Les puissances

1. Définition et exemples

Définition. Soit a un nombre quelconque et n un entier naturel. La n^e ***puissance*** de a, notée a^n (lire : a « exposant » n), est le produit de n facteurs égaux à a. Donc :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs } a}$$

Dans la notation a^n, a est appelée la base et n l'***exposant***.

Par convention : si $a \neq 0$ alors $a^0 = 1$, mais 0^0 n'existe pas.

Cas particuliers :

- $a^1 = a$,
- $a^2 = a \cdot a$ (lire : a « au carré »),
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (lire : a « au cube »).

Attention, ne mélangez pas :

- $a \cdot a = a^2$, mais $a + a = 2a$
- $a \cdot a \cdot a = a^3$, mais $a + a + a = 3a$
- $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$, mais $a + a + a + a = 4a$

Exemples :

a) Les ***puissances de 2*** :

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n							

Calculs :

$2^4 =$ .... ,

$2^5 =$ .... ,

$2^6 =$ ....

On remarque que : $2^6 = 2^5$........ et $2^4 = 2^5$........

En général :

$$a^n \cdot a = \ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad a^n : a = \frac{a^n}{a} = \ldots\ldots\ldots$$

b) Les ***puissances de 10*** :

n	0	1	2	3	4	5	6
10^n							

Retenons :

$10^6 =$ .... $10^{12} =$ ....

$10^9 =$ .... $10^{15} =$ ....

Exercice 1: Ecrire sous forme d'une puissance de 10 :

a) 100 millions = ...

b) 10 billions =...

c) 1/10 de milliard = ...

d) mille milliards = ...

e) 1 centième d'un billiard = ...

Exercice 2 : Compléter le tableau suivant des puissances de $\frac{1}{2}$:

n	0	1	2	3	4	5	6
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$							

Exercice 3 : Compléter le tableau suivant des puissances de 0,3 :

n	0	1	2	3	4	5	6
$0,3^n$							

Exercice 4

a) Sachant que $3^7 = 2187$, calculer 3^8, 3^9 et 3^6.

b)
- Sachant que $11^7 = 19'487'171$, calculer 11^8 et 11^9.
- Expliquer pourquoi $11^9 - 11^8 = 10 \cdot 11^8$.

c) Sachant que $2^{10} = 1024$, calculer 2^9, 2^{11} et 2^{15} et 2^{20}.

Exercice 5 : Calculer les ***nombres amusants*** suivants :

a) $8^1 + 9^2$

b) $1^1 + 3^2 + 5^3$

c) $12^2 + 33^2$

d) $2^5 \cdot 9^2$

e) $3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$
(nombre de Münchhausen)

f) $1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4$

g) $1^5 + 6^4 + 7^3 + 6^2$

h) $4^4 + 4^6 + 4^2 + 4^4$

i) $8^1 + 8^0 + 8^3 + 8^3$

j) $4^5 + 8^2 + 6^6 + 2^8 + 5^4$

k) $(8+1)^2$

l) $(5+1+2)^3$

m) $(4+9+1+3)^3$

2. Signe d'une puissance

a) Comparons dans un tableau **les puissances de 3 (1re ligne)**, les **opposés des puissances de 3 (2e ligne)** et **les puissances de -3 (3e ligne)** :

n	0	1	2	3	4	5	6
3^n							
-3^n							
$(-3)^n$							

Calculs :

$(-3)^4 =$ .... $-3^4 =$ ....

$(-3)^5 =$ .... $-3^5 =$ ....

$(-3)^6 =$ .... $-3^6 =$ ....

On remarque que :

- Si n est ***pair*** alors $(-3)^n =$ ...., donc $(-3)^n$ est ....
- Si n est ***impair*** alors $(-3)^n =$ ...., donc $(-3)^n$ est ....

En général on a ***les règles de signe*** suivantes ***:***

Soit a un ***nombre positif*** et n un ***entier naturel*** :

• Si n est ***pair*** alors $(-a)^n = a^n$ et donc $(-a)^n$...........

• Si n est ***impair*** alors $(-a)^n = -a^n$ et donc $(-a)^n$..........

• $-a^n$ est toujours ....

Attention, ne mélangez pas $(-a)^n$ et $-a^n$!!

Exercice 6

Prévoir le signe des nombres suivants, puis calculez-les :

a) -2^4

b) $\left(-2\right)^6$

c) -6^2

d) $-\left(-7\right)^3$

e) $\left(-4\right)^3$

f) $-\left(-5^2\right)$

g) $-\left(-3\right)^4$

h) $\left(-8\right)^3 : \left(-2\right)^4$

i) $\left(-10^3\right)^2$

j) $\left(-0{,}1^5\right)^0$

k) $-\left(-4^2\right)^2$

l) $(-3)^4 \cdot \left(-2^2\right)$

m) $-3^2 \cdot \left(-5\right)^2 \cdot \left(-4\right)^3$

Exercice 7

Calculer :

a) $\left(3^2-4^2\right)^2$

b) $\left(\dfrac{1}{2}-3\right)^3$

c) $-3^2-\left(-4\right)^2\cdot 2$

d) $\left(8^2-4^3\right)^3-7-\left(-1^2\right)^3$

e) $\dfrac{\left(-2\right)^2-3^2}{2^2-\left(-1\right)^3}$

f) $\left(-5\right)^3:\left(-25\right)^1-\dfrac{5}{2}$

g) $\left[\left(-1\right)^5+\dfrac{\left(-2\right)^3}{3}\right]^3$

h) $3-4^2:\left(\dfrac{7}{2}-4\right)^2$

i) $\dfrac{\left(-2\right)^3-3\cdot\left(-2\right)^5}{\left(3-5^2\right)^2}$

3. Formules

a) ***Puissance d'un produit***

Exemples :

- $\left(xy\right)^4=\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)\cdot\left(xy\right)=x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y=$ ....
- $\left(2a\right)^5=$ ....
- $a^3\cdot b^3=$ ....

En général :

$$\boxed{\left(ab\right)^n=a^n\cdot b^n}$$

b) ***Puissance d'un quotient***

Exemples :

- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}=$ ....
- $\left(\dfrac{2}{a}\right)^5=$ ....
- $\dfrac{12^4}{6^4}=$ ....

En général :

$$\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}}$$

c) ***Produit de puissances de même base***

Exemples :

- $2^6 \cdot 2^4 = \left(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot \left(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\right) =$ ....
- $x^3 \cdot x^5 =$ ....
- $a^5 \cdot a \cdot a^2 =$ ....

En général :

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

d) ***Quotient de puissances de même base***

Exemples :

- $2^7 : 2^4 = \dfrac{2^7}{2^4} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} =$ ....
- $x^3 : x^8 = \dfrac{x^3}{x^8} = \dfrac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} =$ ....
- $3^4 : 3^5 = \dfrac{3^4}{3^5} =$ ....

En général :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } n \geq m \text{ alors } \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ \text{Si } n < m \text{ alors } \dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^{m-n}} \end{array}}$$

c) ***Puissance d'une puissance***

Exemples :

- $\left(2^3\right)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 =$ ....
- $\left(x^3\right)^5 =$ ....
- $a^{24} = \left(a^3\right)^{\dots\dots} = \left(a^4\right)^{\dots\dots\dots}$

En général :

$$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}}$$

Remarques :

(1) Lorsque ni les exposants, ni les bases sont les mêmes, on doit faire attention dans les calculs !

Exemples :

- $2^4 \cdot 5^6 = ?$ (Remarquez qu'on ne peut ni utiliser la formule a) car les exposants sont différents, ni la formule c) car les bases sont aussi différentes.)

(2) Toutes les formules (sauf la dernière) contiennent le mot ***produit*** ou ***quotient***. Y a-t-il aussi des formules sur la ***somme*** et la ***différence*** de puissances ? Essayons :

a) $(3+4)^2 \stackrel{?}{=} 3^2 + 4^2$

Contrôle :

b) $9^2 - 4^2 \stackrel{?}{=} \left(9-4\right)^2$

Contrôle :

c) $(4+6)^3 \stackrel{?}{=} 4^3 + 6^3$

Contrôle :

d) $4^3 - 1^3 \stackrel{?}{=} (4-1)^3$

Contrôle :

Retenons qu' en général :

$$\boxed{\left(a+b\right)^n \neq a^n + b^n \text{ et } \left(a-b\right)^n \neq a^n - b^n}$$

Exercice 8

Ecrire ***plus simplement*** en utilisant les formules ci-dessus :

a) $5^2 \cdot 5^7$

b) $(3x)^4$

c) $7^8 \cdot 3^8$

d) $\dfrac{4^9}{4^7}$

e) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^4$

f) $x^4 \cdot x^9$

g) $-7^3 \cdot (-7)^6$

h) $(6^3)^8$

i) $\dfrac{k^6}{k^{12}}$

j) $(ab)^4 \cdot (ab)^5 \cdot a^3$

k) $6^{30} \cdot 2^{30} \cdot 5^{30}$

l) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6 \cdot 3^7$

m) $5^n \cdot 5^m \cdot 5^2$

n) $(-3)^5 : 3^7 \cdot (-3)^8$

o) $\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot \left(\dfrac{2}{7}\right)^{12}$

p) $2^a \cdot 2^{3a} \cdot 2^{5a}$

q) $(5^r)^3 \cdot (5^4)^{2r}$

r) $\dfrac{7^{3x}}{7^{2x}}$

s) $\dfrac{8^{3+x}}{8^{5+x}}$

t) $2^6 \cdot (-2)^{2015} \cdot 2^0$

u) $\dfrac{(-3)^2}{(-3)^7}$

v) $6^4 \cdot (6^2)^3$

w) $4^9 \cdot 2^7$

x) $8^3 \cdot 4^5$

y) $\dfrac{125^7}{(-25)^{10}}$

z) $10^{25} : 25^{10} : 2^{25}$

Exercice 9

(1) ***Compléter*** et donner des exemples : si $a < b$ alors $-a \ ...... -b$.

(2) Soit a et b deux nombres strictement positifs. Sous quelle condition a-t-on :

a) $a \cdot b = a$? b) $a \cdot b < a$? c) $a \cdot b > a$

(3) ***Comparer*** ($<$, $>$, ou $=$) en justifiant les réponses !

a) 6^5 et 7^5

b) 2^{10} et 2^8

c) $0,4^2$ et $0,4^3$

d) $0,5^2$ et $0,4^2$

e) $0,8^3$ et $0,7^3$

f) -5^4 et -5^7

g) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^8$ et $\left(\dfrac{3}{4}\right)^6$

h) -25^3 et -10^3

i) $(-12)^2$ et $(-13)^2$

j) $(-30)^{30}$ et $(-31)^{31}$

k) 5^6 et 25^4

l) 8^5 et 2^{15}

m) $(-49)^3$ et $(-7)^6$

n) $15 \cdot 2^8$ et 2^{12}

o) $6 \cdot 10^{14}$ et $0,6 \cdot 10^{15}$

p) $25^8 : 5^7$ et 125^3

q) $2^7 \cdot 5^8$ et $2^9 \cdot 5^7$

r) 6^6 et $2^5 \cdot 3^7$

(4) ***Compléter*** :

- si $0 \le a < b$ et $n \in \mathbb{N}$ alors : $a^n \ .... \ b^n$
- si $a > 1$ et $0 \le m < n$ alors : $a^m \ .... \ a^n$
- si $a < 1$ et $0 \le m < n$ alors : $a^m \ .... \ a^n$

4. Notation scientifique d'un grand nombre

Dans les sciences, on rencontre souvent de ***très grands nombres***. Par exemple :

a) La vitesse de la lumière c est à peu près égale à $c = 300'000'000$ m/s.

b) La masse du Soleil m_S vaut environ : 1'988'400'000'000'000'000'000'000'000'000 kg.

Pour ***simplifier*** l'écriture des grands nombres, les mathématiciens utilisent les puissances de 10. Par exemple les nombres ci-dessus peuvent s'écrire respectivement $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s et $m_S = 1{,}9884 \cdot 10^{30}$ kg.

La ***notation scientifique*** d'un « grand » nombre est de la forme $\pm a \cdot 10^{n}$, avec :

- $\pm$ le signe du nombre
- a un nombre décimal ayant exactement 1 chiffre ***à gauche de la virgule***, c.-à-d. $a \in [1,10[$; a est appelé la ***mantisse***
- n un ***exposant*** naturel (pour les grands nombres)

La notation scientifique présente ***3 avantages*** :

a) c'est une écriture ***très condensée*** d'un grand nombre ;

b) elle permet de saisir immédiatement ***l'ordre de grandeur*** d'un grand nombre ;

c) elle permet de faciliter la ***comparaison*** des grands nombres.

Exercice 10

Combien de sabords (fenêtres situées sur le flanc d'un navire et servant d'ouverture pour les canons) y a-t-il dans chacune des deux insultes du capitaine Haddock ? Ecrire les réponses en notation scientifique.

Exercice 11

Ecrire en ***notation scientifique*** :

a)	4 millions	d)	16 billions
b)	35 milliards	e)	400 millions de milliards
c)	700 mille	f)	17'500'000'000'000

g) $-1'286'000'000$

h) $600'000 \cdot 120'000$

i) $30'000'000'000'000 : (25 \cdot 10^{9})$

j) $1'400'000^{2}$

k) $0,0004 \cdot 10^{16}$

l) $(4 \cdot 10^{6})^{2} : 1'000'000$

m) $300'000'000'000 + 2 \cdot 10^{10}$

n) $2 \cdot 10^{8} : 0,0005$

o) $5 \cdot 10^{6} + 8 \cdot 10^{4}$

p) $19 \cdot 10^{6} - 25 \cdot 10^{5}$

q) $5 \cdot 10^{15} + 3 \cdot 10^{17}$

r) $5 \cdot 10^{40} - 10^{39}$

s) $17 \cdot 10^{22} - 4 \cdot 10^{19}$

t) $300'000'000'000 + 2 \cdot 10^{10}$

Exercice 12

Comparer les nombres suivants :

a) $6,4 \cdot 10^{29}$ et $8 \cdot 10^{29}$

b) $15 \cdot 10^{23}$ et $8 \cdot 10^{23}$

c) $4,7 \cdot 10^{14}$ et $2 \cdot 10^{18}$

d) $12 \cdot 10^{15}$ et $150 \cdot 10^{13}$

e) $-3 \cdot 10^{14}$ et $-4 \cdot 10^{14}$

f) $-7 \cdot 10^{25}$ et $-90 \cdot 10^{24}$

g) $750 \cdot 10^{18}$ et 6'000 milliards

h) $5 \cdot 10^{30}$ et $4 \cdot 10^{31}$

i) $0,001 \cdot 10^{37}$ et $0,012 \cdot 10^{36}$