## CHAPITRE 2

# Les puissances à exposants négatifs

### 1. Introduction : les puissances de 2

Nous connaissons bien la notation $2^n$ où *n* est un entier positif :

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 2 \cdot 2 = 4 \\ 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \end{aligned}$$

En général : $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ facteurs}}$$

Remarquons qu'il y a une relation évidente entre ***deux puissances successives*** de 2. Par exemple :

$2^4 = 2 \cdot 2^3$ ou encore : $2^3 = \dfrac{2^4}{2}$

$2^5 = 2 \cdot 2^4$ ou encore : $2^2 = \dfrac{2^3}{2}$

$2^6 = 2 \cdot 2^5$ ou encore : $2^5 = \dfrac{2^6}{2}$

etc.

En général : $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

Ou encore : $$2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$$

Nous allons essayer de donner un sens à $2^{-3}$ : c'est une puissance avec l'***exposant négatif*** –3. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la formule (4.3) reste valable ***pour tout entier relatif*** *n*. Nous obtenons de cette façon le tableau suivant :

| $n$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

:2 :2 :2 :2 :2 :2

Il est donc naturel de poser :

$$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

En d'autres termes : $2^{-3}$ est l'***inverse*** de $2^3$.

Et en général :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \text{ est l'inverse de } 2^n$$

## 2. Définition et exemples

***Définition***. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. $a^{-n}$ est l'inverse de $a^n$. Donc :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

***Remarque***. Dans la définition on doit choisir $a \neq 0$ puisqu'en général $\frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$ n'existe pas !

***Corollaire de la définition***. Comme $a^{-n}$ est l'inverse de $a^n$, on peut dire également que $a^n$ est l'inverse de $a^{-n}$. En d'autres termes :

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

***Démonstration***. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \Leftrightarrow a^{-n}a^n = 1 \Leftrightarrow a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

***Exemples***.

- Puissances de 3

  $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

  $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

  …

| $n$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^n$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 |

- Puissances de –3

  $(-3)^{-1} = \frac{1}{(-3)^1} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

  $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

  $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

  …

| $n$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-3)^n$ | $\frac{1}{81}$ | $-\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $-3$ | 9 | $-27$ | 81 |

Remarquons que les puissances paires de –3 sont positives tandis que les puissances impaires de –3 sont négatives. Ceci est général :

***Signe d'une puissance***. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

a) Si $a > 0$ alors $a^n > 0$.

b) (i) Si $a < 0$ et $n$ est pair alors $a^n > 0$.
(ii) Si $a < 0$ et $n$ est impair alors $a^n < 0$.

### *3. Propriétés*

Pour commencer, rappelons les propriétés des puissances à exposants positifs:

$$\left(\forall a,b\in\mathbb{R}^*\right)\left(\forall n,m\in\mathbb{N}\right)$$

***Puissance d'un produit*** : $(ab)^n = a^n b^n$

***Puissance d'un quotient*** : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

***Produit de puissances de même base*** : $a^n a^m = a^{n+m}$

***Quotient de puissances de même base*** : $\dfrac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n \geq m \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & \text{si } n \leq m \end{cases}$

***Puissance d'une puissance*** : $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

Nous allons prouver que ces formules restent valables pour des exposants négatifs.

- ***Puissance d'un produit***

$$\left(\forall a,b\in\mathbb{R}^*\right)\left(\forall n\in\mathbb{Z}\right)\quad (ab)^n = a^n b^n$$

***Démonstration***. La formule est déja valable si $n\in\mathbb{N}$ (voir cours de 6e). Il reste donc à démontrer la formule si $n\in\mathbb{Z}_-$, c.-à-d. si $n=-m$ avec $m\in\mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}(ab)^n &= (ab)^{-m} \\ &= \frac{1}{(ab)^m} && \text{par définition} \\ &= \frac{1}{a^m b^m} && \text{formule pour exposants positifs} \\ &= \frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{b^m} && \text{produit de deux fractions (voir chap. 3)} \\ &= a^{-m}b^{-m} && \text{par définition} \\ &= a^n b^n\end{aligned}$$

***Exemple***. $(2a)^{-3} = 2^{-3}a^{-3} = \dfrac{1}{8}a^{-3}$

- ***Puissance d'un quotient***

$$\left(\forall a,b\in\mathbb{R}^*\right)\left(\forall n\in\mathbb{Z}\right)\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

***Démonstration***. La formule est déja valable si $n\in\mathbb{N}$. Il reste donc à démontrer la formule si $n\in\mathbb{Z}_-$, c.-à-d. si $n=-m$ avec $m\in\mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}\underset{(*)}{=}\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}}\underset{(**)}{=}\frac{1}{\frac{a^{m}}{b^{m}}}\underset{(***)}{=}\frac{b^{m}}{a^{m}}\underset{(*)}{=}\frac{1}{b^{-m}}a^{-m}=\frac{a^{-m}}{b^{-m}}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$$

avec : $(*)=$ par définition

$(**)=$ formule pour exposants positifs

$(***)=$ formule sur les fractions

***Exemple***. $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}=\frac{x^{-3}}{3^{-3}}=\frac{3^{3}}{x^{3}}=\frac{27}{x^{3}}$.

L'exemple suggère d'introduire une autre formule intéressante :

$$\left(\forall a,b\in\mathbb{R}^{*}\right)\left(\forall n\in\mathbb{Z}\right)\quad\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

***Démonstration***.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}=\frac{1}{a^{n}}\cdot\frac{1}{b^{-n}}=\frac{1}{a^{n}}b^{n}=\frac{b^{n}}{a^{n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

***Exemple***. $\left(\frac{x}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{x}\right)^{4}$.

- ***Produit de puissances de même base***

$$\left(\forall a\in\mathbb{R}^{*}\right)\left(\forall n,m\in\mathbb{Z}\right)\quad a^{n}a^{m}=a^{n+m}$$

***Démonstration***. La formule est déja valable si $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$. Il reste donc à démontrer la formule si $n\in\mathbb{Z}_{-}$ ou si $m\in\mathbb{Z}_{-}$. Nous allons nous restreindre au cas ou $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{Z}_{-}$, c.-à-d. $m=-m'$ avec $m'\in\mathbb{N}$. Alors :

$$a^{n}a^{m}=a^{n}a^{-m'}=\frac{a^{n}}{a^{m'}}\underset{\text{d'après (4.11)}}{=}\begin{cases}a^{n-m'}=a^{n+m} & \text{si } n\geq m'\\ \frac{1}{a^{m'-n}}=a^{-(m'-n)}=a^{n-m'}=a^{n+m} & \text{si } n\leq m'\end{cases}$$

***Exemple***. $2^{5}\cdot2^{-8}=2^{5+(-8)}=2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8}$.

- ***Quotient de puissances de même base***

$$\left(\forall a\in\mathbb{R}^{*}\right)\left(\forall n,m\in\mathbb{Z}\right)\quad\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n-m}$$

***Démonstration***. $\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n}\cdot\frac{1}{a^{m}}\underset{\text{par définition}}{=}a^{n}a^{-m}\underset{\text{d'après (4.16)}}{=}a^{n+(-m)}=a^{n-m}$

***Exemple***. $\frac{2^{-4}}{2^{-5}}=2^{-4-(-5)}=2^{-4+5}=2$.

- ***Puissance d'une puissance***

$$(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall n, m \in \mathbb{Z}) \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

***Démonstration***. La formule est déja valable si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$. Il reste donc à démontrer la formule si $n \in \mathbb{Z}_-$ ou si $m \in \mathbb{Z}_-$. Nous allons nous restreindre au cas ou $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}_-$, c.-à-d. $m = -m'$ avec $m' \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a^n)^m = (a^n)^{-m'} = \frac{1}{(a^n)^{m'}} = \frac{1}{a^{nm'}} = a^{-nm'} = a^{nm}$$

Le lecteur est invité à démontrer la formule dans les autres cas.

***Exemple***. $(2^{-2})^3 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

## 4. Notation scientifique

Dans les sciences, on rencontre souvent de ***très grands nombres*** ou encore des nombres ***très proches de*** 0. Par exemple, la masse d'un électron est à peu près égale à

$$\mathrm{m}_e = 0{,}000'000'000'000'000'000'000'000'000'000'911 \text{ kg}$$

Quel travail que d'écrire ce nombre ! De plus, son développement décimal n'est pas très lisible : il est en effet difficile de compter le nombre de zéros avant de rencontrer le premier chiffre significatif c.-à-d. 9. Afin de bien comprendre la ***notation scientifique*** de ce nombre, nous allons d'abord étudier ***les puissances de*** 10.

***Exposants positifs***

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^n$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10´000 | 100´000 | 1´000´000 |

On remarque que si $n \geq 0$, alors le développement décimal du nombre $10^n$ est égal à 1 suivi de $n$ zéros.

***Exposants négatifs***

| $n$ | –1 | –2 | –3 | –4 | –5 | –6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^n$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,000´1 | 0,000´01 | 0,000´001 |

On remarque que si $n < 0$, alors le développement décimal du nombre $10^n$ est égal à 0 suivi de la virgule, puis de $|n|-1$ zéros en enfin du 1. Retenons donc qu'il y a ***au total*** $|n|$ zéros dans le développement décimal de $10^n$.

Après avoir compté 31 zéros dans le développement décimal de la masse $\mathrm{m}_e$, on comprend aisément que :

$$\mathrm{m}_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

C'est la ***notation scientifique*** de ce nombre. L'avantage de cette écriture est double : d'une part elle est très condensée et d'autre part elle permet au lecteur de comparer très rapidement l'ordre de grandeur de plusieurs nombres écrits en notation scientifique. Par exemple la masse du proton est

$$\mathrm{m}_p = 1{,}672596 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

La notation scientifique des deux nombres rend clair que $\mathrm{m}_p > \mathrm{m}_e$ et même que $\mathrm{m}_p > 1000 \cdot \mathrm{m}_e$.

**_Définition_**. Tout nombre réel **_non nul_** $x$ peut s'écrire sous la forme $x = \pm a \cdot 10^n$ tel que :

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}_+ \text{ et } 1 \le a < 10 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cette écriture est appelée **_notation scientifique_** de $x$.

Le fait important dans cette définition est que $1 \le a < 10$, c.-à-d. dans le développement décimal de $a$, il y a exactement un chiffre devant la virgule.

**_Autres exemples_**.

- La vitesse de la lumière dans le vide est à peu près égale à

$$\begin{aligned} c &= 300'000 \text{ km/s} \\ &= 300'000'000 \text{ m/s} \; 300'000 \text{ km/s} \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

- Le nombre d'atomes contenues dans une mole d'un élément est égal à

$$1 \text{ mole} = 6{,}022045 \cdot 10^{22} \text{ particules (nombre d'Avogadro)}$$

- La constante de gravitation universelle[1] vaut environ

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 / \left(\text{kg} \cdot \text{s}^2\right)$$

Nous allons finalement nous intéresser au problème de la transformation d'un nombre en notation scientifique.

**_Exemples et règles_**.

$12{,}3456 = 1{,}23456 \cdot 10^1$

$123{,}456 = 1{,}23456 \cdot 10^2$

$1234{,}56 = 1{,}23456 \cdot 10^3$

$12345{,}6 = 1{,}23456 \cdot 10^4$

**_Si l'on déplace la virgule de n unités vers la gauche, il faut multiplier par_** $10^n$.

$0{,}123456 = 1{,}23456 \cdot 10^{-1}$

$0{,}0123456 = 1{,}23456 \cdot 10^{-2}$

$0{,}00123456 = 1{,}23456 \cdot 10^{-3}$

$0{,}000123456 = 1{,}23456 \cdot 10^{-4}$

**_Si l'on déplace la virgule de n unités vers la droite, il faut multiplier par_** $10^{-n}$.

[1] Cette constante apparaît dans la loi de gravitation de Newton $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$, qui donne la force d'attraction $F$ entre deux corps ponctuels de masses $m_1$ et $m_2$ situés à une distance $r$ l'un de l'autre.