CHAPITRE 3

Opérations dans $\mathbb{R}$

1. Propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$

$(\mathrm{I},+)$	$(\forall a,b \in \mathbb{R})\ \ a+b \in \mathbb{R}$

La somme de deux nombres réels est encore un nombre réel. On dit que l'addition est interne dans $\mathbb{R}$.

Exemple. $3 \in \mathbb{R}, \pi \in \mathbb{R} \Rightarrow 3+\pi \in \mathbb{R}$.

$(\mathrm{C},+)$	$(\forall a,b \in \mathbb{R})\ \ a+b=b+a$

L'addition des nombres réels est commutative.

Exemple. $3+4=4+3=7$.
La commutativité permet d'échanger l'ordre des termes dans une somme.

$(\mathrm{A},+)$	$(\forall a,b,c \in \mathbb{R})\ (a+b)+c=a+(b+c)$

L'addition des nombres réels est associative.

Exemple. $\underbrace{(2+3)}_{5}+4=2+\underbrace{(3+4)}_{7}$.

L'associativité permet de supprimer les parenthèses lorsqu'on écrit des sommes :

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c.$$

$(\mathrm{N},+)$	$(\forall a \in \mathbb{R})\ \ a+0=0+a=a$

0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$.

Exemple. $5+0=0+5=5$.

$(\mathrm{S},+)$	$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R}) / a+b=b+a=0$

L'addition dans $\mathbb{R}$ est symétrique. Pour tout réel *a*, il existe un réel *b* tel que la somme de *a* et de *b* est 0. *b* est appelé l'***opposé*** de *a*. On note : $b=-a$.

Exemple. L'opposé de –3 est $-(-3)=3$. Donc : $-3+3=3+(-3)=0$.

L'addition dans $\mathbb{R}$ possédant les propriétés $(\mathrm{I},+)$, $(\mathrm{C},+)$, $(\mathrm{A},+)$, $(\mathrm{N},+)$ et $(\mathrm{S},+)$, on dit que $(\mathbb{R},+)$ est un ***groupe commutatif.***

On a plus généralement :

Définition. Un ***groupe commutatif*** $(G,\otimes)$ est un ensemble *G* muni d'une opération ***interne*** $\otimes$ qui verifie les 4 propriétés : associativité, élément neutre, symétrie et commutativité.

2. Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{R}$

$\left(\mathrm{I},\cdot\right)$ $\left(\forall a,b\in\mathbb{R}\right)\ a\cdot b\in\mathbb{R}$

Le produit de deux nombres réels est encore un nombre réel. On dit que la multiplication est interne dans $\mathbb{R}$.

Exemple. $3\in\mathbb{R},\pi\in\mathbb{R}\Rightarrow 3\cdot\pi\in\mathbb{R}$.

$\left(\mathrm{C},\cdot\right)$ $\left(\forall a,b\in\mathbb{R}\right)\ a\cdot b=b\cdot a$

La multiplication des nombres réels est commutative.

Exemple. $3\cdot 4=4\cdot 3=12$.
La commutativité permet d'échanger l'ordre des facteurs dans un produit.

$\left(\mathrm{A},\cdot\right)$ $\left(\forall a,b,c\in\mathbb{R}\right)\ \left(a\cdot b\right)\cdot c=a\cdot\left(b\cdot c\right)$

La multiplication des nombres réels est associative.

Exemple. $\underbrace{\left(2\cdot 3\right)}_{6}\cdot 4=2\cdot\underbrace{\left(3\cdot 4\right)}_{12}$.

L'associativité permet de supprimer les parenthèses lorsqu'on écrit des produits :

$$\left(ab\right)c=a\left(bc\right)=abc\,.$$

$\left(\mathrm{N},\cdot\right)$ $\left(\forall a\in\mathbb{R}\right)\ a\cdot 1=1\cdot a=a$

1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Exemple. $\sqrt{2}\cdot 1=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

$\left(\mathrm{S},\cdot\right)$ $\left(\forall a\in\mathbb{R}^*\right)\left(\exists b\in\mathbb{R}^*\right)/\ a\cdot b=b\cdot a=1$

La multiplication dans $\mathbb{R}^*$ est symétrique. Pour tout réel ***non nul*** *a*, il existe un réel ***non nul*** *b* tel que le produit de *a* par *b* soit égal à l'élément neutre 1. *b* est l'***inverse*** de *a*. On note : $b=\frac{1}{a}$.

Exemples.

- L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ car $3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$.
- L'inverse de $-\sqrt{2}$ est $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ car $\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$.
- L'inverse de $\frac{6}{11}$ est $\frac{11}{6}$ car $\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{6}=1$.

Attention : 0 n'a pas d'inverse !

On ne peut pas dire que $\left(\mathbb{R},\cdot\right)$ est un groupe commutatif, puisque la propriété de symétrie n'est pas vérifié dans $\mathbb{R}$, mais seulement dans $\mathbb{R}^*$. Il est évident que les autres propriétés de la multiplication sont aussi valables dans $\mathbb{R}^*$.

La multiplication dans $\mathbb{R}^*$ possédant les propriétés $(\mathrm{I},\cdot)$, $\left(\mathrm{C},\cdot\right)$, $\left(\mathrm{A},\cdot\right)$, $\left(\mathrm{N},\cdot\right)$ et $\left(\mathrm{S},\cdot\right)$, on dit que $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$ est un ***groupe commutatif.***

3. Propriétés de la soustraction et de la division

La soustraction et la division ne vérifient pratiquement aucune des propriétés que nous avons rencontrées ci-dessus.

- La soustraction est interne dans $\mathbb{R}$ car $\left(\forall a,b\in\mathbb{R}\right)\ a-b\in\mathbb{R}$, mais :
- La division n'est pas interne dans $\mathbb{R}$ car par exemple : $3\in\mathbb{R}$, $0\in\mathbb{R}$, mais $\frac{3}{0}$ n'existe pas.
- La division est toutefois interne dans $\mathbb{R}^*$ car $\left(\forall a,b\in\mathbb{R}^*\right)\ \frac{a}{b}\in\mathbb{R}^*$.
- La soustraction n'est pas associative car par exemple : $\left(5-4\right)-3=1-3=-2$ mais $5-\left(4-3\right)=5-1=4$, donc $\left(5-4\right)-3\neq 5-\left(4-3\right)$.
- La division n'est pas associative car par exemple :

$$\left(20:10\right):2=\frac{\frac{20}{10}}{2}=\frac{2}{2}=1 \text{ mais } 20:(10:2)=\frac{20}{\frac{10}{2}}=\frac{20}{5}=4.$$

- 0 n'est pas l'élément neutre pour la soustraction car par exemple : $3-0=3$ mais $0-3\neq 3$.
- 1 n'est pas l'élément neutre pour la division car par exemple : $3\,/\,1=3$ mais $1\,/\,3\neq 3$.
- La soustraction n'est pas commutative car par exemple : $1-2\neq 2-1$.
- La division n'est pas commutative car par exemple : $1\,/\,2\neq 2\,/\,1$.

4. Propriétés faisant intervenir le signe -

- Opposé d'une somme et d'une différence :

$$-\left(a+b\right)=-a-b$$
$$-\left(a-b\right)=-a+b$$

- Opposé d'un produit et d'un quotient :

$$-\left(a\cdot b\right)=\left(-a\right)\cdot b=a\cdot\left(-b\right)=-ab$$
$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

5. Propriétés faisant intervenir deux opérations

$\left(\mathrm{D},\cdot\,/+\right)$	$\left(\forall a,b,c\in\mathbb{R}\right)\ a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c$
La multiplication est ***distributive*** par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$.	

$\left(\mathrm{D},\cdot\,/-\right)$	$\left(\forall a,b,c\in\mathbb{R}\right)\ a\cdot\left(b-c\right)=a\cdot b-a\cdot c$
La multiplication est ***distributive*** par rapport à la soustraction dans $\mathbb{R}$.	

De la distributivité « simple » on déduit les propriétés suivantes appelées parfois « distributivité double » :

$\left(\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$	$\left(a+b\right)\left(c+d\right)=ac+ad+bc+bd$
	$\left(a-b\right)\left(c-d\right)=ac-ad-bc+bd$
	$\left(a+b\right)\left(c-d\right)=ac-ad+bc-bd$

Voici finalement les ***identités (ou produits) remarquables***.

- **Identités remarquables du 2^e degré**

$(\forall a, b \in \mathbb{R})$

Carré d'une somme :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + \underbrace{2ab}_{\substack{\text{double}\\ \text{produit}}} + b^2 \quad \text{(résultat = trinôme carré parfait)}$$

Carré d'une différence :

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - \underbrace{2ab}_{\substack{\text{double}\\ \text{produit}}} + b^2 \quad \text{(résultat = trinôme carré parfait)}$$

Produit d'une somme par la différence :

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{(résultat = différence de deux carrés)}$$

Démonstration. En exercice.

Attention ! Une **différence** de deux carrés $a^2 - b^2$ se factorise mais une **somme** de deux carrés, c.-à-d. $a^2 + b^2$ ne se factorise pas.

- **Identités remarquables du 3^e degré**

$(\forall a, b \in \mathbb{R})$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Démonstration. En exercice.

6. Calculs algébriques

Calculer dans $\mathbb{R}$, signifie souvent : transformer des expressions algébriques à l'aide des règles que nous avons énoncées dans les paragraphes précédents. On distingue entre deux types de transformations, à savoir le ***développement*** et la ***factorisation***.

- ***Développer*** ou ***effectuer*** signifie : ***transformer un produit en une somme***. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction permet de développer des expressions :

$$\underbrace{a(b+c)}_{\text{produit}} = \underbrace{ab + ac}_{\text{somme}}$$

- ***Factoriser*** signifie : ***transformer une somme en un produit***. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction permet aussi de factoriser des expressions :

$$\underbrace{ab+ac}_{\text{somme}} = \underbrace{a\left(b+c\right)}_{\text{produit}}$$

Voici quelques méthodes qui permettent souvent de mener à bien une factorisation :

Essayer d'abord …

① ***Mise en évidence*** de facteurs communs.

Exemple. $ab+ac=a\left(b+c\right)$

Puis …

② ***Identités remarquables***.

Exemple. $x^2-y^2=\left(x+y\right)\left(x-y\right)$

Puis …

③ ***Groupement de termes***.

Exemple.
$$\begin{aligned} 4x+12y+ax+3ay &= \left(4x+12y\right)+\left(ax+3ay\right) \\ &= 4\left(x+3y\right)+a\left(x+3y\right) \\ &= \left(x+3y\right)\left(4+a\right) \end{aligned}$$

Puis …

④ ***Commencer par effectuer l'expression***.

Exemple.
$$\begin{aligned} \left(a+1\right)^2+\left(a-1\right)^2 &= a^2+2a+1+a^2-2a+1 \\ &= 2a^2+2 \\ &= 2\left(a^2+1\right) \end{aligned}$$

Puis recommencer en ① aussi longtemps que possible.