Question 2

(1) Pour $r > 0$, on a :

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -r \int \sqrt{r^2\left(1 - \cos^2 t\right)}\ \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -r \int \sqrt{r^2 \sin^2 t}\ \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= -r^2 \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= -r^2 \int \frac{1 - \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{r^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r^2}{2}\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{r}\right) + k$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{r}\right) + k'$$

Substitution :

$$\begin{cases} x = r\cos t \Leftrightarrow t = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{r}\right) \\ \mathrm{d}x = -r\sin t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

avec : $-r \leq x \leq r$ et $0 \leq t \leq \pi$

Comme $\sin t \geq 0$, on a :

$\sqrt{\sin^2 t} = \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ et donc :

$$\frac{\sin 2t}{2} = \cos t \sin t = \frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{x}{r^2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2}.$$

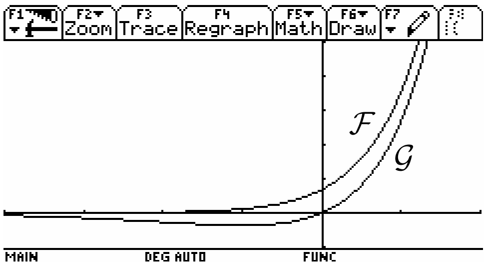
(On rappelle que $\operatorname{Arcsin} y + \operatorname{Arccos} y = \frac{\pi}{2}$, pour $-1 \leq y \leq 1$.)

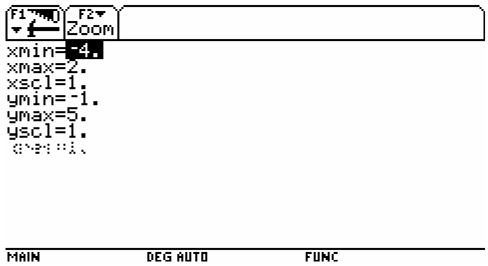
(2) Voir corrigé de Ch. Hild sur http://hild.charles.mysite.lu/ (ex. 325)

Question 3

$f : x \mapsto \ln(1 + e^x) \cdot e^x$ et $g : x \mapsto x \cdot e^x$

(1) On prend par exemple $-4 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 5$:





(2) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) \cdot e^x = \ln 1 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow$ A.H : $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{\text{f.i.}\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \Rightarrow \text{A.H} : y = 0$$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0 \quad /+1$

$\Rightarrow 1 + e^x > 1$

$\Rightarrow \ln(1 + e^x) > \ln 1 = 0$ (car ln est str. croiss.)

$\Rightarrow \ln(1 + e^x)e^x > 0$ (car $e^x > 0$)

$\Rightarrow f(x) > 0$

Donc $\mathcal{F}$ est au-dessus de Ox sur $\mathbb{R}$.

c) $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)$ $e^x > 0$ $/\cdot x$

$$\Rightarrow x \cdot e^x < 0$$

$$\Rightarrow g(x) < 0$$

De plus $g(0) = 0$.

Donc $\mathcal{G}$ est en-dessous de Ox sur $\mathbb{R}_-^*$ et rencontre Ox en (0,0).

(3) f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, comme produits de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Ceci est immédiat dans le cas de g et dans le cas de f on doit préciser que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est une composée de deux fonctions continues :

$$\mathbb{R} \overset{\text{cont.}}{\rightarrow}]1,+\infty[\overset{\text{cont.}}{\rightarrow}]0,+\infty[$$

$$x \mapsto 1+e^x = y \mapsto \ln(1+e^x) = \ln y$$

Il existe donc des primitives de f et de g sur $\mathbb{R}$.

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

$= \int \ln(1+e^x)\cdot e^x\,\mathrm{d}x$ Substitution : $u = e^x, \mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$

$= \int \ln(1+u)\,\mathrm{d}u$ Par parties :

$= (1+u)\ln(1+u) - \int 1\,\mathrm{d}u$ $h(u) = \ln(1+u)$ $k(u) = u+1$; $h'(u) = \frac{1}{1+u}$ $k'(u) = 1$

$= (1+u)\ln(1+u) - u + k$

$= (1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x + k$

- $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

$= \int xe^x\,\mathrm{d}x$

$= xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x$

$= xe^x - e^x + k$

$= (x-1)e^x + k$

Ces primitives sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

(4) $A(\lambda) = \int_{-\lambda}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= [(1+e^x)\ln(1+e^x) - e^x]_{-\lambda}^{0}$$

$$= 2\ln 2 - 1 - \left(1+e^{-\lambda}\right)\ln\left(1+e^{-\lambda}\right) + e^{-\lambda}$$

Or : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$ et

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left(1+e^{-\lambda}\right)\ln\left(1+e^{-\lambda}\right) = 1\cdot\ln 1 = 0$$

Donc : $A = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2\ln 2 - 1$.

(5) $B(\lambda) = -\int_{-\lambda}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$

$= -[(x-1)e^x]_{-\lambda}^{0}$

$= 1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$

Or, d'après la question 2.a, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\lambda} \underset{x=-\lambda}{=} -\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Donc : $B = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} B(\lambda) = 1 - \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\lambda} - \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 1-0-0 = 1$.

(6) Comme $\mathcal{F}$ est située au-dessus de Ox, $A(\lambda)$ est l'aire de la surface finie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites $x=0$ et $x=-\lambda$, et la courbe $\mathcal{F}$. Par conséquent, en faisant tendre λ vers $+\infty$, on obtient A, c.-à-d. l'aire de la surface infinie du plan comprise entre le demi-axe des abscisses négatives, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{F}$.

De même, comme $\mathcal{G}$ est située en-dessous de l'axe des abscisses, B est l'aire de la surface infinie du plan comprise entre le demi-axe des abscisses négatives, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{G}$.

Finalement, $A+B$ est l'aire de la surface infinie du plan délimitée par l'axe des ordonnées et les parties des courbes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ situées à gauche de l'axe des ordonnées.

G. Lorang