment. Ce phénomène est général pour les nombres rationnels, comme l'affirme le théorème suivant :

Théorème 1. Dans le développement décimal de tout nombre rationnel il y a une suite de chiffres qui se répète indéfiniment, appelée *période* de ce nombre rationnel.

Démonstration. Admise.

Exemples. La période de $\frac{1}{3}$ est 3, celle de $\frac{1}{6}$ est 6, celle de $\frac{1}{7}$ est 142857 etc. Quelle est la période de $\frac{1}{4}$? Quelle est la période d'un nombre décimal ?

4. Les nombres réels

Il est facile d'inventer des nombres non rationnels, i.e. des nombres dont le développement décimal n'est pas périodique.

Exemples.

- $x = 1,01001000100001000001\dots$
- $y = 0,123456789101112131415\dots$ (nombre de Champernowne)

On dit que ces nombres sont **irrationnels**. Il existe encore beaucoup d'autres nombres irrationnels comme par exemple :

$$\pi = 3,1415926535897932385\dots,$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots,$$

$$e = 2,71828182845\dots \text{ (nombre de Napier) } \dots$$

En fait, on peut démontrer qu'il existe une infinité de nombres irrationnels. Les nombres rationnels, ensemble avec les nombres irrationnels forment l'ensemble de tous les nombres, appelés **nombres réels**. Retenons :

\mathbb{R} = ensemble de tous les nombres
 = ensemble des nombres réels
 = ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels

\mathbb{R}^* = ensemble des nombres réels non nuls

\mathbb{R}_+ = ensemble des nombres réels positifs

\mathbb{R}_- = ensemble des nombres réels négatifs

\mathbb{I} = ensemble des nombres irrationnels

Comme \mathbb{R} est l'ensemble de tous les nombres, il est évident que :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \tag{1.7}$$

Plus précisément :

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset \tag{1.8}$$

Résumons finalement les relations (1.4) à (1.7) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Voici un diagramme de Venn avec tous les ensembles de nombres :

