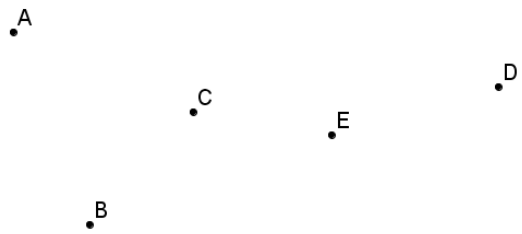
Géométrie plane

1. Points, segments, droites, demi-droites

Définition. L'espace de travail de la géométrie plane est le ***plan***, noté Π. Il peut être visualisé comme une feuille d'***épaisseur nulle*** qui s'étend à l'infini dans toutes les directions. Ses éléments sont appelés ***points***.

Définition. Un ***point*** est le plus petit élément du plan. Il n'a aucune dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou aire. Sa seule caractéristique est sa ***position***.

Exemples.



Remarques.

- Un point est représenté par l'un des symboles • ou ×.
- Il est nommé par une lettre majuscule, telle que A, B, C …
- Deux points ***distincts*** d'une figure portent des noms différents.

Il faut bien distinguer entre la notion de ***point*** (élément) et celle d'***ensemble de points*** (ensemble).

Définition. Un ensemble de points est une ***collection*** de points.

Notation et cas particuliers :

- $\{A,B,C\}$ est l'ensemble des trois points A, B et C.
- Π est l'ensemble de tous les points du plan. On dit que c'est un ***ensemble infini***, car il contient une infinité d'éléments.
- Un ***singleton*** est un ensemble avec un seul élément. Par exemple $\{D\}$ est l'ensemble contenant uniquement le point D.
- Une ***paire*** est un ensemble avec deux éléments. Par exemple $\{C,B\}$ est l'ensemble contenant les points C et B.

- L'***ensemble vide*** est un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\{\ \}$ ou $\varnothing$.

Attention : Dans un ensemble, l'ordre des éléments ne joue pas de rôle.

Exemples :

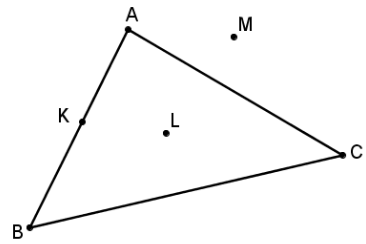
- $\{C,B\} = \{B,C\}$;
- $\{A,B,C\} = \{B,A,C\}$;

Remarque. Toutes les ***figures*** du plan, comme par exemple les triangles ou les quadrilatères, les polygones,... sont en fait des ***ensembles de points***.

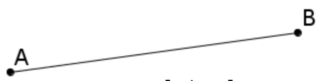
Notation. Lorsqu'un point A est un élément d'un ensemble $\mathcal{F}$, on écrit $A \in \mathcal{F}$ et on lit : « A ***appartient à*** $\mathcal{F}$ ».

Exemples. Sur la figure ci-contre :

- $A \in \{A,B,C\}$, $B \in \{A,B,C\}$ mais $K \notin \{A,B,C\}$.
- $A \in \triangle ABC$ et $K \in \triangle ABC$, mais $L \notin \triangle ABC$ et $M \notin \triangle ABC$;



Définition. Etant donnés deux points A et B, le ***segment*** $[AB]$ d'***extrémités*** A et B est l'ensemble des points qu'on obtient en parcourant dans le plan Π le ***plus court chemin*** entre A et B.



$[AB]$

Les deux extrémités A et B ***appartiennent*** au segment $[AB]$, c.-à-d. :

$$A \in [AB] \text{ et } B \in [AB].$$

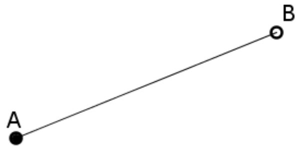
Remarques.

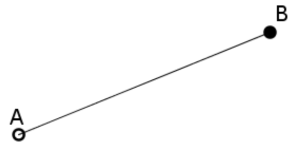
- Le ***segment ouvert*** $]AB[$ est le segment (fermé) $[AB]$, ***privé de ses extrémités.*** On écrit : $]AB[= [AB] \setminus \{A,B\}$.

$]AB[$

- Si l'on enlève une seule extrémité à un segment on obtient un ***segment semi-ouvert*** (ou ***semi-fermé***). Par exemple :

$$[AB[\, = [AB] \setminus \{B\} \qquad \text{et} \qquad]AB] = [AB] \setminus \{A\}.$$



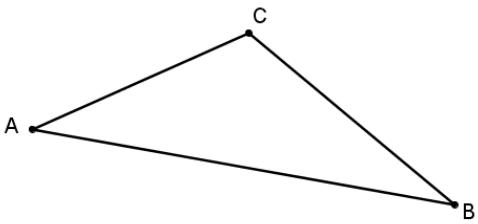


Notation. La ***longueur*** du segment $[AB]$ est notée AB. C'est la ***distance*** du point A au point B, dans une unité de longueur fixée au préalable.[1]

Propriétés.

- $AB = BA$;
- $AB = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- ***Inégalité triangulaire*** :

Quels que soient les points A, B et C : $AB \leq AC + CB$.

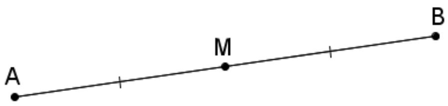


Si $C \notin [AB]$ alors $AB < AC + CB$

Si $C \in [AB]$ alors $AB = AC + CB$

Définition. Le ***milieu*** du segment $[AB]$, noté $\mathrm{mil}[AB]$, est le point qui appartient à ce segment et qui est situé à égale distance de ses extrémités.

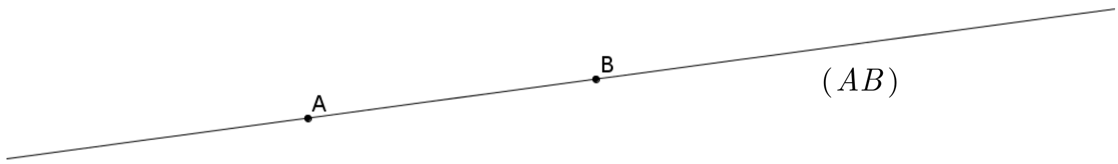
En abrégé : $M = \mathrm{mil}[AB] \Leftrightarrow \begin{cases} M \in [AB] \\ MA = MB \end{cases}$



Pour coder que $AM = MB$, on marque les segments correspondants par de petits traits identiques, comme sur la figure ci-dessus.

[1] Au sujet des distances, voir également le manuel de géométrie, p. 94 – 95 !

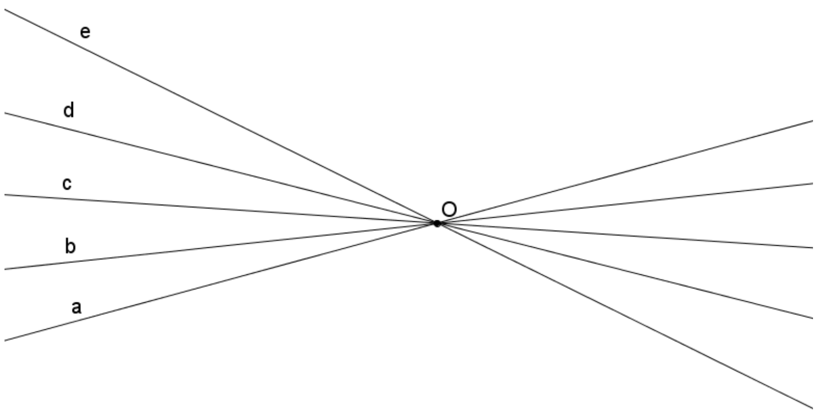
Définition. Etant donnés deux points A et B, la ***droite*** (AB) est l'ensemble de points qu'on obtient en prolongeant le segment $[AB]$ avec une règle au-delà de ses deux extrémités, indéfiniment.



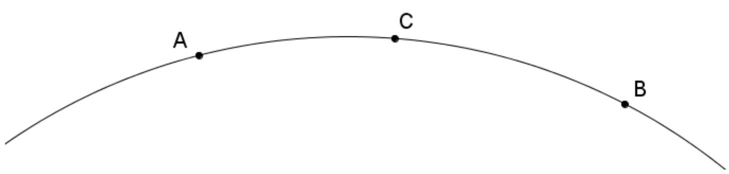
Propriété. Par deux points ***distincts*** passe ***une et une seule*** droite.[2]

Remarques.

- Une droite peut être nommée par une lettre minuscule, telle que a, b, c, …
- Par ***un*** point donné passent une infinité de droites.



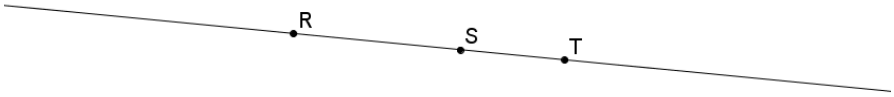
- Par trois points donnés ou plus ne passe pas nécessairement une droite.



La ***courbe*** passant par les points A, B et C ***n'est pas une droite*** !

[2] Cette propriété est un ***axiome***, postulé par ***Euclide*** (géomètre grec de l'Antiquité, ≈ 325–265 av. J.-C.) dans ses *Eléments*. Un axiome est une propriété considérée comme vraie, mais qu'on ne peut pas prouver. La géométrie d'après Euclide repose sur 5 axiomes. Tous les théorèmes d'une théorie mathématique peuvent être démontrés à partir des axiomes. Bien sûr, les axiomes doivent être cohérents, c.-à-d. non contradictoires.

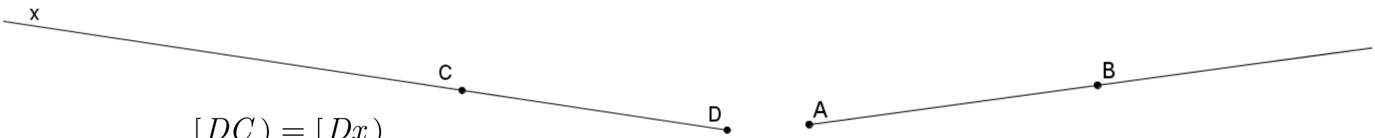
Définition. Des points sont dits ***alignés*** lorsqu'ils appartiennent à la même droite.



Exemple. Les points R, S et T ci-dessus sont alignés. Donc :

$$(RS) = (RT) = (ST).$$

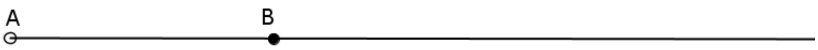
Définition. Etant donnés deux points A et B, la ***demi-droite*** $[AB)$ est l'ensemble des points qu'on obtient en prolongeant le segment $[AB]$ avec une règle au-delà du point B, indéfiniment.



$[DC) = [Dx)$ $\qquad$ $[AB)$

Remarques.

- A est appelé ***origine*** de la demi-droite $[AB)$.
- On note aussi $[Dx)$ la demi-droite d'origine D et de direction x.
- On peut priver une demi-droite (fermée) de son origine. On obtient alors une demi-droite ouverte. Par exemple : $]AB) = [AB) \setminus \{A\}$.



Notation. Lorsque ***tous*** les points d'un ensemble $\mathcal{F}$ sont éléments d'un ensemble $\mathcal{G}$, on écrit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et on lit : « $\mathcal{F}$ ***est inclus dans*** $\mathcal{G}$ » ou « $\mathcal{F}$ ***est une partie de*** $\mathcal{G}$ » ou encore « $\mathcal{F}$ ***est un sous-ensemble de*** $\mathcal{G}$ ».

Exemples :

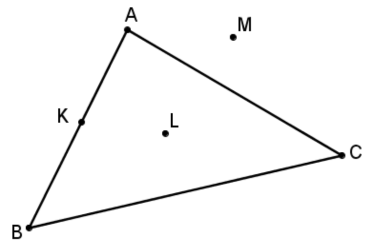
- $[AB] \subset (AB)$;
- $\{A,B\} \subset [AB]$;
- $[AB) \subset (AB)$;

mais :

- $[AB) \not\subset [AB]$;
- $\Pi \not\subset (AB)$;

Attention. Le symbole $\in$ est toujours utilisé entre un ***élément et un ensemble*** (auquel il appartient), le symbole $\subset$ peut uniquement être utilisé ***entre deux ensembles*** (lorsque l'un est contenu dans l'autre).

Exemples. Sur la figure ci-contre :

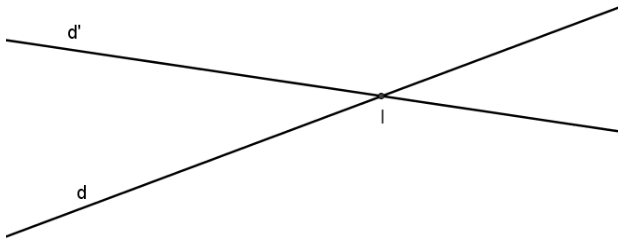


- $[AB] \subset \triangle ABC$, mais $(AB) \not\subset \triangle ABC$
- $A \in \triangle ABC$, $B \in \triangle ABC$, $C \in \triangle ABC$ et $K \in \triangle ABC$, donc $\{A,B,C,K\} \subset \triangle ABC$
- $L \notin \triangle ABC$, donc $\{A,B,C,L\} \not\subset \triangle ABC$

2. Droites sécantes et parallèles. Droites perpendiculaires

Etudions les ***positions relatives*** de deux droites :

a) On dit que deux droites d et d' sont ***sécantes*** si elles ont ***exactement un point commun***, appelé leur ***point d'intersection***.



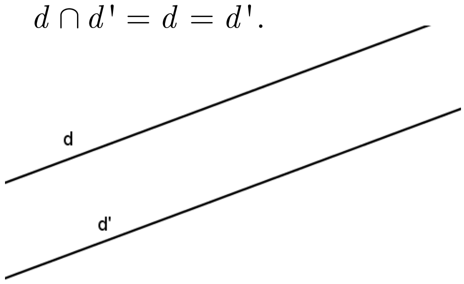
d et d' sont sécantes en I

$d \cap d' = \{I\}$.[3]

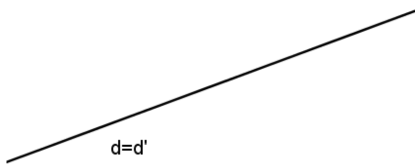
b) On dit que deux droites d et d' sont ***parallèles*** et on note $d \parallel d'$ si elles ne sont pas sécantes.

Deux cas sont possibles :

- Les deux droites n'ont aucun point commun c.-à-d. $d \cap d' = \varnothing$. On dit alors qu'elles sont ***strictement parallèles***.
- Les deux droites sont ***confondues***, c.-à-d. $d = d'$. Dans ce cas $d \cap d' = d = d'$.



droites strictement parallèles



droites confondues

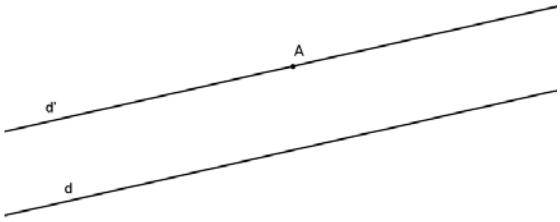
---

[3] L'***intersection*** de deux ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, noté $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, est l'ensemble des éléments ***communs*** à $\mathcal{F}$ ***et*** $\mathcal{G}$.

La ***réunion*** de deux ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, noté $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, est l'ensemble des éléments appartenant à $\mathcal{F}$ ***ou*** $\mathcal{G}$. P. ex : $\triangle ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$.

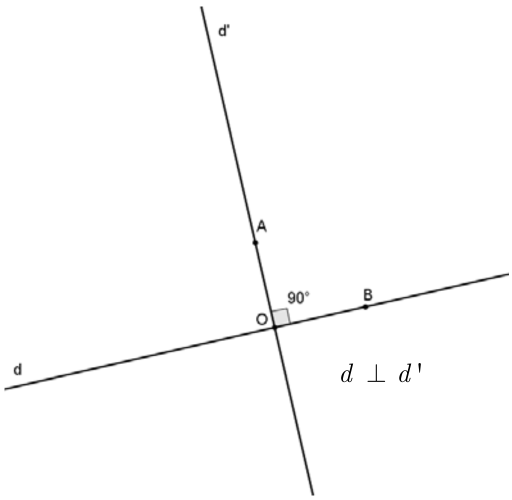
Voici le plus célèbre des axiomes d'Euclide :

Axiome d'Euclide. Par un point donné, on peut mener ***une et une seule droite parallèle*** à droite donnée.



d' est ***la parallèle*** à d passant par A. ***Toutes les autres droites*** passant par A sont ***sécantes*** avec d !

Définition. On dit que deux droites d et d' sont ***perpendiculaires*** et on note $d \perp d'$ si elles se coupent en formant un ***angle droit***.



Par un point donné, on peut mener ***une et une seule droite perpendiculaire*** à droite donnée. Sur la figure ci-contre, d' est ***la perpendiculaire*** à d passant par A.

Propriétés.

(1) Si $d \parallel d'$ et $d' \parallel d''$ alors $d \parallel d''$.

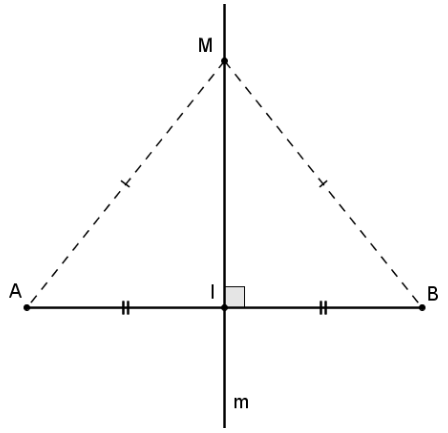
(2) Si $d \parallel d'$ et $d' \perp d''$ alors $d \perp d''$.

(3) Si $d \perp d'$ et $d' \perp d''$ alors $d \parallel d''$.

Figures en exercice.

3. Médiatrice d'un segment

Définition. La ***médiatrice d'un segment*** est la droite passant par le ***milieu*** de ce segment et ***perpendiculaire*** à ce segment.



m est la médiatrice du segment $[AB]$.

Propriété caractéristique [4]. La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble (ou le ***lieu***) des points du plan Π qui sont ***équidistants*** [5] des points A et B.

Remarque. Cette propriété nous enseigne donc à la fois que :

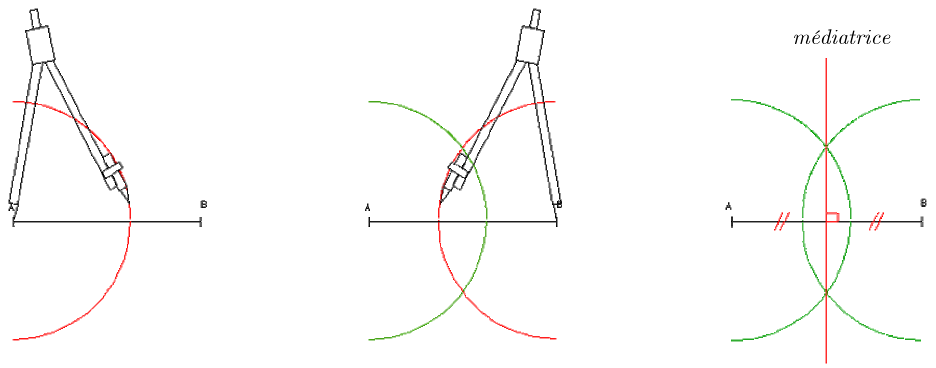
- ***Tous les points*** de la médiatrice de $[AB]$ sont équidistants de A et de B.
- ***Aucun autre point*** du plan Π n'est équidistant de A et de B.

En abrégé :

$$\boxed{\text{médiatrice de } [AB] = \{M \in \Pi \,/\, MA = MB\}}$$

Notons finalement que le milieu du segment $[AB]$ appartient aussi à la .médiatrice du segment $[AB]$.

Construction à la règle non graduée et au compas :



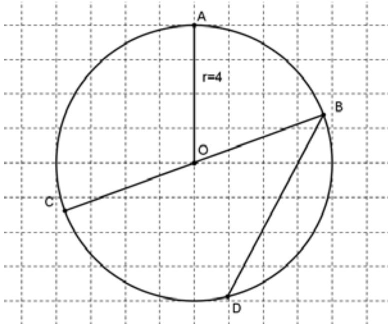
1re étape *2e étape* *3e étape*

[4] une propriété qui définit entièrement un objet

[5] à même distance

4. Cercles. Tangentes

Définition. Soit O un point du plan et r un nombre positif. Le ***cercle*** de ***centre*** O et de ***rayon*** r est l'ensemble des points du plan Π situés à la distance r de O. Il est noté $\mathcal{C}(O,r)$.
En abrégé : $\mathcal{C}(O,r) = \{M \in \Pi \,/\, OM = r\}$



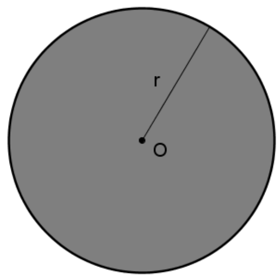
Exemple. Ci-contre est représenté le cercle $\mathcal{C}(O,4)$. Les points A, B, C et D appartiennent à ce cercle, mais le centre O n'est pas sur le cercle. Donc :

- $\{A,B,C,D\} \subset \mathcal{C}(O,4)$;
- $O \notin \mathcal{C}(O,4)$.

Remarques.

- Le mot ***rayon*** désigne aussi un ***segment*** ayant pour extrémités le centre du cercle et un point du cercle. ***Exemples*** : $[OA]$, $[OB]$.
- Un segment dont les ***deux extrémités*** appartiennent au cercle est appelé une ***corde***. ***Exemple*** : $[BC]$ et $[BD]$ sont des cordes du cercle $\mathcal{C}(O,4)$. ***Attention*** : seules les extrémités de la corde appartiennent au cercle, c.-à-d. $\{B,D\} \subset \mathcal{C}(O,4)$, mais $[BD] \not\subset \mathcal{C}(O,4)$.
- Un ***diamètre*** du cercle est une corde passant par son centre. ***Exemple*** : $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}(O,4)$. $[BD]$ n'est pas un diamètre du cercle $\mathcal{C}(O,4)$.
- Le mot ***diamètre*** désigne aussi la longueur d'un diamètre, c.-à-d. le double du rayon : $\textit{diamètre} = 2 \cdot \textit{rayon}$.

Définition. Soit O un point du plan et r un nombre positif. Le ***disque*** de ***centre*** O et de ***rayon*** r est l'ensemble des points du plan Π situés à une distance ***inférieure ou égale*** à r de O. Il est noté $\mathcal{D}(O,r)$.
En abrégé : $\mathcal{D}(O,r) = \{M \in \Pi \,/\, OM \leq r\}$



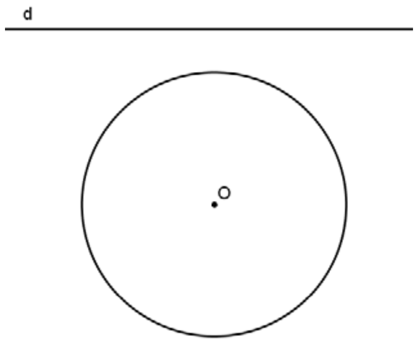
Le disque $\mathcal{D}(O,r)$ contient donc son bord, le cercle $\mathcal{C}(O,r)$ ainsi que tous les points à l'intérieur de ce cercle.

$$\mathcal{C}(O,r) \subset \mathcal{D}(O,r).$$

Positions relatives d'une droite et d'un cercle

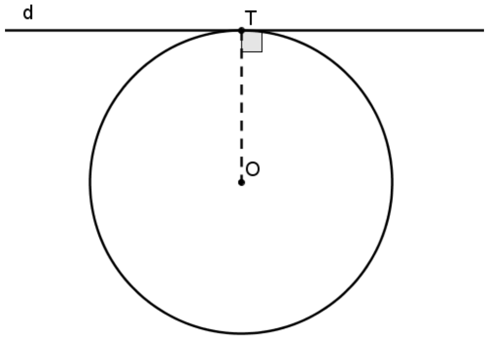
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et d une droite du plan.

a)



- d ne coupe pas le cercle $\mathcal{C}$.
- d et $\mathcal{C}$ sont ***disjoints***, c.-à-d. d'intersection vide.
- $d \cap \mathcal{C} = \varnothing$

b)

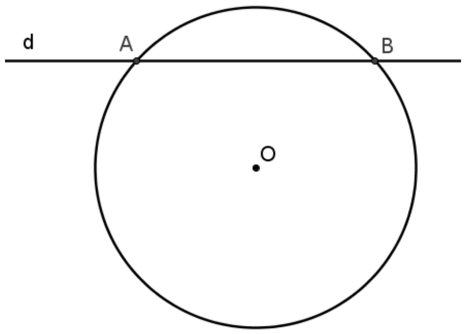


- d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un seul point T.
- d est ***tangente*** à $\mathcal{C}$ au point T.
- $d \cap \mathcal{C} = \{T\}$

Définition. Une ***tangente*** à un cercle est une droite qui a ***un seul point commun*** avec un cercle. Ce point commun est appelé ***point de contact*** ou ***point de tangence***.

Propriété. Si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, la tangente à $\mathcal{C}$ en T est ***perpendiculaire*** au rayon $[OT]$.

c)



- d coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B.
- d et $\mathcal{C}$ sont ***sécants***.
- $d \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$

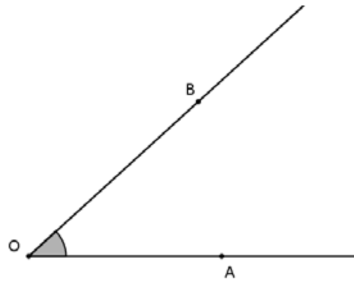
Positions relatives de deux cercles : Voir manuel page 97.

5. Angles

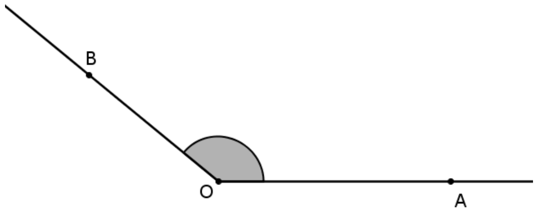
Voir manuel p. 34 – 37.

Retenir la différence entre angle ***saillant*** et angle ***rentrant*** :

Un angle ***saillant*** est un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 180°.

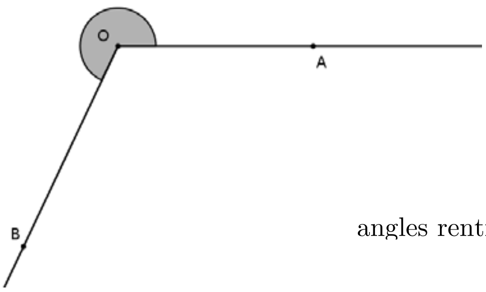


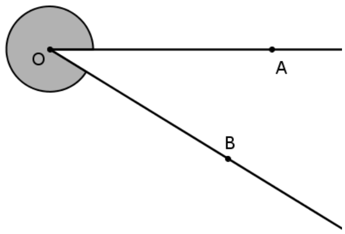
angle saillant aigu



angle saillant obtus

Un angle ***rentrant*** est un angle dont la mesure est comprise entre 180° et 360°.





angles rentrants

Pour éviter toute confusion, les notations $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$ désigneront toujours l'***angle saillant*** de sommet O et de côtés $[OA)$ et $[OB)$.

6. Triangles et droites remarquables

Voir manuel p. 18 – 19, p. 78 – 81 et p. 110 – 111.

7. Quadrilatères et polygones

Voir manuel p. 136 – 139.

8. Aires et volumes

Voir manuel p. 50 – 51.