Les caractères de divisibilité

Notation : $\overline{abcd}$ est l'écriture décimale de l'entier naturel à 4 chiffres tel que :

- d est le chiffre des unités,
- c est le chiffre des dizaines,
- b est le chiffre des centaines,
- a est le chiffre des milliers.

Donc :

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

De manière analogue :

Un entier à 3 décimales s'écrit : $\overline{abc} = 100a + 10b + c$,

Un entier à 5 décimales s'écrit : $\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$,

etc.

Divisibilité par 2

Un entier naturel est divisible par 2 ssi son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$2 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 2 \mid d$$

Divisibilité par 3

Un entier naturel est divisible par 3 ssi **la somme de ses chiffres** est divisible par 3.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$3 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 3 \mid a + b + c + d$$

Démonstration (dans le cas d'un entier à 4 chiffres). L'idée consiste à décomposer l'entier $\overline{abcd}$ en deux termes dont le premier est divisible par 3.

$$\begin{aligned}
& 3 \mid 1000a + 100b + 10c + d \\
\Leftrightarrow\ & 3 \mid 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\
\Leftrightarrow\ & 3 \mid (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) \\
\Leftrightarrow\ & 3 \mid 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d)
\end{aligned}$$

Le premier terme dans cette somme est un multiple de 9, donc un multiple de 3. La somme est donc divisible par 3 si et seulement si le deuxième terme, c.-à-d. $a + b + c + d$, est divisible par 3.

Remarques. 1) La même démonstration fonctionne pour des entiers avec plus (ou moins) de chiffres. 2) Elle marche aussi pour étudier le caractère de divisibilité par 9 d'un entier.

Divisibilité par 4

Un entier naturel est divisible par 4 ssi le **nombre formé par les deux derniers chiffres** est divisible par 4.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$4 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{cd}$$

Démonstration (dans le cas d'un entier à 4 chiffres).

$$\begin{aligned}
&4 \mid \overline{abcd} \\
&\Leftrightarrow 4 \mid 1000a + 100b + 10c + d \\
&\Leftrightarrow 4 \mid 100(10a + b) + 10c + d \\
&\Leftrightarrow 4 \mid 10c + d
\end{aligned}$$

car $100(10a + b)$ est un multiple de 100, donc divisible par 4.

Divisibilité par 5

Un entier naturel est divisible par 5 ssi son **chiffre des unités** est 0 ou 5.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$5 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 5 \mid d$$

Divisibilité par 6

Un entier naturel est divisible par 6 ssi il est divisible par 2 et par 3.

Plus généralement :

Soit $d = ab$ un produit de deux entiers naturels a et b premiers entre eux.

Alors un entier naturel est divisible par d ssi il est divisible par a et par b.

Par exemple :

- Un entier naturel est divisible par 12 ssi il est divisible par 3 et par 4,
- Un entier naturel est divisible par 15 ssi il est divisible par 3 et par 5,
- Un entier naturel est divisible par 18 ssi il est divisible par 2 et par 9, etc.

Divisibilité par 7

Soit N un entier naturel, u son chiffre des unités et n l'entier obtenu en « amputant » N de u. (Par exemple, si $N = 1438$, $n = 143$ alors $u = 8$.) Alors N est divisible par 7 ssi $n - 2u$ est divisible par 7.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$7 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 7 \mid \left(\overline{abc} - 2 \cdot d\right)$$

En pratique, il faut appliquer cette règle plusieurs fois pour pouvoir conclure. Par exemple :

$$\begin{aligned}
&7 \mid 345876 \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 34587 - 2 \cdot 6 \Leftrightarrow 7 \mid 34575 \text{ (recommencer)} \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 3457 - 2 \cdot 5 \Leftrightarrow 7 \mid 3447 \text{ (recommencer)} \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 344 - 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 7 \mid 330 \text{ (recommencer)} \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 33 - 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 7 \mid 33
\end{aligned}$$

Or, 33 n'est pas divisible par 7, donc 345876 n'est pas divisible par 7.

Démonstration. Soit $N = u + 10n$. Donc u est le chiffre des unités de N et n est l'entier obtenu en amputant à N son dernier chiffre.

$$\begin{aligned}
7 \mid N &\Leftrightarrow 7 \mid 10n + u \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 2 \cdot (10n + u) \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 20n + 2u \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 21n - n + 2u \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 21n - (n - 2u)
\end{aligned}$$

Or, $21n$ est divisible par n, donc $7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid (n - 2u)$.

Remarque. Dans la démonstration nous avons utilisé le fait que $7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid 2N$. Ceci est évident si l'on pense aux factorisations premières de N et de $2N$: le facteur premier 7 apparaît soit dans les deux décompositions de N **et** de $2N$, soit dans **aucune** des deux décompositions.

Divisibilité par 8

Un entier naturel est divisible par 8 ssi le **nombre formé par les 3 derniers chiffres** est divisible par 8.

Démonstration (dans le cas d'un entier à 4 chiffres).

$$8 \mid \overline{abcd}$$
$$\Leftrightarrow 8 \mid 1000a + \overline{bcd}$$

car $1000a$ est un multiple de $1000 = 8 \cdot 125$, donc divisible par 8.

Divisibilité par 9

Un entier naturel est divisible par 9 ssi **la somme de ses chiffres** est divisible par 9.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$9 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 9 \mid a+b+c+d$$

Démonstration (dans le cas d'un entier à 4 chiffres). Il suffit de copier la démonstration du caractère de divisibilité par 3 :

$$\begin{aligned} & 9 \mid 1000a + 100b + 10c + d \\ \Leftrightarrow\ & 9 \mid 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\ \Leftrightarrow\ & 9 \mid (999a + 99b + 9c) + (a+b+c+d) \\ \Leftrightarrow\ & 9 \mid 9(111a + 11b + c) + (a+b+c+d) \end{aligned}$$

Le premier terme dans cette somme est un multiple de 9. La somme est donc divisible par 9 si et seulement si le deuxième terme, c.-à-d. $a+b+c+d$, est divisible par 9.

Divisibilité par 11

Un entier naturel est divisible par 11 ssi **la somme alternée de ses chiffres** est divisible par 11.

Définition. Ici on appelle **somme alternée** des chiffres d'un entier la somme de ses chiffres affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$.

Pour un entier à 4 chiffres par exemple, cette règle s'énonce de la manière suivante :

$$11 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 11 \mid a-b+c-d$$

Exemple.

$$\begin{aligned} 11 \mid 345895 & \Leftrightarrow 11 \mid 3-4+5-8+9-5 \\ & \Leftrightarrow 11 \mid 0, \text{ ce qui est vrai !} \end{aligned}$$

Démonstration (dans le cas d'un entier à 4 chiffres).

$$\begin{aligned}
&11 \mid 1000a + 100b + 10c + d \\
&\Leftrightarrow 11 \mid 1001a - a + 99b + b + 11c - c + d \\
&\Leftrightarrow 11 \mid (1001a + 99b + 11c) - (a - b + c - d) \\
&\Leftrightarrow 11 \mid 11(91a + 9b + c) - (a - b + c - d)
\end{aligned}$$

Le premier terme dans cette différence est un multiple de 11. La différence est donc divisible par 11 si et seulement si le deuxième terme, c.-à-d. $a - b + c - d$, est divisible par 11.

Divisibilité par 13

Soit N un entier naturel, u son chiffre des unités et n l'entier obtenu en « amputant » N de u. Alors N est divisible par 13 ssi $n + 4u$ est divisible par 13.

Pour un entier à 4 chiffres, on a donc :

$$13 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 13 \mid \left(\overline{abc} + 4 \cdot d\right)$$

En pratique, il faut appliquer cette règle plusieurs fois pour pouvoir conclure. Par exemple :

$$\begin{aligned}
&13 \mid 1573 \\
&\Leftrightarrow 13 \mid 157 + 4 \cdot 3 \Leftrightarrow 13 \mid 169 \text{ (recommencer)} \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 16 + 4 \cdot 9 \Leftrightarrow 13 \mid 52 \text{ (recommencer)} \\
&\Leftrightarrow 7 \mid 5 + 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 13 \mid 13 \text{ ce qui est vrai !}
\end{aligned}$$

Donc 1573 est divisible par 13.

Démonstration. Soit $N = 10n + u$. Donc u est le chiffre des unités de N et n est l'entier obtenu en amputant à N son dernier chiffre.

$$\begin{aligned}
13 \mid N &\Leftrightarrow 13 \mid 10n + u \\
&\Leftrightarrow 13 \mid 4 \cdot (10n + u) \\
&\Leftrightarrow 13 \mid 40n + 4u \\
&\Leftrightarrow 13 \mid 39n + (n + 4u)
\end{aligned}$$

$39n$ est divisible par 13. Donc la somme est divisible par 13 ssi $n + 4u$ l'est.

On peut s'inspirer des caractères de divisibilité par 7 et par 13 pour obtenir encore beaucoup d'autres caractères. Par exemple :

Divisibilité par 17 et par 19

Soit N un entier naturel, u son chiffre des unités et n l'entier obtenu en « amputant » N de u. Alors :

$$N \text{ est divisible par 17 ssi } n-5u \text{ est divisible par 17.}$$
$$N \text{ est divisible par 19 ssi } n+2u \text{ est divisible par 19.}$$

Démonstration : exercice !