Les 4 opérations

1. Addition et soustraction

Définition. L'***addition*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***somme*** $a+b$. a et b sont appelés les ***termes*** de cette somme.

Exemple : La somme de 5 et de 6 est $5+6=11$. 5 et 6 sont les termes de cette somme.

Propriétés de l'addition

Commutativité (C_+) : $a+b=b+a$
L'addition est une opération ***commutative*** : on peut ***changer l'ordre des termes*** dans le calcul d'une somme.

Exemples :

- $5+4=4+5=9$
- $x+3=3+x$

Associativité (A_+) : $a+(b+c)=(a+b)+c$
L'addition est une opération ***associative*** : on peut ***grouper les termes*** comme on veut dans le calcul d'une somme. Lorsqu'on écrit une somme de plusieurs termes, il est donc superflu de mettre des parenthèses :

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

Exemples :

- $5+(14+6)=5+20=25$ et $(5+14)+6=19+6=25$
- $(x+3)+4=x+(3+4)=x+7$

On peut ***combiner*** ces deux propriétés pour faciliter les calculs, c.-à-d. pour calculer ***astucieusement*** une somme :

Exemples :

- $18{,}4+13+1{,}6+47=(18{,}4+1{,}6)+(13+47)=20+60=80$
- $a+34+b+10=(a+b)+(34+10)=a+b+44$
- On raconte que le grand mathématicien C. F. Gauss, à 7 ans (ou 10 ans, selon les auteurs), a calculé la somme des nombres de 1 à 100 très rapidement, à la grande surprise de son professeur. Son astuce consistait bien sûr à utiliser la commutativité et l'associativité de l'addition :

$$1+2+3+...+98+99+100$$
$$=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(49+52)+(50+51)$$
$$=101+101+101+101+101+...+101+101 \quad \text{(50 termes)}$$
$$=50\cdot 101=5050$$

Elément neutre (N_+) : $a+0=0+a=a$
0 est appelé élément neutre de l'addition.

Exemples :

- $5+0=0+5=5$
- $a+0+x=a+x$

Définition. La ***soustraction*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***différence*** $a-b$. a et b sont appelés les ***termes*** de cette différence.

Exemple : La différence de 53 et de 18 est $53-18=35$. 53 et 18 sont les termes de cette différence.

Attention, les propriétés de l'addition ne valent pas pour la soustraction :

La soustraction n'est pas commutative, car par exemple :
$$6-2=4 \text{ mais } 2-6\neq 4.$$

Nous verrons bientôt que $2-6=-4$. C'est un nombre négatif.

La soustraction n'est pas associative, car par exemple :
$$11-(5-2)=11-3=8 \text{ mais } (11-5)-2=6-2=4.$$

2. Suites d'additions et de soustractions

Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut :

(1) effectuer les calculs ***dans l'ordre de lecture.***

Exemples :

- $24+11-12+13-15$
  $=35-12+13-15$
  $=23+13-15$
  $=36-15=21$

Il faut ***copier*** également les termes qu'on n'a pas encore additionnés !

(2) ***changer l'ordre des termes*** à condition de déplacer également l'opération (+ ou −) qui ***précède*** chaque terme.

Exemples :

- $315 + 97 - 15 = 315 - 15 + 97 = 300 + 97 = 397$
- $48 + 63 + 42 = 63 + 48 + 42 = 63 + 90 = 153$
- $50 - 64 + 38 = 50 + 38 - 64 = 88 - 64 = 24$
- $35 + 16 - 33 - 12$
  $= 35 - 33 + 16 - 12$
  $= 2 + 16 - 12$
  $= 18 - 12$
  $= 6$

Dans ce chapitre, le premier terme a toujours le signe +.

(3) ***grouper les termes*** (les mettre entre parenthèses) en respectant les ***règles*** suivantes :

$+a + b = +(a + b)$	$-a - b = -(a + b)$
$+a - b = +(a - b)$	$-a + b = -(a - b)$

En d'autres termes, si le premier terme du groupe

- est précédé de +, les termes entre () gardent leur signe.
- est précédé de −, les termes entre () changent de signe.

Exemples :

- $12 - 15 + 38 - 25$
  $= 12 + 38 - 15 - 25$ (on a changé l'ordre des termes)
  $= (12 + 38) - (15 + 25)$ (on a groupé les termes)
  $= 50 - 40$
  $= 10$
- $1043 - 267 + 250$
  $= 1043 - (267 - 250)$
  $= 1043 - 17$
  $= 1026$

Ces règles permettent évidemment de calculer une expressions de maintes façons. Efforcez-vous dès à présent de chercher le calcul le plus astucieux. Contrôlez éventuellement vos résultats en calculant les expressions de plusieurs manières.

Exemple :

$100-14-13-12+34$
$=100-13-12+34-14$
$=100-(13+12)+(34-14)$
$=100-25+20$
$=100+20-25$
$=95$

ou

$100-14-13-12+34$
$=100+34-(14+13+12)$
$=134-39$
$=95$

Dans le calcul suivant l'élève a commis une ***faute classique***. Cherchez l'erreur !

$60-14-11$
$=60-3$
$=57$

(Le résultat correct est 35 !)

3. Multiplication et division

Définition. La ***multiplication*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***produit*** $a \cdot b$. a et b sont appelés les ***facteurs*** de ce ***produit***.

Exemple : Le produit de 9 par 3 est $9 \cdot 3 = 27$. 9 et 3 sont les facteurs de cet produit. (On n'utilisera plus la notation $9 \times 3 = 27$.)

Lorsqu'un produit contient des ***lettres*** (qui représentent des nombres), on laisse souvent de côté le symbole opératoire « $\cdot$ ». Par exemple : $ab = a \cdot b$, $3x = 3 \cdot x$, mais on n'écrit pas $x3$ au lieu de $x \cdot 3$, $6ay = 6 \cdot a \cdot y$, mais bien sûr $45 \neq 4 \cdot 5$. On préfère l'écriture $3x$ à $x \cdot 3$, c.-à-d. on écrit plutôt les facteurs numériques en premier lieu, puis les facteurs littéraux.

Propriétés de la multiplication

Commutativité $(C.)$: $a \cdot b = b \cdot a$
La multiplication est une opération ***commutative*** : on peut ***changer l'ordre des facteurs*** dans le calcul d'un produit.

Exemples :

- $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5 = 20$
- $x \cdot 3 = 3 \cdot x$

Associativité $(A.)$: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

La multiplication est une opération ***associative*** : on peut ***grouper les facteurs*** comme on veut dans le calcul d'un produit. Lorsqu'on écrit un produit de plusieurs facteurs, il est donc superflu de mettre des parenthèses :

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c = abc$$

Exemples :

- $5 \cdot (4 \cdot 6) = 5 \cdot 24 = 120$ et $(5 \cdot 4) \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120$
- $(x \cdot 3) \cdot 4 = x \cdot (3 \cdot 4) = x \cdot 7 = 7x$

On peut ***combiner*** ces deux propriétés pour faciliter les calculs ou pour calculer ***astucieusement*** un produit :

Exemples :

- $25 \cdot 13 \cdot 4 = 13 \cdot 25 \cdot 4 = 13 \cdot 100 = 1300$
- $0{,}2 \cdot 18 \cdot 8 \cdot 500 \cdot 1{,}25 = 18 \cdot (0{,}2 \cdot 500) \cdot (8 \cdot 1{,}25) = 18 \cdot 100 \cdot 10 = 18'000$

Pour arriver à grouper astucieusement les facteurs, on retiendra par cœur les produits suivants :

$$\boxed{2 \cdot 5 = 10 \qquad 4 \cdot 25 = 100 \qquad 8 \cdot 125 = 1000}$$

Des résultats semblables sont obtenus en jouant avec la virgule :

$2 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 \cdot 5 = 1$ $\qquad$ $8 \cdot 12{,}5 = 100$

$4 \cdot 2{,}5 = 0{,}4 \cdot 25 = 10$ $\qquad$ $8 \cdot 1{,}25 = 10$

etc.

Elément neutre $(N.)$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

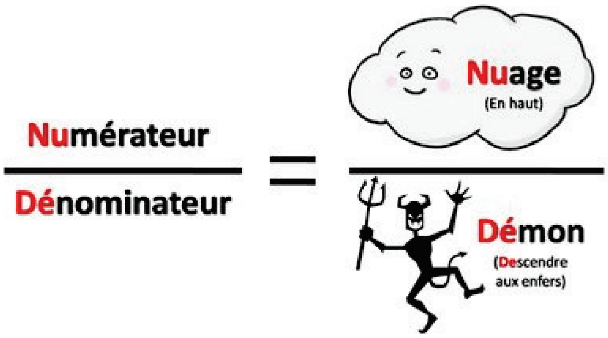
1 est l'élément neutre de la multiplication.

Exemples :

- $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$
- $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

Définition. La ***division*** est l'opération qui fait correspondre à deux nombres a et b leur ***quotient*** $a : b$ ou $\frac{a}{b}$. a est appelé le ***dividende*** et b le ***diviseur*** de ce quotient.

Exemple : La quotient de 15 par 3 est $15 : 3 = \frac{15}{3} = 5$. 15 est le dividende et 3 est le diviseur de cette division. Dans le cas de la ***fraction*** $\frac{15}{3}$, 15 est appelé le ***numérateur*** (Zähler) et 3 est appelé le ***dénominateur***. Voici un petit truc mnémotechnique pour ne pas mélanger les deux.



Remarque. Lorsqu'on écrit une division sous forme de fraction, on peut éventuellement ***simplifier*** cette fraction, c.-à-d. ***diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul*** :

Exemple :

$$42 : 35 = \frac{42}{35} = \frac{\cancel{7} \cdot 6}{\cancel{7} \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1{,}2\,.\ \text{(On a simplifié la fraction par 7.)}$$

Attention, les propriétés de la multiplication ne valent pas pour la division :

> ***La division n'est pas commutative***, car par exemple :
> $$10 : 2 = 5 \ \text{ mais } \ 2 : 10 = 0{,}2 \neq 5\,.$$
> ***La division n'est pas associative***, car par exemple :
> $$50 : (10 : 2) = 50 : 5 = 10 \ \text{ mais } \ (50 : 10) : 2 = 5 : 2 = 2{,}5 \neq 10\,.$$

Remarques :

(1) Lorsqu'on effectue une division :

a) soit la division ***se termine***, par exemple : $38,7 : 6 = 6,45$

b) soit la division ***ne se termine pas***, par exemple : $38,7 : 11 = 3,518181818...$

Lorsque la division ne se termine pas, on donne généralement une ***valeur approchée*** (ou ***arrondie***) du résultat : Par exemple :

- valeur arrondie ***à l'unité*** : $38,7 : 11 \simeq 4$
- valeur arrondie ***au dixième*** : $38,7 : 11 \simeq 3,5$
- valeur arrondie ***au centième*** : $38,7 : 11 \simeq 3,52$
- valeur arrondie ***au millième*** : $38,7 : 11 \simeq 3,518$

(2) ***Division euclidienne*** : voir manuel « Nombres » p. 36.

4. Suites de multiplications et de divisions

Dans une suite de multiplications et de divisions, on peut :

(1) effectuer les calculs ***dans l'ordre de lecture***.

Exemple :

$$24 : 3 \cdot 7 : 4 \cdot 5 = 8 \cdot 7 : 4 \cdot 5 = 56 : 4 \cdot 5 = 14 \cdot 5 = 70$$

(2) ***changer l'ordre des dividendes et diviseurs*** à condition de déplacer également l'opération ($\cdot$ ou :) qui ***précède*** chacun.

Exemples :

- $1 : 7 \cdot 21 = 1 \cdot 21 : 7 = 21 : 7 = 3$
- $50 : 300 : 10 \cdot 12 = 50 : 10 \cdot 12 : 300 = 5 \cdot 12 : 300 = 60 : 300 = 0{,}2$

(4) ***grouper les facteurs*** (les mettre entre parenthèses) en respectant les ***règles*** suivantes :

$\cdot\ a \cdot b = \cdot(a \cdot b)$	$:\ a \cdot b = :(a : b)$
$\cdot\ a : b = \cdot(a : b)$	$:\ a : b = :(a \cdot b)$

Exemples :

- $150 : 2 : 50 = 150 : (2 \cdot 50) = 150 : 100 = 1{,}5$
- $12 : 32 : 3 \cdot 16 = 12 : 3 : 32 \cdot 16 = (12 : 3) : (32 : 16) = 4 : 2 = 2$

Tout cela est compliqué ! La meilleure méthode consiste à ***transformer une suite de multiplications et divisions en une fraction*** (en utilisant la règle : $a : b = :(a \cdot b)$), puis de ***simplifier*** la fraction.

Exemples :

- $40 \cdot 12 : 5 : 6 = \dfrac{\overset{8}{\cancel{40}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}}} = \dfrac{8 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 16$
- $14 : 21 \cdot 15 : 20 \cdot 9 : 24 = \dfrac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{14}} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{21}} \cdot \underset{4}{\cancel{20}} \cdot \underset{\underset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{24}}} = \dfrac{3}{16} = 0{,}1875$

5. Puissances

Exemples :

- $a^2 = a \cdot a\,,$ a^2 se lit « a ***au carré*** » ou « a ***exposant*** 2 ».
- $a^3 = a \cdot a \cdot a\,,$ a^3 se lit « a ***au cube*** » ou « a ***exposant*** 3 ».
- $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a\,,$ a^4 est la 4^e puissance de a et se lit « a ***exposant*** 4 ».

En général :

Définition.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

est appelé la n^{e} ***puissance*** du nombre a. a^n se lit « a ***exposant*** n ». a est appelé la ***base*** et n est appelé l'***exposant*** dans a^n.

Cas particuliers :

$a^1 = a$ et $a^0 = 1$, mais 0^0 n'existe pas.

Exemples :

- $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$;
- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$;
- $31^0 = 1$;
- $1{,}5^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$;
- $d^4 = d \cdot d \cdot d \cdot d$;
- $6^1 = 6$;
- $10^8 = 100'000'000$;
- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$;
- $11^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$;
- $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a = a^3 \cdot b^2$.

6. Règles de priorités et analyse d'expressions

Lorsqu'une expression contient plusieurs opérations, il faut savoir par où commencer à calculer. En d'autres termes, on doit fixer des ***règles de priorité***. Les voici :

Dans une suite d'opérations, on effectue
(1) d'abord les calculs entre parenthèses (),
(2) puis les puissances,
(3) puis les multiplications et les divisions,
(4) et enfin les additions et soustractions

Exemples.

- $(12+8) \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 100$;
- $12 + 8 \cdot 5 = 12 + 40 = 52$;
- $42 - \frac{18}{6} = 42 - 18 : 6 = 42 - 3 = 39$;
- $\frac{42-18}{6} = (42-18) : 6 = 24 : 6 = 4$;
- $3 \cdot 4 + 10 : 2 - 1 = 12 + 5 - 1 = 17 - 1 = 16$;
- $3 \cdot (4+10) : 2 - 1 = 3 \cdot 14 : 2 - 1 = 21 - 1 = 20$;
- $3 \cdot [(4+10) : 2 - 1] = 3 \cdot (14 : 2 - 1) = 3 \cdot (7-1) = 3 \cdot 6 = 18$;

Attention : Les barres de fraction cachent des parenthèses !!!

- $5 \cdot (3+8)^2 = 5 \cdot 11^2 = 5 \cdot 121 = 605$.

On déduit des règles de priorité l'***analyse d'expressions*** :

- $a \cdot b + c$ est une ***somme***, car le produit $a \cdot b$ doit être calculé en premier lieu. La ***dernière opération à effectuer*** est une addition.
- De même : $3x + 5y - 2z$ est une ***somme*** de 3 termes. (On parle toujours de somme, même si l'expression est une suite d'additions et de soustractions.)
- $a \cdot (b + c)$ est un ***produit***, car la somme entre () doit être calculée en premier lieu. La ***dernière opération à effectuer*** est une multiplication.
- $(a+b)^2$ est un produit de deux facteurs, les deux facteurs sont égaux à $a + b$, qui se trouve entre () et doit être calculé en premier lieu.
- $\frac{3}{a+x} = 3 : (a + x)$ est un quotient, car la somme au dénominateur doit être calculée en premier lieu. La ***dernière opération à effectuer*** est donc la division.

> ***Analyser*** une expression, c'est déterminer s'il s'agit d'une ***somme***, d'une ***différence***, d'un ***produit*** ou d'un ***quotient***. Il est ***très important*** d'analyser les expressions avant de les calculer ou de les simplifier, ***même si le professeur ne vous le demande pas explicitement*** !

7. Distributivité

La distributivité est une propriété qui fait intervenir la multiplication ***et*** l'addition (ou la soustraction).

> ***Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*** $(D_{\cdot/+})$:
> $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

> ***Distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction*** $(D_{\cdot/-})$:
> $$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c\,.$$

La propriété tient son nom du fait que le facteur a se ***distribue*** sur les termes b et c entre parenthèses. La distributivité permet de ***transformer un produit en une somme***. On dit qu'on ***effectue*** ou ***développe*** le produit.

Exemples.

- $4 \cdot (5 + a) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot a = 20 + 4a$;
- $(x - 3) \cdot 2 = x \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2x - 6$;
- $x \cdot (2 + a - x) = x \cdot 2 + x \cdot a - x \cdot x = 2x + ax - x^2$

Grâce à la distributivité ***on peut calculer astucieusement*** certains produits :

- $7 \cdot 81 = 7 \cdot (80 + 1) = 7 \cdot 80 + 7 \cdot 1 = 560 + 7 = 567$;
- $4 \cdot 98 = 4 \cdot (100 - 2) = 4 \cdot 100 - 4 \cdot 2 = 400 - 8 = 392$;
- $97 \cdot 99 = 97 \cdot (100 - 1) = 97 \cdot 100 - 97 = 9700 - 97 = 9603$.

Lorsqu'on utilise la distributivité dans l'autre sens, on ***transforme une somme en un produit*** :

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

On dit qu' on ***factorise la somme*** et plus précisément, qu'***on met le facteur commun*** a ***en évidence***.

Exemples :

- $3 \cdot x + 3 \cdot y = 3 \cdot (x + y)$;
- $14 \cdot a + 21 \cdot b = 7 \cdot 2a + 7 \cdot 3b = 7 \cdot (2a + 3b)$;
- $x^2 - 5x = x \cdot x - x \cdot 5 = x \cdot (x - 5)$;
- $2a + 7a = a \cdot (2 + 7) = 9a$;
- $7x - 3x + 15x = x \cdot (7 - 3 + 15) = 19x$.

C'est la distributivité (mise en évidence) qui permet d'écrire que :

- $a + a = 2a$;
- $a + a + a = 3a$;
- $a + a + a + a = 4a$;
- $a + a + a + a + a = 5a$;

etc.

Expliquez en détail ! Et surtout, ***ne mélangez pas*** :

$a + a = 2a$	alors que	$a \cdot a = a^2$
$a + a + a = 3a$	alors que	$a \cdot a \cdot a = a^3$
	etc.	