CHAPITRE I

ENSEMBLES

COURS

COURS

1) Ensembles – éléments

- ***Exemples***

L'*ensemble* des chiffres inférieurs ou égaux à 6 $=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

L'*ensemble* des nombres impairs plus petits que 14 $=\{1;3;5;7;9;11;13\}$

L'*ensemble* des voyelles minuscules de l'alphabet $=\{a;o;u;i;e;y\}$

L'*ensemble* des élèves de notre classe

L'*ensemble* des pays de l'Union Européenne

L'*ensemble* des points d'une droite

L'*ensemble* des triangles rectangles

L'*ensemble* des fractions dont le dénominateur vaut 3

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

L'*ensemble* des ……………………………………………………………………

- ***Définition***

Un ***ensemble*** est une collection d'objets clairement définis appelés ***éléments*** de cet ensemble.

Attention :

On ne peut pas dire par exemple : « l'ensemble des grands nombres » ou « l'ensemble des gens intelligents » etc car il n'est pas clair quels seraient les éléments de ces « ensembles » !

- ***Notations***

➢ Les ensembles sont notés par des lettres, le plus souvent majuscules : A, B, C, D, … Les éléments de l'ensemble sont alors *énumérés* entre **accolades { }** (énumérer = aufzählen).

Exemples :

$$A=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$$
$$B=\{1;3;5;7;9;11;13\}$$

On dit que ces ensembles sont définis ***par énumération*** ou ***en extension***.

- Quand le nombre des éléments d'un ensemble est très grand ou même infini (unendlich) on ne peut pas les énumérer tous. Pour définir un tel ensemble on donne une *propriété* de ses éléments qui permet de *comprendre* quels sont ces éléments : on dit alors que l'ensemble est ***défini en compréhension***.

  Exemples : $L = \{\text{voitures immatriculées au Luxembourg au 1.1.2016}\}$

  $$M = \{\text{entiers naturels inférieurs à 9000}\}$$

  $$E = \{\text{nombres décimaux compris entre 5 et 7}\}$$ [1]

  De manière *plus rigoureuse* on peut écrire aussi p. ex. :

  $$M = \{x \,/\, x \text{ est un entier naturel inférieur à 9000}\}$$

  et on lit : « *M est l'ensemble **des éléments x tel que** x est un nombre entier inférieur à 9000* ».

- Certains ensembles peuvent être définis par énumération et en compréhension.

  Exemples : $G = \{x \,/\, x \text{ est un nombre pair compris entre 8 et 17}\}$

  $$= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

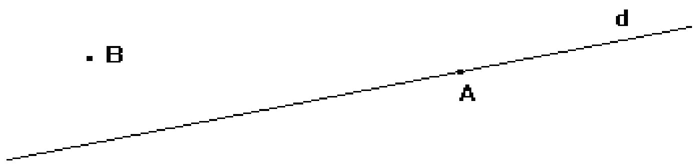
  $$K = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$$

  $$= \{x \,/\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Exercices 1, 2, 3

- ***Les symboles*** $\in$ ***et*** $\notin$

  - Nous avons déjà rencontré ces symboles en géométrie. Si on a par exemple :



  on écrit : $A \in d$ pour dire que le point *A* est sur la droite *d* et $B \notin d$ pour dire que le point *B* n'est pas sur la droite *d* !

  - De même on utilise ces symboles pour n'importe quel ensemble, par exemple si $E = \{5;\ 9;\ 12\}$ on écrit : $5 \in E$, $9 \in E$ et $12 \in E$, mais $8 \notin E$, $2{,}91 \notin \text{E}$, etc.

[1] « ***compris entre*** » veut dire en général que les <u>bornes sont incluses</u>, sinon on dit plutôt « ***compris strictement entre*** »

➢ ***Définition***

Pour tout ensemble E et tout élément x :

- si x est un élément de E, on écrit $x \in E$ et on *lit* : *« x **appartient** à E »*
- si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$ et on lit : *« x **n'appartient pas** à E »*)

Exercice 4

- ***Ensembles égaux***

Définition. Deux ensembles sont ***égaux*** s'ils ont les mêmes éléments.

Exemples : Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont égaux ? différents ?

$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

$B = \{1;\ 4;\ 5;\ 7\}$

$C = \{3;\ 1;\ 4;\ 2\}$

$D = \{4;\ 1;\ 4;\ 7;\ 5;\ 4;\ 7\}$

....

....

Exercice 5

- ***Ensemble vide***

Il existe un seul ensemble qui n'a aucun élément et qu'on appelle ***ensemble vide***. Il est noté $\varnothing$.

Exemple : $A = \{x\ /\ x \text{ est un élève de notre classe qui mesure plus de 3 m}\} = \varnothing$

Trouvez deux autres exemples d'ensemble vide :

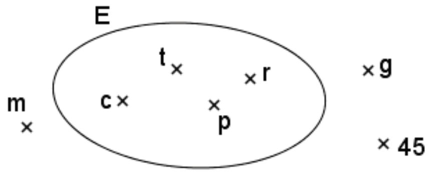
....

....

2) Diagrammes de Venn

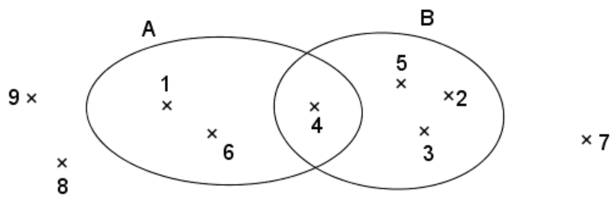
- Pour représenter **un** ensemble on dessine une *ligne fermée* appelée ***diagramme de Venn*** et on met les éléments de l'ensemble à l'intérieur de cette ligne, les autres à l'extérieur.

  Exemple : $E = \{c; t; r; p\}$



- Pour représenter **deux** ensembles sur un même diagramme de Venn, il faut prévoir un endroit pour les éléments qui appartiennent aux deux ensembles à la fois, pour les éléments qui n'appartiennent qu'à un seul des deux ensembles et pour ceux qui n'appartiennent à aucun des deux ensembles. Chaque élément ne doit en effet figurer qu'une seule fois sur un diagramme !

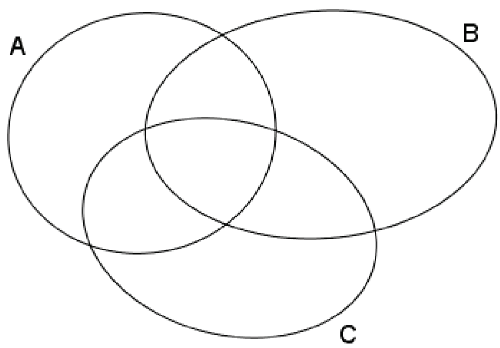
  Exemple : $A = \{1; 4; 6\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5\}$



- Pour représenter **trois** ensembles sur un même diagramme, on dessine un « diagramme en trèfle » qui permet de prévoir tous les cas : il y en a 8 en tout ! (essayez de les décrire…)

  Exemple : $A = \{1; 2; 5; 7; 9\}$, $B = \{4; 5; 6; 7; 9; 10\}$ et $C = \{1; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$

  Placez vous-mêmes les entiers de 0 à 12 sur le diagramme suivant :



Exercices 6, 7, 8

3) Sous-ensembles

- ***Exemple***

  Soient les ensembles $R = \{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$ et $S = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$.

  En comparant les éléments de ces deux ensembles, on constate que :

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  Dessinons un diagramme aussi simple que possible qui représente les deux ensembles, ***en tenant compte de la remarque que nous venons de faire*** !

- ***Définition***

  Si *tous* les éléments d'un ensemble E sont aussi des éléments d'un ensemble F, on dit que E est un ***sous-ensemble*** de F ou une ***partie*** de F ou encore que E est ***inclus*** dans F.

- ***Notation***

  Si E est un sous-ensemble de F on *écrit* : $E \subset F$ et on *lit : « E* ***est inclus dans*** *F ».*

  Si E n'est pas un sous-ensemble de F (c'est-à-dire si E a au moins un élément qui n'appartient pas à F), on *écrit* : $E \not\subset F$ et on *lit : « E* ***n'est pas inclus dans*** *F ».*

- L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\boxed{\varnothing \subset E}$

- Chaque ensemble est inclus dans lui-même : $\boxed{E \subset E}$

- ***Attention :***

  Les symboles $\in$ et $\notin$ *se trouvent entre un élément et un ensemble alors que les symboles* $\subset$ et $\not\subset$ *sont mis entre deux ensembles !*

Exercices 9 à 15

4) Ensembles de nombres

- Nous connaissons différentes *sortes* de nombres :
  - 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; … sont des nombres ***entiers naturels***
  - …. ;-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ….. sont des nombres ***entiers relatifs***
  - 5,79 ; 8,031 ; -4,6 ; …… sont des ***nombres décimaux***
  - $\frac{7}{3}$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{15}{5}$; ….. sont des ***nombres rationnels ou fractions***

- On définit alors les <u>ensembles de nombres</u> suivants :

  $\mathbb{N} = \{\text{nombres entiers naturels}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

  $\mathbb{Z} = \{\text{entiers relatifs}\} = \{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

  $\mathbb{D} = \{\text{nombres décimaux}\}$

  $\mathbb{Q} = \{\text{nombres rationnels}\}$

- Propriétés :
  - Tout entier naturel est aussi un entier relatif, donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
  - $5 = 5,0$ et $-7 = -7,0$ donc tout nombre entier relatif est aussi un nombre décimal, donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
  - $3,7 = \frac{37}{10}$; $23 = \frac{23}{1}$; $-2,54 = -\frac{254}{100}$ donc tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel, donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

  Donc : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}}$

  Dessinons ces quatre ensembles sur un même diagramme :

Exercices 16, 17, 18

5) Intersection, réunion et différence de deux ensembles

- **Exemple**

Représentez sur un même diagramme les deux ensembles :

$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ et $B = \{4;\ 5;\ 6;\ 7\}$

Placez sur ce diagramme les éléments 13 et 29,5.

On constate que sur ce diagramme il y a quatre sortes d'éléments, ceux qui appartiennent :

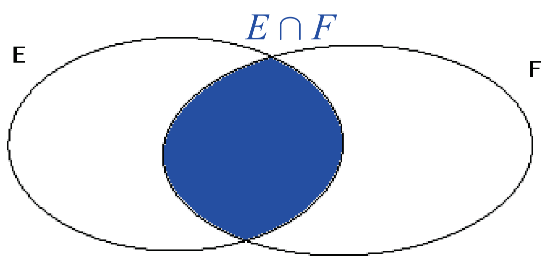
- à A ***et*** à B : ……………………….…………
- à A ***mais pas*** à B : ………..……………
- à B ***mais pas*** à A : ……..………………
- ***ni à*** A, ***ni à*** B : …………………………

Combien existe-t-il d'éléments qui n'appartiennent ni à A, ni à B ?……………….

Ici les éléments intéressants sont ceux qui appartiennent à A ***ou*** à B : ……………..

- **Intersection de deux ensembles**

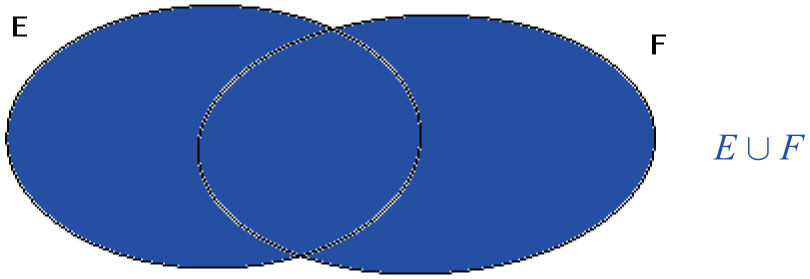
Définition. Soient deux ensembles E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ***et*** à F est appelé ***intersection*** de E et de F et est noté $E \cap F$. Ainsi : $E \cap F = \{x /\ x \in E \ et \ x \in F\}$



Pour notre exemple : $A \cap B = \{...............\}$

- **Réunion de deux ensembles**

Définition. Soient deux ensembles E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ***ou*** à F est appelé ***réunion*** de E et de F et est noté $E \cup F$. Ainsi : $E \cup F = \{x /\ x \in E \text{ ou } x \in F\}$

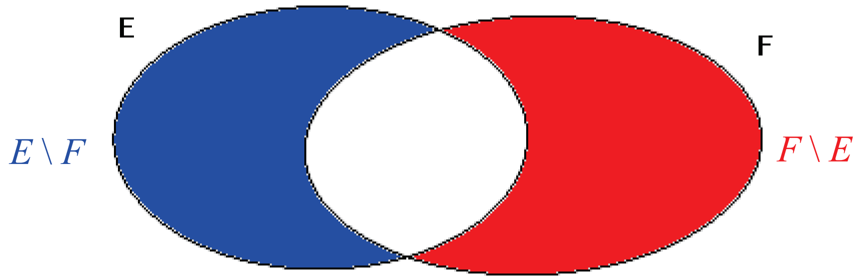


Pour notre exemple : $A \cup B = \{...\}$

- **Différence de deux ensembles**

Définition. Soient deux ensembles E et F, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ***et*** qui n'appartiennent pas à F est appelé ***différence*** de E et de F et est noté $E \setminus F$. Ainsi : $E \setminus F = \{x / x \in E \text{ et } x \notin F\}$

De même : $\boxed{F \setminus E = \{x / x \in F \text{ et } x \notin E\}}$



Propriété *:*

$E \setminus F$ et $F \setminus E$ n'ont aucun élément commun, donc $(E \setminus F) \cap (F \setminus E) = ...$

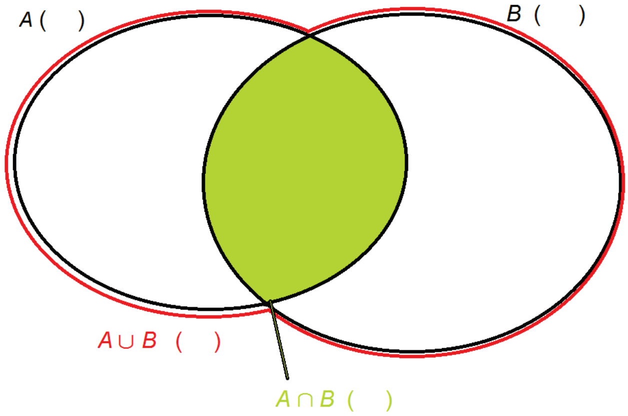
Pour notre exemple : $A \setminus B = \{...................\}$ et $B \setminus A = \{...................\}$

Exercices 19 à 33

6) Cardinal d'un ensemble

- ***Exemple*.**

Soit les ensembles $A=\{1;\ 2;\ 5;\ 8;\ 9;\ 12;\ 13\}$ et $B=\{2,3,4,5,8,10,11,17\}$. Complétez le diagramme de Venn ci-dessous avec les ensembles A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$. Ecrivez entre ( ) ***le nombre d'éléments*** de chaque ensemble :



- ***Définition***

> Le cardinal d'un ensemble ***fini*** A est le nombre d'éléments de cet ensemble. Il est noté $\text{card}\,A$ ou $|A|$.

Dans l'exemple ci-dessus :

$\text{card}\,A = \ldots\ldots$ $\text{card}\,B = \ldots\ldots$ $\text{card}(A \cap B) = \ldots\ldots$ $\text{card}(A \cup B) = \ldots\ldots$

- ***Formules (dans le cas d'ensembles finis)***

a) Exprimez $\text{card}(A \cup B)$ ***en fonction de*** $\text{card}\,A$, $\text{card}\,B$ et $\text{card}(A \cap B)$:

> $\text{card}(A \cup B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A quelle condition a-t-on : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B$?

> Si ……………… alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B$

b) Exprimez $\text{card}(A \setminus B)$ en fonction de $\text{card}\,A$ et $\text{card}(A \cap B)$:

> $\text{card}(A \setminus B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

A quelle condition a-t-on : $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}\,A - \text{card}\,B$?

> Si ……………… alors $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}\,A - \text{card}\,B$

Exercices 34 à 45