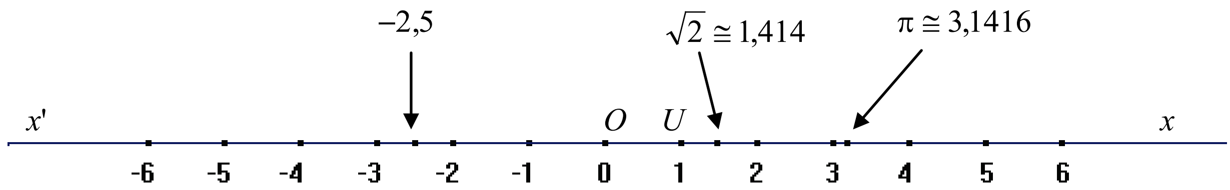
CHAPITRE 6

Inégalités. Inéquations. Encadrements

1. Représentation de l'ensemble $\mathbb{R}$ sur une droite

On peut représenter graphiquement l'ensemble des nombres réels sur une droite *d*.



On commence par choisir un point *O*, appelé ***origine*** et représentant le réel 0 : on dit que *O* a comme ***abscisse*** 0. On choisit ensuite un point *U*, appelé ***point unité*** et représentant le réel 1 : *U* a comme ***abscisse*** 1. Ces choix étant faits, l'***abscisse*** de chaque point de la droite *d* est fixée comme le montre la figure.

2. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Définition. Soit x et y deux réels. On dit que x est ***inférieur ou égal*** à y et on note $x \leq y$ si et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

L'ensemble des nombres réels est ***ordonné*** par la relation $\leq$. Par exemple :

$$-2{,}5 \leq 0 \leq 1 \leq \sqrt{2} \leq \pi .$$

Cette relation possède les propriétés suivantes :

1. ***Réflexivité***. $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x \leq x$.
2. ***Antisymétrie***. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$.
3. ***Transitivité***. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ \ x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Toute relation qui possède ces propriétés est appelée ***relation d'ordre***. On dit de plus que l'ordre induit par la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$ est ***total*** puisqu'il est toujours possible de comparer deux réels grâce à cette relation. En effet :

$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x \leq y$ ou $y \leq x$.

Remarques.

- La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive. Par contre, la relation $\geq$ est aussi une relation d'ordre.
- Il est trivial mais important de noter que :

$$a \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow a \geq 0 \tag{6.1}$$

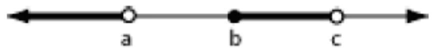
$$a \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow a \leq 0 \tag{6.2}$$

$$a \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow a > 0 \tag{6.3}$$

$$a \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow a < 0 \tag{6.4}$$

3. Intervalles de $\mathbb{R}$

Un ***intervalle*** de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble ***connexe*** (c.-à-d. en un seul morceau) de $\mathbb{R}$.

	Notations	Inéquations	Représentations graphiques
1	$]a\,;b[$	$a < x < b$	
2	$[a\,;b]$	$a \le x \le b$	
3	$[a\,;b[$	$a \le x < b$	
4	$]a\,;b]$	$a < x \le b$	
5	$]a\,;+\infty[$	$x > a$	
6	$[a\,;+\infty[$	$x \ge a$	
7	$]-\infty\,;b[$	$x < b$	
8	$]-\infty\,;b]$	$x \le b$	
9	$]-\infty\,;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}$)	$-\infty < x < +\infty$	
10	$]-\infty\,;a[\,\cup\,[b\,;c[$	$x < a$ ou $b \le x < c$	

- $]a,b[$, $]a,+\infty[$ et $]-\infty,b[$ sont des intervalles ***ouverts*** (les extrémités ne sont pas comprises).
- $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ sont des intervalles ***fermés*** (les extrémités sont comprises, à l'exception de $+\infty$ et $-\infty$).
- $[a,b[$ et $]a,b]$ sont des intervalles ***semi-ouverts*** ou ***semi-fermés***.

Remarques.

- Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. Voilà pourquoi les bornes $+\infty$ et $-\infty$ doivent être exclues de l'intervalle !
- Par définition, l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble $\mathbb{R}$ sont aussi des intervalles. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être noté : $]-\infty,+\infty[$.
- On pourra vérifier en exercice que l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle. Par contre, l'exemple 10 prouve que la réunion de deux intervalles n'est pas tojours un intervalle.

4. Inéquations du 1^er^ degré

Définition. Une ***inégalité*** est une assertion de la forme $x \le y, x < y, x \ge y$ ou $x > y$.

Exemples. $3 < \pi$, $a \le b + 10$, $x^2 \ge 0$ sont des inégalités.

Définition. Une ***inéquation*** est une inégalité contenant une inconnue, représentée par une lettre. Résoudre une inéquation d'inconnue x c'est trouver les réels x qui vérifient l'inégalité. L'ensemble des solutions de l'inéquation est noté S.

Exemple. $3x - 6 < x$ est une inéquation du 1^er^ degré d'inconnue x.

Pour résoudre une telle inéquation on a besoin de deux propriétés de la relation $\leq$.

Propriété 1.

Inégalités et addition : $$(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) \;\; a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c \tag{6.5}$$

On peut additionner le même nombre réel aux deux membres d'une inéquation sans que le sens de celle-ci change. De même :

Inégalités et soustraction : $$(\forall a,b,c \in \mathbb{R}) \;\; a \leq b \Leftrightarrow a - c \leq b - c \tag{6.6}$$

On peut soustraire le même nombre réel aux deux membres d'une inéquation sans que le sens de celle-ci change.

Démonstration.

- Démontrons par exemple (6.5) :

$$\begin{aligned} & a + c \leq b + c \\ \Leftrightarrow\; & (b+c) - (a+c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\; & b \cancel{+c} - a \cancel{-c} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\; & b - a \geq 0 \\ \Leftrightarrow\; & a \leq b \end{aligned}$$

- La propriété (6.6) se démontre de façon analogue.

Propriété 2.

Inégalités et multiplication : $$(\forall a,b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}_+^*) \;\; a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc \tag{6.7}$$

$$(\forall a,b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}_-^*) \;\; a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc \tag{6.8}$$

Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par le même nombre réel ***strictement positif*** le sens de celle-ci ne change pas. Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par le même nombre réel ***strictement négatif*** le sens de celle-ci est inversé. De même :

Inégalités et division : $$(\forall a,b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}_+^*) \;\; a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c} \tag{6.9}$$

$$(\forall a,b \in \mathbb{R})(\forall c \in \mathbb{R}_-^*) \;\; a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \tag{6.10}$$

Si l'on divise les deux membres d'une inégalité par le même nombre réel ***strictement positif*** le sens de celle-ci ne change pas. Si l'on divise les deux membres d'une inégalité par le même nombre réel ***strictement négatif*** le sens de celle-ci est inversé.

Démonstration.

- Démontrons par exemple (6.7) : supposons que $c > 0$.

$$\begin{aligned} & ac \leq bc \\ \Leftrightarrow\; & bc - ac \geq 0 \\ \Leftrightarrow\; & c(b-a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\; & b - a \geq 0 \text{ car } c > 0 \\ \Leftrightarrow\; & a \leq b \end{aligned}$$

- Les 3 autres propriétés se démontrent de façon analogue.

Remarque. Les propriétés 1 et 2 restent valables pour la relation $<$.

Exemples.

- $x-3 \le 8 \quad / +3$
  $\Leftrightarrow x \le 8+3$
  $\Leftrightarrow x \le 11$
  $S = \left]-\infty,11\right]$

Le terme -3 du 1^er membre est "transporté" dans le 2^e membre et devient +3.

- $a+4>6 \quad / -4$
  $\Leftrightarrow a > 6-4$
  $\Leftrightarrow a > 2$
  $S = \left]2,+\infty\right[$

Le terme +4 du 1^er membre est "transporté" dans le 2^e membre et devient -4.

Ces exemples très simples montrent qu'on peut en fait ***transporter un terme*** d'un membre dans l'autre ***en changeant son signe***, comme nous sommes habitués à la faire dans le cas des équations.

- $2x \le 6 \quad / \div 2$
  $\Leftrightarrow x \le 3$
  $S = \left]-\infty,3\right]$

- $\frac{4x}{3} > -1 \quad / \cdot \frac{3}{4}$
  $\Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$
  $S = \left]-\frac{3}{4},+\infty\right[$

Dans ces deux exemples, on multiplie ou divise l'inéquation par un réel strictement positif : le sens de l'inéquation ne change pas !

- $-3x < -18 \quad / \div(-3)$
  $\Leftrightarrow x > 6$
  $S = \left]6,+\infty\right[$

- $-\frac{2}{3}x \ge \frac{1}{4} \quad / \cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$
  $\Leftrightarrow x \le -\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}$
  $\Leftrightarrow x \le -\frac{3}{8}$
  $S = \left]-\infty,-\frac{3}{8}\right]$

Dans ces deux exemples, on multiplie ou divise l'inéquation par un réel strictement négatif : le sens de l'inéquation est inversé !

- $2x+3 \le -5x+17$
  $\Leftrightarrow 2x+5x \le 17-3$
  $\Leftrightarrow 7x \le 14 \qquad / \div 7$
  $\Leftrightarrow x \le 2$
  $S =]-\infty, 2]$

- $4x < 2(1+2x)$
  $\Leftrightarrow 4x < 2+4x$
  $\Leftrightarrow 4x - 4x < 2$
  $\Leftrightarrow 0 < 2$
  $S = \mathbb{R}$

  Puisque la dernière ligne est vraie, l'ensemble de solutions est $\mathbb{R}$ tout entier.

- $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{4} \ge \frac{6x+1}{8}$
  $\Leftrightarrow \frac{4x-4}{8} + \frac{2x+2}{8} \ge \frac{6x+1}{8} \qquad / \cdot 8$
  $\Leftrightarrow 4x-4+2x+2 \ge 6x+1$
  $\Leftrightarrow 6x-2 \ge 6x+1$
  $\Leftrightarrow 6x-6x \ge 1+2$
  $\Leftrightarrow 0 \ge 3$
  $S = \varnothing$

  Puisque la dernière ligne est fausse, l'ensemble de solutions est vide.