Chapitre 7

Triangle rectangle et cercle circonscrit. Théorème de Pythagore et réciproque

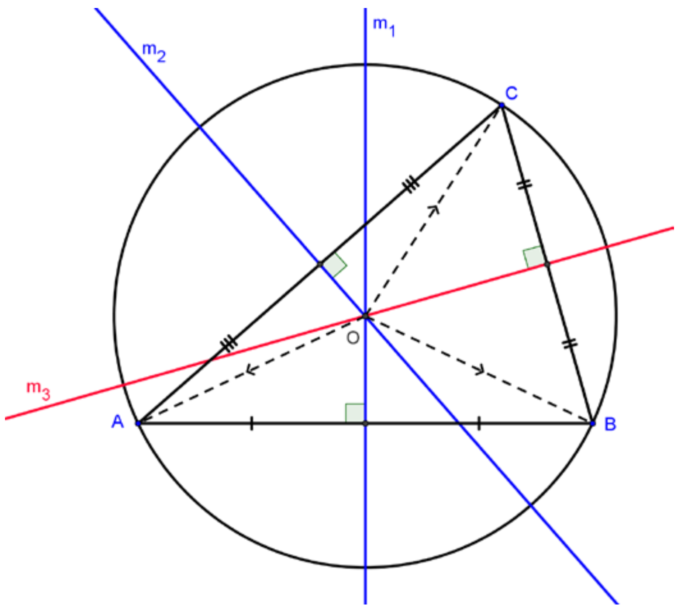
1. Triangle rectangle et cercle circonscrit

Rappelons que le cercle circonscrit d'un triangle ABC est le cercle passant par les trois sommets A, B et C du triangle. Le théorème suivant précise où se trouve le centre de ce cercle.

Théorème 1 (du cercle circonscrit). Les ***trois médiatrices*** d'un triangle ABC sont ***concourantes*** en un point O. Ce point O est le ***centre du cercle circonscrit*** du triangle.

Démonstration.

Soit O le point d'intersection des médiatrices m_1 de $[AB]$ et m_2 de $[AC]$.



- Comme $O \in m_1$, on a $OA = OB$, car tout point de la médiatrice m_1 est équidistant de A et de B.
- De même, comme $O \in m_2$, on a $OA = OC$.
- Comme $OA = OB$ et $OA = OC$, on a aussi $OB = OC$, c.-à-d. O est équidistant de B et de C.
- Donc O appartient aussi à la troisième médiatrice du triangle ABC, c.-à-d. la médiatrice m_3 de $[BC]$.

Ainsi les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes en O et O est équidistant des trois sommets du triangle : $OA = OB = OC$. Il existe donc un cercle de centre O passant par les points A, B et C du triangle. Ce cercle est le cercle circonscrit du triangle ABC.

□

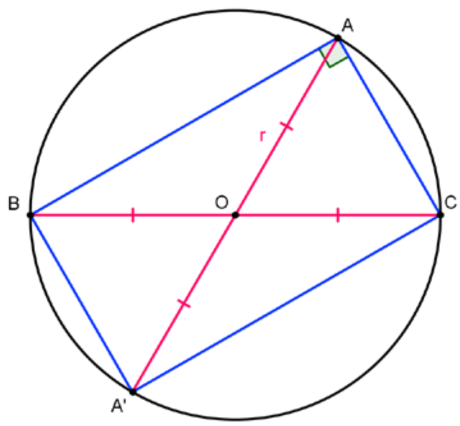
A l'aide de ***Geogebra***, on constate que le centre du cercle circonscrit est

- à ***l'intérieur*** du triangle ABC ssi le triangle ....
....
....
- à ***l'extérieur*** du triangle ABC ssi le triangle ....
....
....
- ***sur l'un des côtés*** du triangle ABC ssi le triangle ....
....

Nous allons préciser et démontrer la dernière observation :

Théorème 2 (du cercle circonscrit d'un triangle rectangle). Si le triangle ABC est rectangle en A, alors son cercle circonscrit est le ***cercle de diamètre*** $[BC]$.

Démonstration.



Soit O le milieu de $[BC]$ et A' le symétrique de A par rapport à O.

- Comme $O = \text{mil}[AA'] = \text{mil}[BC]$, les diago-nales du quadrilatère $ABA'C$ se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est donc un ***parallélogramme***.
- Or le parallélogramme $ABA'C$ a par hypothèse un angle droit en A, c'est donc un ***rectangle***.
- On sait que les diagonales d'un rectangle ont même longueur et se coupent en leur milieu, donc $OA = OB = OC \; (= OA')$.
- Par conséquent O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. $[BC]$ est donc le diamètre du cercle circonscrit.

□

Conséquences : Si le triangle ABC est rectangle en A alors :

a) Le ***centre du cercle circonscrit*** est le milieu O de ***l'hypoténuse*** $[BC]$.

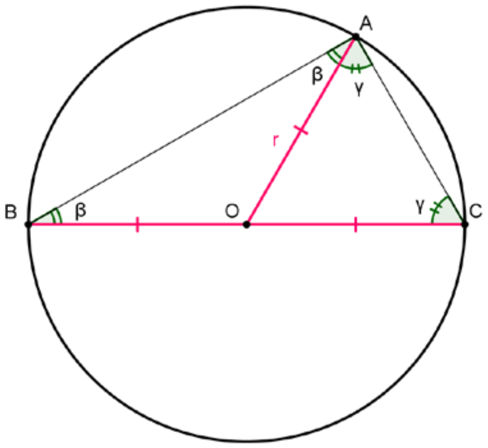
b) ***Théorème de la médiane.*** La ***médiane*** issue de A mesure la ***moitié de l'hypoténuse*** c.-à-d. :

$$AO = \frac{BC}{2}.$$

Le théorème 2 admet une réciproque :

Réciproque du théorème 2 (Théorème du cercle de Thalès). Si le triangle ABC est inscrit dans un cercle et si le côté $[BC]$ est un diamètre de ce cercle alors le triangle ABC est rectangle en A.

Démonstration. Soit $O = \text{mil}[BC]$, par hypothèse O est aussi le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. On note $\beta = \hat{B}$ et $\gamma = \hat{C}$. Il faut montrer que $\alpha = \hat{A} = 90°$.



- Le triangle AOB est isocèle en O car $OA = OB$ (rayon du cercle circonscrit), donc $\widehat{BAO} = \hat{B} = \beta$.
- De même, le triangle AOC est isocèle en O, donc : $\widehat{CAO} = \hat{C} = \gamma$.
- Par conséquent : $\alpha = \hat{A} = \widehat{BAO} + \widehat{CAO} = \beta + \gamma$.
- Or, la somme des angles du triangle ABC est égale à 180° :

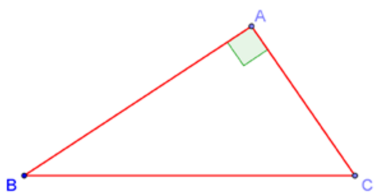
$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \gamma = 180° \\ \Leftrightarrow\ &\alpha + \alpha = 180° \\ \Leftrightarrow\ &2\alpha = 180° \\ \Leftrightarrow\ &\alpha = 90° \end{aligned}$$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

□

Conséquences. Si dans le triangle ABC, le milieu du côté $[BC]$ est équidistant des trois sommets A, B et C, alors ce triangle est rectangle en A.

Résumé visuel :



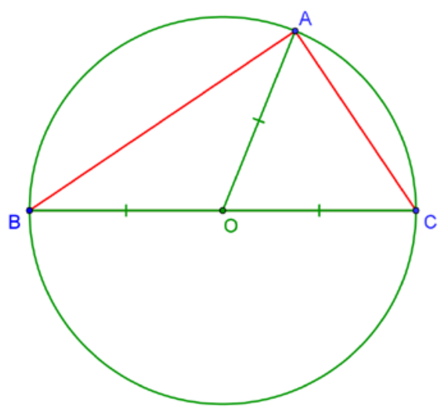
$\Rightarrow$

théorème 2

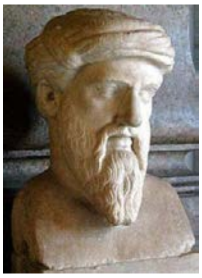
$\Leftarrow$

réciproque du théorème 2

(théorème du cercle de Thalès)

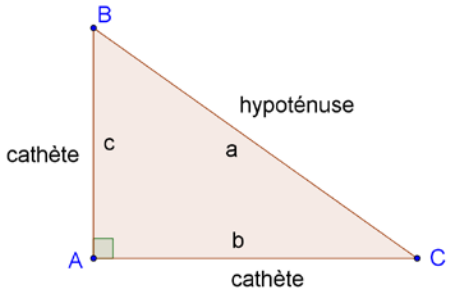


2. Théorème de Pythagore et réciproque



Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur de l'un des côtés d'un triangle rectangle lorsqu'on connaît les deux autres. Il est nommé d'après ***Pythagore de Samos****, mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique (580- env. 495 avant J.-C.), même si le résultat a vraisemblablement été découvert indépendamment dans plusieurs autres cultures.*

Vocabulaire : Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle ***hypoténuse*** et les deux côtés adjacents à l'angle droit sont appelés ***cathètes***. L'hypoténuse est aussi le côté le plus long d'un triangle rectangle !



Théorème de Pythagore. Si le triangle ABC est rectangle en A, alors :

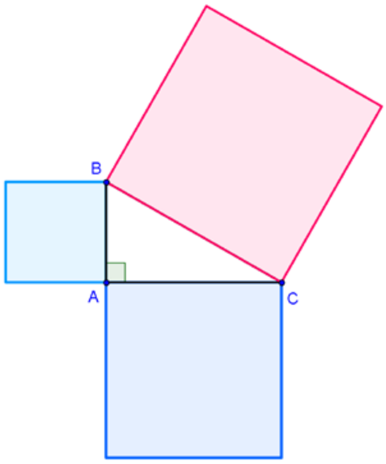
$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

En d'autres termes : Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des cathètes est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse.

Remarques : a) On ne peut évidemment pas laisser de côté les carrés dans l'énoncé du théorème de Pythagore . En effet, rappelons que si A, B et C sont trois points du plan alors :

$$AB + AC = BC \Leftrightarrow \text{.....................................}$$

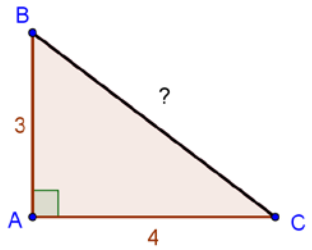
b) On peut reformuler le théorème de Pythagore en utilisant des ***aires*** : *Si le triangle ABC est rectangle en A, alors l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux carrés construits sur les cathètes.*



Exemples d'application.

1) Si $AB = 3$ et $AC = 4$ dans le triangle ABC rectangle en A, quelle est la longueur de l'hypoténuse BC ? D'après le théorème de Pythagore, on a :

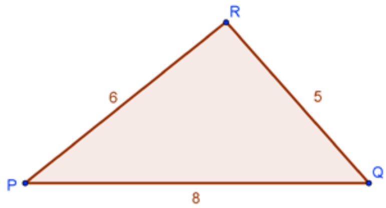
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = 9 + 16$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow BC = \sqrt{25} = 5$$



2) Le théorème de Pythagore, ou plus précisément sa ***contraposée***, permet aussi de démontrer qu'***un triangle n'est pas rectangle*** lorsqu'on connaît les longueurs de ses 3 côtés. En effet :

Théorème de Pythagore :	$\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$
Contraposée du théorème de Pythagore :	$AB^2 + AC^2 \neq BC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} \neq 90°$

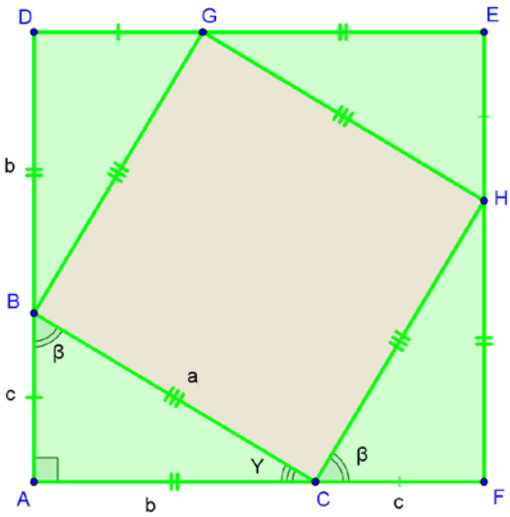
Soit par exemple le triangle PQR ci-contre dont les côtés mesurent respectivement 5, 6 et 8 cm. ***Est-ce un triangle rectangle ?*** Si c'est le cas, alors l'angle droit est nécessairement en R car $[PQ]$ est le côté le plus long, donc on devrait avoir : $RP^2 + RQ^2 = PQ^2$.



Or : $RP^2 + RQ^2 = 36 + 25 = 61$ et $PQ^2 = 64$. Comme $RP^2 + RQ^2 \neq PQ^2$, on peut conclure d'après la contraposée du théorème de Pythagore que le triangle PQR n'est pas rectangle en R (ni en un autre point !).

Démonstration du théorème de Pythagore.

Dans le triangle ABC, rectangle en A, soit $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Avec ces notations il faut démontrer que $a^2 = b^2 + c^2$.



On trace le carré $ADEF$ de côté $b + c$, comme sur la figure ci-contre et on marque sur les côtés les points B, G, H, et C tels que $AB = DG = EH = FC = c$.

- Les quatre triangles verts sont alors ***superposables*** (c.-à-d. leurs côtés ont deux à deux la même longueur).
- Le quadrilatère gris $BCHG$ est un carré car ses quatre côtés ont comme longueur a et il a quatre angles droits. En effet, montrons par exemple que $\widehat{BCH} = 90°$: les angles aigus β

et γ du triangle ABC sont complémentaires, c.-à-d. $\beta+\gamma=90°$. (Rappelez pourquoi !) D'autre part, $\widehat{HCF}=\widehat{CBA}=\beta$. Donc :

$$\widehat{BCH}=180°-\left(\widehat{BCA}+\widehat{HCF}\right)=180°-90°=90°.$$

Calculons maintenant l'aire du carré $ADEF$ de deux façons :

1) $[ADEF]=(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$

2) $[ADEF]=4\cdot[ABC]+[BGHC]=4\cdot\frac{bc}{2}+a^2=2bc+a^2$

Donc : $b^2+\cancel{2bc}+c^2=\cancel{2bc}+a^2 \Leftrightarrow b^2+c^2=a^2$

$\square$

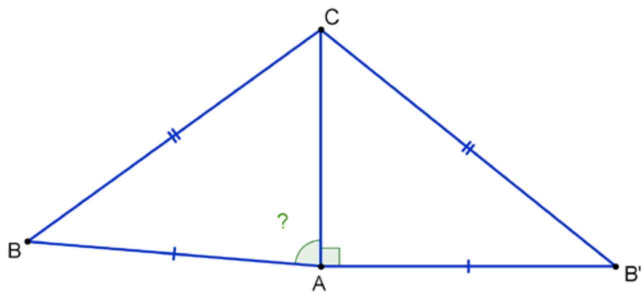
Réciproque du théorème de Pythagore. Si dans le triangle ABC on a $AB^2+AC^2=BC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

Démonstration.

Soit un triangle ABC dans lequel est vérifié la relation

$$BC^2=AB^2+AC^2 \quad (1).$$

Sur la perpendiculaire à (AC) passant par A, on construit le point B' tel que $AB'=AB$, comme sur la figure ci-dessous. Il faut montrer que $\widehat{BAC}=90°$.



Comme le triangle $AB'C$ est rectangle en A, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$B'C^2=AB'^2+AC^2$$

Or, $AB'=AB$, donc :

$$B'C^2=AB^2+AC^2 \ (2)$$

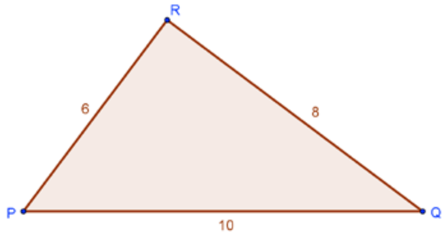
En comparant (1) et (2) il vient :

$$B'C^2=BC^2\text{, donc } B'C=BC.$$

Ainsi C est équidistant de B et de B', il appartient donc à la médiatrice de $[BB']$. Il en est de même du point A, puisque $AB=AB'$. Donc (CA) est la médiatrice de $[BB']$. Comme $(CA)\perp(BB')$ et $(CA)\perp(AB')$, les droites (AB') et (BB') sont confondues. Donc $\widehat{BAC}=90°$.

$\square$

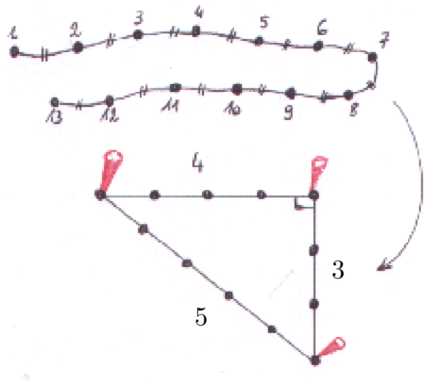
Exemple d'application. La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer qu'***un triangle est rectangle***. Soit par exemple le triangle PQR ci-contre dont les côtés mesurent respectivement 6, 8 et 10 cm. ***Est-ce un triangle rectangle ?*** Si c'est le cas, alors l'angle droit est nécessairement en R car $[PQ]$ est le côté le plus long, donc on devrait avoir : $RP^2 + RQ^2 = PQ^2$.



Or : $RP^2 + RQ^2 = 36 + 64 = 100$ et $PQ^2 = 10^2 = 100$. Comme $RP^2 + RQ^2 = PQ^2$, on peut conclure d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle PQR est rectangle en R.

Attention à ne pas confondre le théorème de Pythagore et sa réciproque !

Note historique. *Les Egyptiens savaient déjà qu'un triangle 3-4-5 est rectangle. Expliquez pourquoi il l'est !*



....

....

....

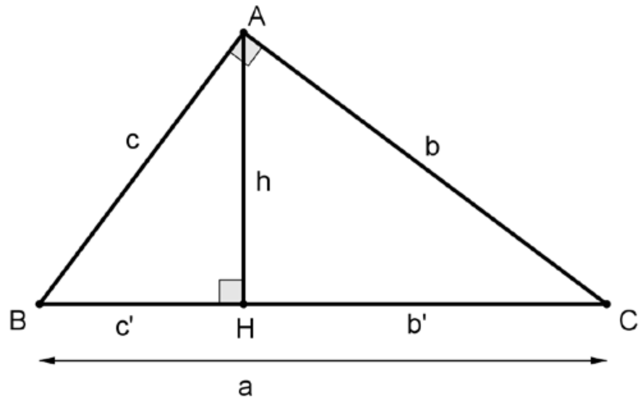
....

Ce triangle a donné lieu à l'invention de la ***corde à 13 nœuds****. Il s'agit tout simplement d'une corde sur laquelle on effectuait 13 nœuds consécutifs, régulièrement espacés, définissant ainsi 12 intervalles identiques dont la longueur était généralement une « coudée »[1]. La corde à 13 nœuds permet facilement de reconstituer le triangle 3-4-5 car* 3 + 4 + 5 = 12. *Les Egyptiens l'utilisaient entre autres pour construire des angles droits. Ils devaient en effet redéfinir leurs champs rectangulaires chaque année après la crue du Nil car les impôts dus par les paysans dépendaient de la surface cultivée. Plus tard, du Moyen-Âge à la Révolution française, les arpenteurs et bâtisseurs utilisaient eux aussi la corde à treize nœuds. Aujourd'hui même certains maçons se servent de cet instrument pour vérifier leurs angles droits. D'autres utilisent un triangle 6-8-10. A vous de savoir pourquoi…*

[1] La coudée mesure du coude à l'extrémité du médium. Une coudée mesurait en moyenne 52,36 cm.

3. Les relations métriques dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle ***rectangle*** en A et soit H le pied de la hauteur issue de A. Notons $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $h = AH$, $b' = CH$ et $c' = BH$, comme sur la figure ci-contre.



Avec ces notations on a les relations métriques suivantes :

a) ***Théorème de Pythagore*** : $a^2 = b^2 + c^2$

b) ***Théorème de la hauteur*** : $h^2 = b' \cdot c'$

c) ***Théorème de la double aire*** : $ah = bc$ ou encore : $h = \dfrac{bc}{a}$

d) ***Théorème d'Euclide*** : $b^2 = b' \cdot a$ et $c^2 = c' \cdot a$

Démonstration.

b) Théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H :

$$h^2 + b'^2 = b^2 \qquad (1)$$

Théorème de Pythagore dans le triangle AHB, rectangle en H :

$$h^2 + c'^2 = c^2 \qquad (2)$$

On additionne membre par membre (1) et (2) :

$$2h^2 + b'^2 + c'^2 = b^2 + c^2 \qquad (3)$$

Or, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en A :

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (4)$$

Remplaçons (4) dans (3) et remarquons que $a = b' + c'$:

$$\begin{aligned}
&2h^2 + b'^2 + c'^2 = b^2 + c^2 \\
\Leftrightarrow\ &2h^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 \\
\Leftrightarrow\ &2h^2 + b'^2 + c'^2 = (b' + c')^2 \\
\Leftrightarrow\ &2h^2 + \cancel{b'^2} + \cancel{c'^2} = \cancel{b'^2} + 2b'c' + \cancel{c'^2} \\
\Leftrightarrow\ &2h^2 = 2b'c' \\
\Leftrightarrow\ &h^2 = b'c'
\end{aligned}$$

c) En calculant l'aire du triangle ABC de deux façons, on obtient :

$$\frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}$$

En multipliant l'égalité par 2, on obtient dans les deux membres le ***double*** de l'aire du triangle ABC, c.-à-d. : $ah = bc$.

En divisant les deux membres par a, il vient finalement : $h = \dfrac{bc}{a}$.

d) Il suffit de démontrer l'une des deux relations, l'autre s'obtient exactement de la même façon. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle AHC, rectangle en H :

$$b^2 = h^2 + b'^2 \qquad (1)$$

D'après le théorème de la hauteur :

$$h^2 = b' \cdot c' \qquad (2)$$

Remplaçons (2) dans (1) :

$$b^2 = b'c' + b'^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 = b'(c' + b')$$
$$\Leftrightarrow b^2 = b' \cdot a$$

□