CHAPITRE 5
Equations

1. Généralités et rappels

Définition. Une ***équation*** est une égalité renfermant un nombre réel inconnu, représenté par une lettre et appelé ***inconnue*** de l'équation.

Exemple.

$$2x+5=3x+10 \tag{5.1}$$

est une équation d'inconnue x. $2x+5$ est le ***membre de gauche*** ou ***1^er^ membre*** de l'équation. $3x+10$ est le ***membre de droite*** ou ***2^e^ membre*** de l'équation.

Définition. ***Résoudre*** une équation d'inconnue x, c'est trouver tous les réels x qui vérifient l'égalité. Ces réels sont appelés ***solutions de l'équation***. L'ensemble des solutions d'une équation est noté S.

Définition. Deux équations sont ***équivalentes*** si elles ont le ***même ensemble de solutions***.

Résoudre une équation d'inconnue x revient à écrire une succession d'équations équivalentes de plus en plus "simples". La dernière ligne commence obligatoirement par : $x=\ldots$ et ne doit plus contenir l'inconnue dans le 2^e membre.

Exemple. Résolvons l'équation (5.1) :

Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie l'équivalence entre 2 équations.

$$\begin{aligned}
&2x+5=3x+10\\
\Leftrightarrow\ &2x-3x=10-5\\
\Leftrightarrow\ &-x=5 \quad / \cdot(-1)\\
\Leftrightarrow\ &x=-5
\end{aligned}$$

$$S=\{-5\}$$

L'équation (5.1) a donc une solution unique, à savoir le réel –5. ***Vérifions*** que –5 est bien solution de l'équation.

Le ? indique qu'on est en train de regarder si –5 vérifie bien l'équation.

$$\begin{aligned}
&2\cdot(-5)+5\overset{?}{=}3\cdot(-5)+10\\
\Leftrightarrow\ &-10+5\overset{?}{=}-15+10\\
\Leftrightarrow\ &\quad -5\overset{!}{=}-5
\end{aligned}$$

Le ! indique qu'on a terminé la vérification : les deux membres sont égaux.

Retenons : Pour ***vérifier*** qu'un réel x est solution d'une équation donnée, on remplace x ***dans la première ligne de l'équation***, puis on effectue les deux membres de l'équation pour voir s'ils sont égaux.

2. Equations polynomiales. Degré et nombre de solutions

Nous explicitons dans ce paragraphe la forme générale des équations que nous abordons. Il est important, avant de résoudre une équation, de reconnaître son ***degré***, puisque la méthode de résolution en dépend considérablement :

> ***Définition 1***. Un ***monôme*** de la ***variable*** x [1] est une expression de la forme $a \cdot x^n$ où a est une constante non nulle, appelée ***coefficient*** du monôme, et n un entier naturel, appelé ***degré*** du monôme.

Exemples de monômes.

- $3x^6$ est un monôme de coefficient $a = 3$ et de degré $n = 6$.
- $-x^2$ est un monôme de coefficient $a = -1$ et de degré $n = 2$.
- $\frac{4}{7}x$ est un monôme de coefficient $a = \frac{4}{7}$ et de degré $n = 1$.
- 5 est aussi un monôme car $5 = 5 \cdot x^0$: le degré de ce monôme est donc 0.

> ***Définition 2***. Un ***polynôme*** de la variable x est une somme de monômes en x. Le ***degré*** d'un polynôme est le plus haut degré de ses monômes.

Exemples de polynômes.

- $x^2 + 3x - 5$ est un polynôme de degré 2 en x.
- $-3t^4 + 2t^2 + t - 7$ est un polynôme de degré 4 en t.
- $1 + y^5 - y + 2y^6$ est un polynôme de degré 6 en y.

Remarque. Parfois, les polynômes se présentent sous forme ***non réduite***. ***Réduire*** un polynôme, c'est d'abord le développer, puis additionner les monômes de même degré (monômes ***semblables***).
Exemple.

$2x(x^2+2)-(x^2+1)(x-2)$ ←	Ce polynôme est non développé.
$= 2x^3 + 4x - (x^3 - 2x^2 + x - 2)$ $= \underline{2x^3} + \underline{\underline{4x}} - \underline{x^3} + 2x^2 - \underline{\underline{x}} + 2$ ←	Il est maintenant développé, mais non réduit.
$= x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ ←	Il est finalement réduit. Son degré est égal à 3.

> ***Pour reconnaître le degré d'un polynôme,***
> ***il faut le réduire !***

Après ces remarques préliminaires, nous sommes en mesure de définir les équations que nous tenterons de résoudre.

> ***Définition***. Une ***équation polynomiale*** d'inconnue x est une équation de la forme (ou équivalente à) $p(x) = 0$ où $p(x)$ est un polynôme en x. Le ***degré*** d'une telle équation est le degré de $p(x)$.

Exemples d'équations polynomiales.

- L'équation $x^3 + 1 = 0$ est polynomiale de degré 3. En effet, le polynôme $p(x)$ de la définition est égal à $x^3 + 1$ et a le degré 3.
- L'équation $4x^2 = 2x - 5$ est polynomiale de degré 2. En effet, après avoir transporté tous les termes du 2^{e} membre dans le 1er membre, on voit que le polynôme $p(x)$ est égal à $4x^2 - 2x + 5$.
- L'équation (5.1) est polynomiale de degré 1.

---

[1] On dit encore : un monôme ***en*** x.

- L'équation $-x+1=x^2$ est polynomiale de degré 2.
- L'équation $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5=0$ est polynomiale de degré 5.
- ***Attention*** : l'équation $x(x+1)=x^2+3x+2$ n'est pas, comme on pourrait le croire ***à priori***, du 2^e^ degré. En effet, après réduction des termes semblables, on constate qu'elle est du 1^er^ degré :

$$\begin{aligned}
& x(x+1)=x^2+3x+2 \\
\Leftrightarrow\ & \cancel{x^2}+x=\cancel{x^2}+3x+2 \\
\Leftrightarrow\ & x=3x+2 \\
\Leftrightarrow\ & 0=2x+2 \\
\Leftrightarrow\ & \ldots
\end{aligned}$$

> Avant de déterminer le degré d'une équation polynomiale, il faut ***réduire les termes semblables***.

Il est facile d'inventer des équations qui ne sont pas polynomiales.

Contre-exemples.

- $\sqrt{x}=x+3$ n'est pas polynomiale à cause de la ***racine carrée***.
- $2^x=6x$ n'est pas polynomiale parce que ***l'inconnue est à l'exposant***.
- $\dfrac{x}{x^2+2}=\dfrac{3}{4}$ n'est pas polynomiale puisque ***l'inconnue apparaît au dénominateur***.

Si nous voulons résoudre une équation, nous devons essayer de la ramener à une équation polynômiale équivalente. Il est rassurant de noter qu'une équation qui semble non polynomiale à première vue, est souvent équivalente à une équation polynomiale après des transformations adéquates. Pour le dernier exemple ci-dessus, il convient d'utiliser la ***multiplication en croix***.

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{x^2+2}=\frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\ & 4x=3(x^2+2) \\
\Leftrightarrow\ & 4x=3x^2+6
\end{aligned}$$

Et voilà une équation qui est bien polynomiale !

Insistons sur le fait que ça ne marche pas dans tous les cas. Par exemple, l'équation $2^x=6x$ n'est pas polynomiale.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat important sur le ***nombre de solutions*** d'une équation polynomiale.

Théorème. Une équation polynomiale de degré $n\geq 1$ a ***au plus*** n solutions.

Démonstration admise.

Exemple. Une équation du 2^e^ degré a donc soit 2 solutions, soit 1 solution, soit aucune solution. Montrons que toutes les situations sont possibles.

- $x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$. Cette équation du 2^e^ degré a 2 solutions distinctes.
- $x^2=0\Leftrightarrow x=0$. Cette équation du 2^e^ degré a 1 solution.
- $x^2=-1$ est impossible car un carré est toujours positif. Cette équation du 2^e^ degré n'a donc aucune solution.

3. Equations du 1^er^ degré

Définition. Une ***équation du 1^er^ degré*** d'inconnue x est une équation équivalente à une équation du type $ax = b$, où a et b sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.

Remarque. Il faut bien prendre $a \neq 0$, sinon le terme ax s'annule et l'équation ne serait plus du 1^er^ degré.

Le théorème du §2 peut être précisé dans le cas des équations du 1^er^ degré :

Théorème. Toute équation du 1^er^ degré a exactement une solution .

Démonstration. Soit $ax = b$ une équation du 1^er^ degré, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Or :

$$ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}.$$

Donc cette équation a une solution unique : $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$.

Exemples et contre-exemples.

- $\frac{x}{2} - 3 = 2(x+1) \quad / \cdot 2$
  $\Leftrightarrow x - 6 = 4(x+1)$
  $\Leftrightarrow x - 6 = 4x + 4$
  $\Leftrightarrow x - 4x = 6 + 4$
  $\Leftrightarrow -3x = 10 \quad / \div(-3)$ ← On n'est sûr du 1^er^ degré qu'à partir de cette ligne.
  $\Leftrightarrow x = -\frac{10}{3}$

- $(x-1)^2 = (x+1)(x-4)$ ← On pourrait penser qu'il s'agit d'une équation du 2^e^ degré…
  $\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} - 4x + x - 4$
  $\Leftrightarrow 1 + 4 = -3x + 2x$ ← … mais les carrés se détruisent : il s'agit bien d'une équation du 1^er^ degré.
  $\Leftrightarrow 5 = -x$
  $\Leftrightarrow x = -5$

- $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{x+5}{6}$
  $\Leftrightarrow \frac{3x}{6} - \frac{2x+2}{6} = \frac{x+5}{6} \quad / \cdot 6$
  $\Leftrightarrow 3x - 2x - 2 = x + 5$
  $\Leftrightarrow x - 2 = x + 5$
  $\Leftrightarrow x - x = 5 + 2$
  $\Leftrightarrow 0 \cdot x = 7$ ← Non, car les monômes du 1^er^ degré disparaissent au cours de la réduction !
  $\Leftrightarrow 0 = 7$

  Est-ce une équation du 1^er^ degré ?

L'inconnue x a disparue de l'équation. Il ne s'agit donc pas d'une équation du 1^er^ degré. La dernière ligne étant impossible, on conclut que $S = \varnothing$.

- $(x-1)^2+2(x-1)=x^2-1$

Est-ce une équation du 2e degré ?

$(x-1)^2+2(x-1)=x^2-1$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2x-2=x^2-1$
$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-\cancel{x^2}-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1+1=0$
$\Leftrightarrow 0=0$

Non, car les carrés disparaissent ; mais l'équation n'est pas non plus du 1er degré car les termes du 1er degré se détruisent aussi !

La dernière ligne étant vraie, on conclut que la 1re ligne est également vraie, quel que soit x : $S=\mathbb{R}$.

4. Equations du 2e degré

Nous allons expliquer la méthode de résolution d'une équation du 2e degré sur des exemples.[2]

- $x^2=4$
$\Leftrightarrow x^2-4=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$
$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$
$S=\{2,-2\}$

1. Transporter tous les termes dans un membre de sorte que ***l'autre membre s'annule***.
2. ***Factoriser*** si possible le membre non nul en utilisant les techniques du chapitre 2.
3. Appliquer la ***règle du produit nul*** : un produit s'annule ssi l'un de ses facteurs est nul.

$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$
Cas particulier : $a^2=0 \Leftrightarrow a=0$

Remarque. On a factorisé le 1er membre en utilisant une identité remarquable. Le polynôme du 2e degré x^2-4 a été factorisé en deux polynômes du 1er degré $x-2$ et $x+2$. On a ainsi ramené la résolution d'une équation du 2e degré à la résolution de 2 équations du 1er degré.

- $4x^2=4x-1$
$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0$
$\Leftrightarrow (2x-1)^2=0$
$\Leftrightarrow 2x-1=0$
$\Leftrightarrow 2x=1$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

On reconnaît une identité remarquable dans le premier membre.

On doit appliquer le cas particulier de la règle du produit nul ! On obtient une seule équation du 1er degré et donc une ***solution unique*** pour cette équation du 2e degré.

- $x^2=3+2x$
$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1-1-3=0$
$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-4=0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2-4=0$
$\Leftrightarrow (x-1-2)(x-1+2)=0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$
$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+1=0$
$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-1$
$S=\{3,-1\}$

On ne reconnaît plus d'identité remarquable dans le premier membre.

Mais x^2-2x est le ***début d'une identité remarquable***. D'où l'idée d'ajouter le terme manquant (+1) et de le retrancher aussitôt après (−1) ; dans la ligne suivante, on regroupe ensuite convenablement les termes, ce qui conduit à une ***différence de 2 carrés***.

[2] Les formules générales ne sont pas au programme de la 5e.

- $x^2+3x-10=0$
  $\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x-10=0$
  $\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-10=0$
  $\Leftrightarrow \left(x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}-\frac{40}{4}=0$
  $\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=0$
  $\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=0$
  $\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)=0$
  $\Leftrightarrow (x-2)(x+5)=0$
  $\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+5=0$
  $\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-5$
  $S=\{2,-5\}$

Difficulté supplémentaire : le terme $3x$ ne ressemble pas trop à un double produit. Mais on y parvient en remarquant que :

$$3x=2\cdot\frac{3}{2}\cdot x$$

- $2x^2+5x+4=0 \;\; /\div 2$
  $\Leftrightarrow x^2+\frac{5}{2}x+2=0$
  $\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{5}{4}\cdot x+2=0$
  $\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{5}{4}\cdot x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}+2=0$
  $\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{32}{16}=0$
  $\Leftrightarrow \underbrace{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{7}{16}}_{>0}=0$
  $S=\varnothing$

On observe que le 1er terme $2x^2$ ***n'est pas un carré***. D'où l'idée de diviser l'équation par 2.

On remarque que $\frac{5}{2}x=2\cdot\frac{5}{4}\cdot x$. C'est le ***double produit*** !

On n'obtient ***plus de différence de 2 carrés***, mais une ***somme*** de 2 termes dont le 1er est un carré (donc ≥ 0) et le 2^{e} est >0 : ***le résultat ne peut donc pas être égal à 0 !*** Cette équation n'admet donc pas de solution.

Des exemples supplémentaires seront traités dans les exercices.

5. Equations de degré ≥ 3

Méthode :

1. Transporter tous les termes de l'équation dans un membre de sorte que ***l'autre membre s'annule***. On obtient alors une équation polynomiale $p(x)=0$ où $p(x)$ est un polynôme de degré ≥ 3.
2. ***Factoriser*** si possible le membre non nul en utilisant les techniques du chapitre 2. On essaiera d'obtenir des facteurs qui sont tous du 1^{er} ou du 2^{e} degré.
3. Appliquer la ***règle du produit nul*** : un produit est nul ssi l'un de ses facteurs est nul. Puisque tous les facteurs sont du 1^{er} ou du 2^{e} degré, on ramène la résolution de l'équation de degré ≥ 3 à la résolution d'équations qui sont toutes du 1^{er} ou du 2^{e} degré. Pour résoudre ces équations on utilise les résultats du §3 ou du §4.

Exemples.

- $x^3 = x$

  Voici une équation du 3^{e} degré.

  $\Leftrightarrow x^3 - x = 0$

  $\Leftrightarrow x(x^2-1)=0$

  $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$

  $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

  On a factorisé le premier membre en 3 facteurs qui sont tous du 1^{er} degré. Il reste donc à résoudre 3 équations du 1^{er} degré.

  $S=\{0,-1,1\}$

- $x^3 = -x$

  $\Leftrightarrow x^3 + x = 0$

  $\Leftrightarrow x(x^2+1)=0$

  On a factorisé le premier membre en 2 facteurs : l'un est du 1^{er} degré, l'autre est du 2^{e} degré.

  $\Leftrightarrow x=0$ ou $\underbrace{x^2+1=0}_{\text{impossible, car } x^2+1>0}$

  L'équation du 2^{e} degré n'a pas de solution dans ce cas. Voilà pourquoi l'équation proposée admet une solution unique.

  $\Leftrightarrow x=0$

  $S=\{0\}$

6. Equations où l'inconnue est au dénominateur

Méthode :

1. Ecrire les ***conditions d'existence*** : une fraction existe si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas. Le ***domaine de l'équation*** est l'ensemble des réels pour lesquels l'équation a un sens.
2. Mettre toutes les fractions sur un dénominateur commun.
3. Multiplier l'équation par ce dénominateur commun pour se ramener à une équation polynomiale.
4. Résoudre l'équation polynomiale. ***Attention*** : une solution de l'équation polynomiale est solution de l'équation initiale si et seulement si elle appartient au domaine de celle-ci.

Exemples.

- $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{4x}{x^2-4}$

$\frac{a}{b}$ existe $\Leftrightarrow b \neq 0$

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$$

Attention :
$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **ou** $b = 0$
$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ **et** $b \neq 0$

Domaine : $D = \mathbb{R} \setminus \{0,2,-2\}$

$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2,-2\})$

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{4x}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\frac{x(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{4x^2}{x(x-2)(x+2)} \quad /\cdot x(x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-4)+x^2+2x=4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-12+x^2+2x=4x^2$$

Elle est du 1er degré.

$$\Leftrightarrow 2x=12$$

$$\Leftrightarrow x=6 \in D$$

La solution est bien dans le domaine de l'équation initiale.

$S=\{6\}$

- $\frac{7}{1-x}=\frac{11}{x^2+3x}-\frac{28}{x^2+2x-3}+\frac{4}{x+3}$

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ x^2+3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq -3 \\ x^2+2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -3 \quad (*) \\ x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \end{cases}$$

(*) Résoudre cette équation en exercice.

Domaine : $D = \mathbb{R} \setminus \{0,1,-3\}$

$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,-3\})$

$$\frac{7}{1-x}=\frac{11}{x^2+3x}-\frac{28}{x^2+2x-3}+\frac{4}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{x-1}=\frac{11}{x(x+3)}-\frac{28}{(x-1)(x+3)}+\frac{4}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7x(x+3)}{x(x-1)(x+3)}=\frac{11(x-1)}{x(x-1)(x+3)}-\frac{28x}{x(x-1)(x+3)}+\frac{4x(x-1)}{x(x-1)(x+3)} \quad /\cdot x(x-1)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow -7x^2-21x=11x-11-28x+4x^2-4x$$

$\Leftrightarrow -7x^2 - 4x^2 - 21x - 11x + 4x + 28x + 4x + 11 = 0$

$\Leftrightarrow -11x^2 + 11 = 0 \ \ / \div(-11)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \notin D$ ou $x = -1 \in D$

$S = \{-1\}$

La solution $x = 1$ est à exclure puisqu'elle n'appartient pas au domaine de l'équation.