Chapitre 6 : Calcul littéral

1. Propriétés de l'addition et de la soustraction

Définition. L'***addition*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***somme*** $a+b$. a et b sont les ***termes*** de cette somme.

Définition. La ***soustraction*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***différence*** $a-b$. a et b sont les ***termes*** de cette différence.

Remarques :

a) ***L'oppose*** de a est $-a$. Par exemple : l'opposé de 4 est –4, l'opposé de $-\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3}$.

b) La différence de a et de b est la somme de a et de ***l'opposé*** de b :

$$a-b=a+\left(-b\right)$$

c) L'opposé de $-b$ est $-\left(-b\right)=+b$, donc :

$$a-\left(-b\right)=a+b$$

d) Lorsqu'une somme comporte ***plusieurs termes*** précédés de + ou de –, on dit que c'est une ***somme algébrique***.

Exemples :

- $a+b-c$ est une somme algébrique de 3 termes et
- $-x+y+z-k$ est une somme algébrique de 4 termes.

L'addition est ***commutative*** :

C_+
$$a+b=b+a$$

La commutativité permet d'***échanger l'ordre des termes*** dans une somme.

Exemples.

- $x+2=2+x$
- $-7+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(-7\right)$

La soustraction ***n'est pas commutative*** :

$$a-b\neq b-a$$

Contre-exemple : $8-3=5$, mais $3-8=-5$.

En général : $a-b$ et $b-a$ sont ***opposés***. Donc :

$$b-a=-\left(a-b\right)$$

Exemples :

- $x-2=-\left(2-x\right)$
- $-\left(4-y\right)=y-4$

Plus généralement :

L'***opposé d'une somme*** est la ***somme des opposés*** de chacun de ses termes.

$$-\left(a+b+c\right)=-a-b-c$$
$$-\left(a-b+c\right)=-a+b-c$$
$$-\left(-a-b+c\right)=a+b-c$$

etc.

L'addition est ***associative*** :

A_+ $$\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)=a+b+c$$

On peut ***grouper les termes*** comme on veut dans le calcul d'une somme. Voilà pourquoi on peut laisser de côté les parenthèses lorsqu'on écrit des sommes.

Exemples.

- $\underbrace{\left(2+3\right)}_{5}+4=5+4=9$ et $=2+\underbrace{\left(3+4\right)}_{7}=2+7=9$.
- $x+\left(x+y\right)=\left(x+x\right)+y=2x+y$

La soustraction ***n'est pas associative*** :

$$\left(a-b\right)-c\neq a-\left(b-c\right)$$

Contre-exemple : $\left(18-2\right)-4=12$, mais $18-\left(2-4\right)=18-\left(-2\right)=20$.

En général :

$$\left(a-b\right)-c=a-b-c$$

Si les () sont précédés de + on peut laisser les () de côté !

$$a-\left(b-c\right)=a-b+c$$

Si les () sont précédés de − on peut les supprimer à condition de changer le signe de chaque terme entre ()

0 est l'***élément neutre*** de l'addition :

N_+ $$a+0=0+a=a$$

Exemple. $5+0=0+5=5$.

0 ***n'est pas élément neutre*** de la soustraction :

$$a-0=a \text{ mais } 0-a=-a$$

L'addition est ***symétrique*** : tout nombre a admet un et un seul opposé $-a$. C'est le nombre qui ajouté à a donne une somme égale à 0.

S_+ $$\forall a\,,\quad a+\left(-a\right)=-a+a=0$$

Exemples.

- L'opposé de -3 est $-\left(-3\right)=3$: $-3+3=0$
- L'opposé de $2x$ est $-2x$: $2x+\left(-2x\right)=0$

2. Propriétés de la multiplication et de la division

Définition. La ***multiplication*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***produit*** $a \cdot b = ab$. a et b sont les ***facteurs*** de cet produit.

Définition. La ***division*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b ($b \neq 0$) leur ***quotient*** $a:b=\frac{a}{b}$. a est le ***dividende*** et b le ***diviseur*** de ce quotient. Dans l'écriture fractionnaire a est le numérateur et b le dénominateur.

Remarques :

a) L'***inverse*** d'un nombre non nul a est $1:a=\dfrac{1}{a}$. L'inverse de $\dfrac{1}{a}$ est de nouveau a.

Exemples :

- L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.
- L'inverse de $0,2$ est 5
- L'inverse de $\frac{5}{7}$ est $\frac{7}{5}$.
- L'inverse de $-\frac{5}{7}$ est $-\frac{7}{5}$.

Un nombre et son inverse ont même signe !

b) Le quotient de a par b est le produit de a par ***l'inverse*** de b :

$$a:b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$$

Exemples.

- $3:4=\frac{3}{4}=3\cdot\frac{1}{4}=3\cdot 0,25$
- $7:x=7\cdot\frac{1}{x}=\frac{7}{x}$
- $\frac{5}{a}:\frac{3}{2}=\frac{5}{a}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3a}$

b) Lorsqu'une expression comporte ***plusieurs facteurs*** précédés de $\cdot$ ou de $:$ on dit encore que c'est un ***produit***. On préfère l'***écriture fractionnaire*** dans ce cas.

Exemples :

- $a\cdot b:c=\frac{ab}{c}$
- $x:y\cdot z:a=x\cdot\frac{1}{y}\cdot z\cdot\frac{1}{a}=\frac{xz}{ay}$
- $\frac{1}{a}\cdot b:c:d=\frac{b}{acd}$

Les facteurs précédés de $\cdot$ sont au ***numérateur***

Les facteurs précédés de $:$ sont au ***dénominateur***

La multiplication est ***commutative*** :

C. $$a\cdot b=b\cdot a$$

La commutativité permet d'***échanger l'ordre des facteurs*** dans un produit.

Exemples.

- $x\cdot 2=2\cdot x=2x$
- $y\cdot\left(-7\right)=-7y$

La division ***n'est pas commutative*** :

$$a:b\neq b:a$$

$$\frac{a}{b}\neq\frac{b}{a}$$

Contre-exemple : $\frac{8}{4}=2$, mais $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0,5$.

En général : $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont ***inverses***. Donc :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

La multiplication est ***associative*** :

A. $$\left(a\cdot b\right)\cdot c = a\cdot\left(b\cdot c\right) = a\cdot b\cdot c = abc$$

On peut ***grouper les facteurs*** comme on veut dans le calcul d'un produit. Voilà pourquoi on peut laisser de côté les parenthèses lorsqu'on écrit des produits.

Exemples.

- $\left(2\cdot 3\right)\cdot 4 = 6\cdot 4 = 24$ et $= 2\cdot\left(3\cdot 4\right) = 2\cdot 12 = 24$.
- $x\cdot\left(x\cdot y\right) = \left(x\cdot x\right)\cdot y = x^2 y$

La division ***n'est pas associative*** :

$$\left(a:b\right):c \neq a:\left(b:c\right)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

Contre-exemple : $\left(16:4\right):2 = 4:2 = 2$, mais $16:\left(4:2\right) = 16:2 = 8$.

En général :

$$\left(a:b\right):c = \frac{a}{b}:c = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$a:\left(b:c\right) = a:\frac{b}{c} = a\cdot\frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

1 est l'***élément neutre*** de la multiplication :

N. $$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$$

Exemples.

- $5\cdot 1 = 1\cdot 5 = 5$
- $1\cdot\left(a\cdot 1\cdot b\right) = ab$

1 ***n'est pas élément neutre*** de la division car :

$a:1 = a$ mais $1:a = \dfrac{1}{a}$ est l'inverse de a.

La multiplication est ***symétrique*** : tout nombre ***non nul*** a admet un et un seul inverse $\frac{1}{a}$. C'est le nombre qui multiplié par a donne un produit égal à 1.

S. $$\forall a \neq 0,\quad a\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a = 1$$

3. Opposés

a) ***Opposés*** d'une ***somme*** et d'une ***différence*** :

$$-\left(a+b\right)=-a-b$$
$$-\left(a-b\right)=-a+b$$

Le $-$ se ***distribue*** sur les 2 termes entre ()

b) ***Opposés*** d'un ***produit*** et d'un ***quotient*** :

$$-\left(a\cdot b\right)=\left(-a\right)\cdot b=a\cdot\left(-b\right)$$
$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Le $-$ se rapporte ***à un seul facteur*** !

Exemples :

- $-\left(2x+4y-5\right)=-2x-4y+5$
- $-\left(2ax\right)\cdot 6=-12ax$
- $-\left(a+b\right)\cdot\left(x-y\right)=\left(-a-b\right)\left(x-y\right)=\left(a+b\right)\cdot\left(y-x\right)$
- $\dfrac{x-1}{-2}=-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1-x}{2}$

4. Distributivité

a) ***Distributivité simple*** :

La ***multiplication*** est ***distributive*** par rapport à ***l'addition et la soustraction*** :

$D_{\cdot/+}$ $\quad a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c$

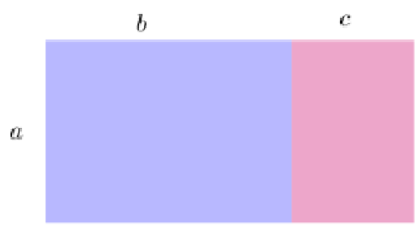
$D_{\cdot/-}$ $\quad a\cdot\left(b-c\right)=a\cdot b-a\cdot c$

Démonstration géométrique de la 1^re^ formule :

L'aire du grand rectangle est :

- d'une part : $a\left(b+c\right)$
- d'autre part : $ab+ac$

Donc : $a\left(b+c\right)=ab+ac$



Démonstration algébrique de la 2^e^ formule :

$$a\left(b-c\right)=a\left(b+\left(-c\right)\right)\underset{1^{\text{re}}\text{ formule}}{=}ab+a\left(-c\right)=ab-ac$$

Exemples :

- $4\left(a+b\right)=4a+4b$
- $\left(3x+8\right)\cdot x=3x\cdot x+8x=3x^2+8x$
- $-0,5\left(x-6y\right)=-0,5x+3y$
- $\left(-3x+6y\right)\cdot\left(-7\right)=21x-42y$
- $\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{7}{3}\right)=\frac{4x}{10}-\frac{28}{15}=\frac{2x}{5}-\frac{28}{15}$
- $6\cdot 107=6\cdot\left(100+7\right)=6\cdot 100+6\cdot 7=600+42=642$
- $999\cdot 17=\left(1000-1\right)\cdot 17=17'000-17=16'983$
- $15,8\cdot 7+4,2\cdot 7=\left(15,8+4,2\right)\cdot 7=20\cdot 7=140$

CALCUL MENTAL

b) ***Distributivité double*** :

$$\left(a+b\right)\left(c+d\right)=ac+ad+bc+bd$$

$$\left(a+b\right)\left(c-d\right)=ac-ad+bc-bd$$

$$\left(a-b\right)\left(c+d\right)=ac+ad-bc-bd$$

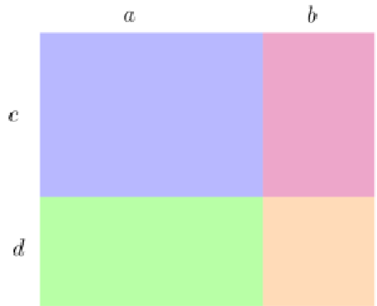
$$\left(a-b\right)\left(c-d\right)=ac-ad-bc+bd$$

Démonstration géométrique de la 1re formule :

L'aire du grand rectangle est :

- d'une part : $\left(a+b\right)\left(c+d\right)$
- d'autre part : $ac+ad+bc+bd$

Donc : $\left(a+b\right)\left(c+d\right)=ac+ad+bc+bd$



Démonstration algébrique de la dernière formule :

$$\begin{aligned}\left(a-b\right)\left(c-d\right)&=\left(a+\left(-b\right)\right)\left(c+\left(-d\right)\right)\\&=ac+a\left(-d\right)+\left(-b\right)c+\left(-b\right)\left(-d\right)\\&=ac-ad-bc+bc\end{aligned}$$

Exemples :

- $\left(4a+3b\right)\left(2a-b\right)=8a^2-4ab+6ab-3b^2=8a^2+2ab-3b^2$
- $\left(3x+8\right)\cdot\left(2x-1\right)=6x^2-3x+16x-8=6x^2+13x-8$

5. Réduire une expression littérale

Une expression littérale ou une somme algébrique peut comporter des ***termes semblables*** : ce sont des termes avec ***la même partie littérale***.

Exemples :

- $2x$, $-5x$ et $17x$ sont des termes semblables.
- $3ab$, $\frac{5}{6}ab$ et $7ab$ sont des termes semblables.
- $4x^2y$ et x^2y sont des termes semblables.

Mais :

- $3x$ et $5y$ ne sont pas des termes semblables.
- $6x^2$ et $-7x$ ne sont pas des termes semblables.
- x^2y et $8xy^2$ ne sont pas des termes semblables.

Réduire une somme algébrique, c'est l'écrire avec le moins de termes possible. Pour cela ***on additionne les termes semblables***.

Exemples :

- $2x-5x+17x \underset{D_{\cdot/+ \text{ et } -}}{=} \left(2-5+17\right)x = 14x$
- $3ab+\frac{5}{6}ab+7ab \underset{D_{\cdot/+ \text{ et } -}}{=} \left(3+\frac{5}{6}+7\right)ab = \frac{65}{6}ab$
- $4x^2y+x^2y = 5x^2y$
- $3x+9y+4+4x-6y = 7x+3y+4$

Ne mélangez pas :

$a+a=2a$	$a\cdot a=a^2$
$a+a+a=3a$	$a\cdot a\cdot a=a^3$
$a+a+a+a=4a$	$a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4$
etc.	

6. Développer ou effectuer une expression littérale

La distributivité permet de transformer un ***produit*** en une ***somme*** :

$$\underbrace{a\cdot\left(b+c\right)}_{\text{produit}} = \underbrace{a\cdot b+a\cdot c}_{\text{somme}}$$

On dit qu'on ***effectue*** ou ***développe*** le produit.

Définition. ***Développer*** ou ***effectuer*** une expression littérale, c'est transformer tous les produits de ( ) en des ***sommes algébriques***, puis ***réduire***.

Avant d'effectuer une expression, habituez-vous à ***souligner les termes !*** Les différents termes doivent être effectués ***d'abord***, car ce sont des ***produits*** (règles de priorité) !

Attention lorsqu'un terme est précédé du signe – !

Exemples :

- $\underbrace{3(a-8b)}_{1^{\text{er}}\text{ terme}}+\underbrace{5a(4+b)}_{2^{\text{e}}\text{ terme}}=3a-24b+20a+5ab=23a-24b+5ab$

- $\underbrace{(x+2)\cdot 4x}_{1^{\text{er}}\text{ terme}}-\underbrace{6x(x-1)}_{2^{\text{e}}\text{ terme}}=4x^2+8x-6x^2+6x=-2x^2+14x$

- $\underbrace{x\cdot 3x}_{1^{\text{er}}\text{ terme}}-\underbrace{(x-1)\cdot 2x}_{2^{\text{e}}\text{ terme}}-\underbrace{(7x+8)}_{3^{\text{e}}\text{ terme}}+\underbrace{5\cdot(3x+2)}_{4^{\text{e}}\text{ terme}}$
  $=3x^2-2x^2+2x-7x-8+15x+10$
  $=x^2+10x+2$

- $\underbrace{-2(x+4)\cdot(3x+1)}_{1^{\text{er}}\text{ terme}}$
  $=-2\underbrace{\left(3x^2+x+12x+4\right)}_{\text{réduire d'abord !!}}$
  $=-2\left(3x^2+13x+4\right)$
  $=-6x^2-26x-8$

- $\underbrace{(a-2b)\cdot(a-3b)}_{1^{\text{er}}\text{ terme}}-\underbrace{(2a+b)\cdot(5a+2b)}_{2^{\text{e}}\text{ terme}}$
  $=a^2-3ab-2ab+6b^2-\left(10a^2+4ab+5ab+2b^2\right)$
  $=a^2-5ab+6b^2-\left(10a^2+9ab+2b^2\right)$
  $=a^2-5ab+6b^2-10a^2-9ab-2b^2$
  $=-9a^2-14ab+4b^2$

Le 2e terme est précédé du signe –, on l'effectue d'abord entre (), puis on supprime les ().

7. Factoriser une expression littérale

La distributivité permet aussi de transformer une ***somme*** en un ***produit*** :

$$\underbrace{a \cdot b + a \cdot c}_{\text{somme}} = \underbrace{a \cdot \left(b + c\right)}_{\text{produit}}$$

On dit qu'on a ***mis le facteur commun*** a ***en évidence.*** Plus généralement :

> ***Définition.*** ***Factoriser*** une expression, c'est la transformer en un ***produit***.

Exemples de ***mises en évidence***:

- $5x + 5y = 5\left(x + y\right)$
- $-7a - 14b = -7a + \left(-7\right) \cdot 2 \cdot b = -7\left(a + 2b\right)$
- $36a - 60b = 12 \cdot 3 \cdot a - 12 \cdot 5 \cdot b = 12 \cdot \left(3a - 5b\right)$ $\qquad$ $\text{pgcd}(36, 60) = 12$
- $42x^2 - 77xy = 7 \cdot 6 \cdot x \cdot x - 7 \cdot 11 \cdot x \cdot y = 7x\left(6x - 11y\right)$
- $6 \cdot 2{,}7 + 4 \cdot 2{,}7 = \left(6 + 4\right) \cdot 2{,}7 = 10 \cdot 2{,}7 = 27$
- $4a\left(x + 1\right) - 5\left(x + 1\right) = \left(x + 1\right)\left(4a - 5\right)$

8. Produits / identités remarquables

a) ***Carré d'une somme*** :

$$\left(a + b\right)^2 = \underbrace{a^2 + \underbrace{2 \cdot a \cdot b}_{\text{double produit}} + b^2}_{\text{trinôme carré parfait}}$$

b) ***Carré d'une différence*** :

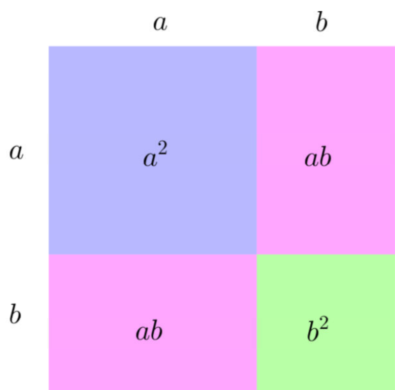
$$\left(a - b\right)^2 = \underbrace{a^2 - \underbrace{2 \cdot a \cdot b}_{\text{double produit}} + b^2}_{\text{trinôme carré parfait}}$$

c) ***Produit d'une somme par une différence*** :

$$\left(a + b\right) \cdot \left(a - b\right) = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{différence de deux carrés}}$$

Démonstration :

a) $$\begin{aligned} \left(a + b\right)^2 &= \left(a + b\right)\left(a + b\right) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$



b) $\left(a-b\right)^2 = \left(a-b\right)\left(a-b\right)$

$$= a^2 - ab - ba + b^2$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

c) $\left(a+b\right)\left(a-b\right) = a^2 \cancel{-ab} \cancel{+ba} - b^2$

$$= a^2 - b^2$$

Attention :

$$\left(a+b\right)^2 \neq a^2 + b^2$$
$$\left(a-b\right)^2 \neq a^2 - b^2$$

Donnez des ***contre-exemples*** numériques :

Exemples :

a) ***Effectuer*** :

- $\left(x+3\right)^2 = x^2 + 2\cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $\left(2a-7\right)^2 = \left(2a\right)^2 - 2\cdot 2a \cdot 7 + 7^2 = 4a^2 - 28a + 49$
- $96^2 = \left(100-4\right)^2 = 100^2 - 2\cdot 100 \cdot 4 + 4^2 = 10'000 - 800 + 16 = 9'216$
- $\left(5-8x\right)\left(5+8x\right) = 5^2 - \left(8x\right)^2 = 25 - 64x^2$
- $52\cdot 48 = \left(50-2\right)\left(50+2\right) = 50^2 - 2^2 = 2'500 - 4 = 2'496$

b) ***Factoriser*** :

- $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2\cdot 4 \cdot x + 4^2 = \left(x+4\right)^2$
- $9a^2 - 6ab + b^2 = \left(3a\right)^2 - 2\cdot 3a \cdot b + b^2 = \left(3a-b\right)^2$
- $13^2 + 26\cdot 17 + 17^2 = 13^2 + 2\cdot 13 \cdot 17 + 17^2 = \left(13+17\right)^2 = 30^2 = 900$
- $z^2 - 9k^2 = \left(z-3k\right)\left(z+3k\right)$
- $81a^4 - 36a^2 + 4 = \left(9a^2\right)^2 - 2\cdot 9a^2 \cdot 2 + 2^2 = \left(9a^2-2\right)^2$
- $804^2 - 796^2 = \left(804-796\right)\left(804+796\right) = 8\cdot 1'600 = 6'400$